

О МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ СО ЗВЕЗДНЫМИ ГРАФИКАМИ

Р. А. ХАЧАТРЯН

Ереванский государственный университет, Армения
E-mail: *protectdrive@gmail.com*

Аннотация. В статье изучаются некоторые топологические свойства звездных тел. Доказано, что граница звездного тела является липшицевой поверхностью. Доказана теорема отделимости звездных тел. Показано, что условие звездности графика при некоторых дополнительных предположениях обеспечивает локальную липшицевость многозначного отображения. Показано, что контингентные и касательные конусы Ф. Кларка являются шатрами Болтянского. На основе этих результатов для некоторых многозначных отображений со звездными графиками построены нижние и верхние дифференциалы. Доказаны теоремы о неподвижных точках многозначных отображений со звездными значениями.

MSC2010 number: 26E25; 49J52; 46J05.

Ключевые слова: Звездное множество; касательный конус; шатер; многозначное отображение.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] посредством контингентных и касательных конусов определяется производная для многозначных отображений в точках их графиков. Из выпуклого анализа известно [4], [5], [10], что можно определить шатры к выпуклым и невыпуклым множествам. Эти конусы сохраняют многие свойства касательных пространств. В настоящей статье доказано, что контингентные и касательные конусы Кларка [7] для звездных множеств являются шатрами Болтянского [4]. При помощи этих результатов построены нижние и верхние дифференциалы для многозначных отображений со звездными графиками. Как известно [1], [6], [16], [18], основная идея дифференциального исчисления многозначных функций состоит в локальном приближении отображения положительно однородными отображениями. Различные определения дифференцируемости многозначных отображений рассматривались в работах [1], [16], [17]. Ближе всего к определению, принятому

в данной работе, стоит определение Де Блази [16]. Этот подход позволяет выяснить существование селекций, которые имеют производные по направлениям. Эти факты уточняют известные результаты Э. Майкла, полученные в [19].

Обобщена теорема Какутана о неподвижной точке для непрерывных многозначных отображений со звездными значениями.

В статье приняты известные определения и обозначения из выпуклого анализа [10], [12], а также понятия непрерывности и липшицевости многозначных отображений [1], [6], [11], [14].

В дальнейшем, если f липшицева функция, то $\partial^0 f(x)$ и $f'(x, \bar{x})$ соответственно субдифференциал и верхняя производная Кларка [7]. $B_r(x)$ – замкнутый шар радиуса r с центром в точке x . ∂M – граница множества M . $\overline{M}$ – замыкание множества M . $d(x, A)$ – расстояние от точки x до множества A . $H(A, B)$ – хаусдорфово расстояние между множествами A и B . Если $a: R^n \rightarrow 2^{R^m}$ – многозначное отображение, то

$$\text{graf}(a) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) / y \in a(x)\}, \text{ dom}(a) \stackrel{\text{def}}{=} \{x / a(x) \neq \emptyset\}, \|a(x)\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{y \in a(x)} \|y\|.$$

2. О НЕКОТОРЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ЗВЕЗДНЫХ МНОЖЕСТВ

Пусть M – подмножество банахова пространства X . Положим

$$M^0 \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M : \lambda x + (1 - \lambda)y \in M, y \in M, \text{ и } \lambda \in [0, 1]\}.$$

Подмножество M^0 называется ядром звездности множества M . Если $M^0 \neq \emptyset$, то множество M называется звездным [12]. Нетрудно показать, что M^0 – выпуклое множество. Очевидно, что если M выпуклое множество, то $M = M^0$. Звездное множество M называется звездным телом, если $\text{int } M^0 \neq \emptyset$.

Предложение 2.1. Пусть $M \subseteq X$ звездное тело. Тогда:

- (1) если $x \in \text{int } M^0$, $y \in M$, то $\lambda y + (1 - \lambda)x \in \text{int } M$ для всех $\lambda \in [0, 1]$;
- (2) $\overline{\text{int } M} = \overline{M}$;
- (3) $\text{int } M = \text{int } \overline{M}$;
- (4) $\overline{M^0} = (\overline{M})^0$.

Доказательство. Доказательства соотношений 1 – 3 мы опускаем, ибо они аналогичны доказательству в выпуклом случае. Покажем последнее свойство. Имеет место очевидное включение $\overline{M^0} \subseteq (\overline{M})^0$. Покажем теперь обратное включение. Предположим, что существует точка $x \in (\overline{M})^0$, но $x \notin \overline{M^0}$. Пусть $y \in \text{int} M^0$. Тогда так как множество $(\overline{M})^0$ выпуклое, то существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $\text{conv}\{B_\varepsilon(y), x\} \subseteq (\overline{M})^0$. Согласно условию 1 для достаточно малых $\lambda \in (0, 1)$ имеем

$$x_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \lambda y + (1 - \lambda)x \in \text{int} (\overline{M})^0.$$

Поскольку $x \notin \overline{M^0}$, то можно считать, что $x_\lambda \notin \overline{M^0}$. Следовательно, существует точка $z \in M$, которая не видна из точки x_λ , т.е. на отрезке $[x_\lambda, z]$ найдется точка q такая, что $q \notin M$. Но поскольку $x_\lambda \in (\overline{M})^0$ и $z \in M$, то $[x_\lambda, z] \subseteq \text{int } \overline{M}$. Отсюда получим $[x_\lambda, z] \subseteq \text{int } M$, т.е. $q \in M$, что противоречит предположению. $\square$

Теорема 2.1. Пусть $f(x)$ – липшицева функция на замкнутом шаре $B_\varepsilon(x_0)$, $x_0 \in X$. Тогда

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \text{epi}(f) = \{(\mu, x) / \mu \geq f(x), x \in B_\varepsilon(x_0)\}$$

является звездным множеством.

Доказательство. Поскольку $f(x)$ – липшицева функция, то существует такое число $L > 0$, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L\|x_1 - x_2\| \text{ для всех } x_1, x_2 \in B_\varepsilon(x_0).$$

Покажем, что при достаточно больших $\bar{\mu}$ точка $(\bar{\mu}, \bar{x}) \in M^0$ для всех $\bar{x} \in B_\varepsilon(x_0)$. Если $(\mu, x), (\bar{\mu}, \bar{x}) \in M$, то

$$\mu - f(x) \geq 0, \quad \bar{\mu} - f(\bar{x}) \geq 0.$$

Отсюда при $\lambda \in [0, 1]$ имеем

$$\begin{aligned} \lambda\mu + (1 - \lambda)\bar{\mu} - f(\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}) &\geq \lambda\mu + (1 - \lambda)\bar{\mu} - L(1 - \lambda)\|\bar{x}\| - f(\lambda x) \geq \\ &\geq \lambda\mu + (1 - \lambda)\bar{\mu} - L(1 - \lambda)\|\bar{x}\| - L(1 - \lambda)\|x\| - f(x) \geq (1 - \lambda)(\bar{\mu} - L\|\bar{x}\| - L\|x\| - f(x)). \end{aligned}$$

Так как функция $f(x)$ ограничена в $B_\varepsilon(x_0)$, то из последнего неравенства следует, что можно выбрать $\bar{\mu}$ настолько большим, что

$$\bar{\mu} - L\|\bar{x}\| - L\|x\| - f(x) > 0 \text{ для всех } \bar{x}, x \in B_\varepsilon(x_0).$$

Таким образом показано, что $\lambda\mu + (1-\lambda)\bar{\mu} \geq f(\lambda x + (1-\lambda)\bar{x})$. Это означает, что $(\bar{\mu}, \bar{x}) \in M^0$. $\square$

Определение 2.1. [7]. Вектор ν называется гиперкасательным к множеству M в точке $x \in M$, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что $y + tw \in M$ для всех $y \in B_\varepsilon(x) \cap M$, $w \in B_\varepsilon(\nu)$ и $t \in (0, \varepsilon)$.

Предложение 2.2. Если $M \subseteq R^n$ – звездное тело, то для любых $x \in \partial M$ и $x_0 \in \text{int } M^0$ вектор $\nu = (x_0 - x)/\|x - x_0\|$ является гиперкасательным к множеству M .

Доказательство. Полагая $\lambda = \|x - x_0\|$, получим $x_0 = x + \lambda\nu$. Поэтому существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $x + \lambda\nu + B_\varepsilon(0) \subseteq M^0$. Выберем теперь число $\delta > 0$ так, что $B_\delta(x) + \lambda B_\delta(\nu) \subseteq M^0$. Тогда для любых $t \in (0, \delta)$, $y \in B_\delta(x)$, $w \in B_\delta(\nu)$ имеем

$$y + tw = (1 - \frac{t}{\lambda})y + \frac{t}{\lambda}(y + \lambda w).$$

Если $y \in M$, то $y + \lambda w \in M^0$, и поэтому $y + tw \in M$. Это означает, что ν –гиперкасательная к множеству M в точке x . $\square$

Определение 2.2. Множество $M \subseteq R^n$ называется эллиптицизовым вблизи точки $x \in M$, если существует такое линейное обратимое отображение $A : R^n \rightarrow R^{n-1} \times R$, что для некоторой окрестности U точки x имеем

$$M \cap U = U \cap A^{-1}(\text{epi}\varphi),$$

где функция $\varphi : R^{n-1} \rightarrow R$ удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности ξ , где ξ есть компонента $A(x)$.

Согласно предложению 2.2 множество гиперкасательных для звездных тел непусто. Поэтому из теоремы 7.3 [7] непосредственно следует, что граница звездного тела является липшицевой поверхностью.

Теорема 2.2. *Если множество $M \subseteq R^n$ является звездным телом, то вблизи любой точки $x \in \partial M$ множество M является эллиптицидным.*

3. ЛИПШИЦЕВЫ МНОГОЗНАЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ СО ЗВЕЗДНЫМИ ГРАФИКАМИ

Пусть $a: R^n \rightarrow 2^{R^m}$ – многозначное отображение. Обозначим через a^0 отображение, графиком которого является множество $(\text{graf}(a))^0$.

Определение 3.1. [10] *Отображение a ограничено, если существует такая константа $c > 0$, что*

$$\|y\| \leq c(1 + \|x\|) \quad \text{для всех } y \in a(x).$$

Теорема 3.1. *Пусть a – выпуклое замкнутое отображение (т.е. отображение с выпуклым замкнутым графиком), а множество M звездно и замкнуто. Пусть далее в некоторой точке $x_0 \in \text{dom}(a)$ пересечение множеств $a(x_0)$ и M^0 непусто и множество $a(x_0) \cap M$ ограничено. Тогда многозначное отображение $b(x) \stackrel{\text{def}}{=} a(x) \cap M$ ограничено.*

Доказательство. Допустим обратное. Тогда найдутся последовательности $z_k = (x_k, y_k)$ и $y_k \in b(x_k)$ такие, что

$$\frac{\|y_k\|}{1 + \|x_k\|} \rightarrow \infty \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Пусть последовательность x_k ограничена. Положим $\lambda_k = \alpha(1 + \|x_k\|)/\|y_k\|$, где α – положительное число. Значит, для достаточно больших k имеем $\lambda_k \in (0, 1)$.

Возьмем $y_0 \in a(x_0) \cap M^0 \subseteq (b(x_0))^0$ и рассмотрим точки

$$\overline{x_k} = \lambda_k x_k + (1 - \lambda_k)x_0, \quad \overline{y_k} = \lambda_k y_k + (1 - \lambda_k)y_0.$$

Так как M звездное множество и $y_0 \in M^0$, то $\overline{y_k} \in M$. Далее поскольку a – выпуклое отображение, то $\overline{y_k} \in a(\overline{x_k})$. Поэтому $\overline{y_k} \in b(\overline{x_k})$. Имеем

$$(3.1) \quad \overline{y_k} = \frac{\alpha(1 + \|x_k\|)y_k}{\|y_k\|} + (1 - \lambda_k)y_0.$$

Не нарушая общности, можно считать, что

$$\|x_k\| \rightarrow \alpha_0, \quad \frac{y_k}{\|y_k\|} \rightarrow h \neq 0.$$

Тогда из (3.1) и в силу замкнутости отображения b имеем

$$\alpha(1 + \alpha_0)h + y_0 \in b(x_0).$$

Отсюда следует, что из точки $y_0 \in M^0$ исходит некоторый луч целиком содержащийся в $b(x_0)$. Но это невозможно, поскольку множество $b(x_0)$ по предположению ограничено.

Пусть теперь $\|x_k\| \rightarrow \infty$. Положим в этом случае

$$\lambda_k = \frac{\alpha(1 + \|x_k\|)}{\|x_k\|\|y_k\|}, \quad k \geq 1.$$

Тогда повторяя все предыдущие рассуждения с учетом замены формулы (3.1) на

$$\overline{y_k} = \frac{\alpha(1 + \|x_k\|)}{\|x_k\|} \frac{y_k}{\|y_k\|} + (1 - \lambda_k)y_0$$

и формулы $\frac{1 + \|x_k\|}{\|x_k\|} \rightarrow 1$, снова получим противоречие. Это завершает доказательство. $\square$

Совершенно аналогично доказывается следующий результат.

Предложение 3.1. Пусть $a: R^n \rightarrow 2^{R^m}$ – многозначное отображение со звездным и замкнутым графиком. Тогда, если в некоторой точке $x_0 \in \text{dom}(a^0)$ множество $a(x_0)$ ограничено, то отображение a ограничено.

Теорема 3.2. Пусть $a: R^n \rightarrow 2^{R^m}$ – многозначное отображение со звездным и замкнутым графиком. Тогда оно полунепрерывно снизу в любой точке $x_0 \in \text{int dom}(a^0)$. Кроме того, если в некоторой точке $x_0 \in \text{dom}(a^0)$ множество $a(x_0)$ ограничено, то a удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности точки x_0 .

Доказательство. Пусть $x_0 \in \text{int dom}(a^0)$, $y_0 \in a^0(x_0)$. Тогда из предложения 3.3.8 [1] следует, что

$$x_0 \in \text{int } (a^0)^{-1}(K \bigcap B_1(y_0)), \quad \text{где } K \stackrel{\text{def}}{=} \text{dom}(a^0)^{-1}.$$

Значит, существует такое $\gamma > 0$, что

$$B_{2\gamma}(x_0) \subseteq (a^0)^{-1}(K \bigcap B_1(y_0)).$$

Пусть $y \in Im(a)$ и $x \in B_\gamma(x_0)$. Если $y \in a(x)$, то $d(y, a(x)) = 0$. Если $y \notin a(x)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $z \in a^{-1}(y)$, что

$$\|x - z\| \leq d(x, a^{-1}(y)) + \varepsilon.$$

Так как $B_\gamma(x) \subseteq (a^0)^{-1}(K \cap B_1(y_0))$, то

$$(3.2) \quad \frac{x - z}{\|x - z\|} \gamma \in (a^0)^{-1}(K \cap B_1(y_0)) - x.$$

Положим

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|x - z\|}{\|x - z\| + \gamma}.$$

Ясно, что $\lambda \in (0, 1)$. Включение (3.2) можно записать следующим образом:

$$(3.3) \quad (1 - \lambda)(x - z) \in \lambda(a^0)^{-1}(K \cap B_1(y_0)) - \lambda x.$$

Поскольку $z \in a^{-1}(y)$ и график отображения a^{-1} является звездным множеством, то из (3.3) следует, что существует $y_1 \in K \cap B_1(y_0)$, такое, что

$$x \in \lambda(a^0)^{-1}(y_1) + (1 - \lambda)a^{-1}(y) \subseteq a^{-1}(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y).$$

Следовательно, $y_x \stackrel{\text{def}}{=} \lambda y_1 + (1 - \lambda)y \in a(x)$. Кроме того, так как, $y_1 \in B_1(y_0)$, то

$$\|y_x - y\| = \lambda\|y_1 - y\| \leq \lambda(\|y_1 - y_0\| + \|y_0 - y\|) \leq \lambda(1 + \|y - y_0\|).$$

Далее,

$$\lambda = \frac{\|x - z\|}{\gamma + \|x - z\|} \leq \frac{d(x, a^{-1}(y)) + \varepsilon}{\gamma}.$$

Таким образом

$$d(y, a(x)) \leq \frac{d(x, a^{-1}(y)) + \varepsilon}{\gamma} (1 + \|y - y_0\|) \quad \text{для всех } x \in B_\gamma(x_0).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$(3.4) \quad d(y, a(x)) \leq \frac{d(x, a^{-1}(y))}{\gamma} (1 + \|y - y_0\|) \quad \text{для всех } x \in B_\gamma(x_0).$$

Из соотношения 3.4 непосредственно следует, что отображение полунепрерывно снизу в точке x_0 . Теперь предположим, что множество $a(x_0)$ ограничено. Тогда согласно предложению 3.1 отображение a ограничено, и поэтому из (3.4) следует, что существует такая константа $L > 0$, что

$$H(a(x), a(x')) \leq L\|x - x'\| \quad \text{для всех } x, x' \in B_\gamma(x_0).$$

Теорема доказана. $\square$

В работе [1] (см. следствие 7 теоремы 1, стр.138), используя соотношение (3.4) для многозначного отображения $a(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + R_+$, где f непрерывная выпуклая функция, доказано, что f локально липшицева на внутренности своего эффективного множества, т.е. на $\text{int } \text{dom}(a)$. Совершенно аналогично доказывается следующий результат.

Теорема 3.3. *Пусть $f: R^n \rightarrow R$ такая непрерывная функция, надграфик которой является звездным множеством. Пусть a – многозначное отображение, график которого является надграфик функции f . Тогда f локально липшицева на $\text{int } \text{dom}(a^0)$.*

4. КАСАТЕЛЬНЫЕ КОНУСЫ И ШАТРЫ ДЛЯ ЗВЕЗДНЫХ МНОЖЕСТВ

Напомним некоторые определения из нелинейного анализа. Пусть M – подмножество банахова пространства X .

Определение 4.1. [20] Вектор $\nu \in X$ называется внутренним направлением для M в точке $x \in M$, если существуют такая окрестность $B_\delta(\nu)$ точки ν и такое число $\varepsilon > 0$, что

$$x + h\nu \in M \text{ для всех } \nu \in B_\delta(\nu), h \in (0, \varepsilon).$$

Конус внутренних направлений для M в точке x обозначим через $G_M(x)$.

Контингентный конус $T_M(x)$ для M в точке $x \in M$ определяется следующим образом:

Определение 4.2. [1] $\nu \in T_M(x)$ в том и только в том случае, если для любых $\varepsilon > 0$ и $\alpha > 0$ существует $u \in B_\varepsilon(\nu)$, и $h \in (0, \alpha]$ такие, что $x + hu \in M$.

Касательный конус Ф. Кларка $C_M(x_0)$ для M в точке x_0 определяется следующим образом:

Определение 4.3. [7] $\nu \in C_M(x_0)$ в том и только в том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\alpha > 0$, и $\beta > 0$ такие, что для любого $x \in B_\alpha(x_0) \cap M$ и любого $h \in (0, \beta]$ существует $u \in B_\varepsilon(\nu)$ такое, что $x + hu \in M$.

Определение 4.4. [3] Конус $K_M(x)$ называется шатром множества M в точке $x \in M$, если существует отображение $r(\bar{x}) = o(\bar{x})$, определенное в некоторой $B_\delta(0)$ окрестности нуля, такое, что

$$x + \bar{x} + r(\bar{x}) \in M \text{ для любого } \bar{x} \in K_M(x) \cap B_\delta(0).$$

Шатер называется липшицевым (гладким), если отображение r липшицево (непрерывно дифференцируемо) в окрестности начала координат.

Пусть $M \subseteq X$ – некоторое множество. Положим

$$\text{con}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x = \lambda x_1, x_1 \in M, \lambda > 0\}.$$

Теорема 4.1. Пусть M – звездное замкнутое тело и $x \in M^0$. Тогда:

- (1) $T_M(x) = \overline{\text{con}(M - x)}$,
- (2) $\text{int } T_M(x) = \text{con}(\text{int } M - x)$,
- (3) $\text{con}(\text{int } M - x) = \text{int } \text{con}(M - x)$
- (4) $G_M(x) = \text{int } T_M(x)$.

Доказательство. Первое равенство непосредственно вытекает из определения конуса $T_M(x)$. Покажем, что

$$(4.1) \quad \text{int } T_M(x) = \text{int } \text{con}(M - x).$$

Для этого сначала докажем, что выпуклый конус $K_{M^0}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \text{con}(M^0 - x)$ является ядром конуса $K_M(x) \stackrel{\text{def}}{=} \text{con}(M - x)$. Действительно, пусть $\nu \in K_{M^0}(x)$. Тогда для некоторого $\gamma_1 > 0$ и $x_0 \in M^0$ имеем $\nu = \gamma_1(x_0 - x)$.

Выберем любую точку $u \in K_M(x)$ и покажем, что для любого $\lambda \in [0, 1]$

$$\lambda\nu + (1 - \lambda)u \in K_M(x).$$

Существуют число $\delta_2 > 0$ и элемент $\bar{x} \in M$, такие, что $u = \gamma_2(\bar{x} - x)$. Имеем

$$\lambda\nu + (1 - \lambda)u = (\lambda\gamma_1 + (1 - \lambda)\gamma_2) \left(\frac{\lambda\gamma_1}{\lambda\gamma_1 + (1 - \lambda)\gamma_2} (x_0 - x) + \frac{(1 - \lambda)\gamma_2}{\lambda\gamma_1 + (1 - \lambda)\gamma_2} (\bar{x} - x) \right) =$$

$$(\lambda\gamma_1 + (1-\lambda)\gamma_2)\left(\frac{\lambda\gamma_1}{\lambda\gamma_1 + (1-\lambda)\gamma_2}x_0 + \frac{(1-\lambda)\gamma_2}{\lambda\gamma_1 + (1-\lambda)\gamma_2}\bar{x} - x\right).$$

Так как $x_0 \in M^0$ и $\bar{x} \in M$, то

$$(4.2) \quad \frac{\lambda\gamma_1}{\lambda\gamma_1 + (1-\lambda)\gamma_2}x_0 + \frac{(1-\lambda)\gamma_2}{\lambda\gamma_1 + (1-\lambda)\gamma_2}\bar{x} \in M.$$

Следовательно,

$$\lambda\nu + (1-\lambda)u \in K_M(x).$$

Таким образом мы показали, что конус $K_M(x)$ является звездным телом. По предложению 2.1 имеем

$$\text{int } T_M(x) = \text{int } K_M(x) = \text{int } \overline{K_M(x)}.$$

Значит равенство (4.1) доказано. Осталось доказать, что

$$\text{int } K_M(x) = \text{con}(\text{int } M - x).$$

Пусть $\nu \in \text{int } K_M(x)$. Тогда существует окрестность $B_\eta(0)$ такая, что $\nu + B_\eta(0) \subseteq K_M(x)$.

Если $\nu + x \in \text{int } M$, то доказательство завершено. Если нет, то возьмем точку

$x_0 \in \text{int } M^0$ и положим $\nu_0 = x_0 - x$. Тогда

$$\nu - \frac{\eta\nu_0}{\|\nu_0\|} \in K_M(x),$$

и поэтому существует такое число $h > 0$, что

$$x + h\left(\nu - \frac{\eta\nu_0}{\|\nu_0\|}\right) \in M.$$

Пусть

$$\alpha = \frac{h\eta}{h\eta + \|\nu_0\|}.$$

Поскольку $x_0 \in \text{int } M^0$ и $x + h(\nu - \eta\nu_0/\|\nu_0\|) \in M$, то согласно предложению 2.1, имеем

$$x + (1-\alpha)h\nu = \alpha x_0 + (1-\alpha)(x + h(\nu - \eta\nu_0/\|\nu_0\|)) \in \text{int } M.$$

Это означает, что

$$\nu \in \frac{1}{(1-\alpha)h}(\text{int } M - x).$$

Перейдем теперь к доказательству равенства: $\text{int } T_M(x) = G_M(x)$. Пусть $\bar{x} \in \text{int } T_M(x)$. Так как

$$\text{int } T_M(x) = \text{con}(\text{int } M - x),$$

то

$$\bar{x} = \lambda(x_1 - x) \text{ для некоторого } \lambda > 0 \text{ и } x_1 \in \text{int } M.$$

Существует окрестность $B_\varepsilon(x_1) \subseteq M$. Тогда множество $\lambda(B_\varepsilon(x_1) - x)$ является окрестностью точки $\bar{x}$ и для любой точки y ($y = \lambda(x'_1 - x)$, $x'_1 \in B_\varepsilon(x_1)$) из этой окрестности и для любого числа $\delta \in (0, 1/\lambda)$ будет $x + \delta y \in M$. Действительно, по предложению 2.1 имеем

$$x + \delta y = x + \delta\lambda(x'_1 - x) \in \text{int } M, \text{ поскольку } \lambda\delta \in (0, 1).$$

Значит, $\text{int } T_M(x) \subseteq G_M(x)$. Обратное включение очевидно. $\square$

Следствие 4.1. Пусть M – звездное тело и $x \in M^0$. Тогда $\overline{G_M(x)} = T_M(x)$.

Следствие 4.2. Пусть M – замкнутое звездное тело и $0 \in M^0$. Тогда если $h \in \text{int } T_M(0)$, то существует вектор $x \in \text{int } M$ такой, что $h = \lambda x$ при некотором $\lambda > 0$.

Одно из интересных приложений теоремы 4.1 является теорема отделимости звездных тел. Введем понятие отделимости множеств.

Определение 4.5. Множества $M_1, M_2 \subseteq X$ такие, что $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$ называются *отделимыми*, если существуют вектор $\mathbf{w}$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$(M_1 + \alpha \mathbf{w}) \cap M_2 = \emptyset \text{ для всех } \alpha \in (0, \delta).$$

Предложение 4.1. Пусть M_1, M_2 – звездные замкнутые тела в банаховом пространстве X такие, что

$$\text{int } M_1 \cap \text{int } M_2 = \emptyset \text{ и } M_1^0 \cap M_2^0 \neq \emptyset.$$

Тогда множества M_1 и M_2 *отделимы*.

Доказательство. Не нарушая общности, предположим, что $0 \in M_1^0 \cap M_2^0$. Покажем, что $\text{int}(\text{conv } M_2) \cap M_1 = \emptyset$. Действительно, если существует вектор $\nu \in \text{int}(\text{conv } M_2) \cap M_1$, то в окрестности вектора ν существует такая точка $\bar{\nu}$, что

$$\bar{\nu} \in \text{int } \text{con}(M_2) \cap \text{int } M_1.$$

Поэтому в силу Следствия 4.2 для достаточно малых $\lambda > 0$ имеем

$$\lambda \bar{\nu} \in \text{int} M_1 \bigcap \text{int} M_2,$$

что противоречит условию предложения. Теперь, если $\mathbf{w} \in \text{int} M_2^0$, то

$$\mathbf{w} + M_2 \subseteq \text{int} \text{con} M_2.$$

Действительно, если $x \in M_2$, то по предложению 2.1 имеем

$$\nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\mathbf{w} \in \text{int} M_2.$$

Поэтому

$$x + \mathbf{w} \in \text{con}(\text{int} M_2) = \text{int} \text{con}(M_2).$$

Так как $\mathbf{w} \in M_2^0$ и $0 \in M_2^0$, то $\alpha \mathbf{w} \in M_2^0$ при $\alpha \in (0, 1)$.

Следовательно,

$$(\alpha \mathbf{w} + M_2) \bigcap M_1 = \emptyset \text{ для всех } \alpha \in (0, 1).$$

Предложение доказано. $\square$

Теорема 4.2. Пусть $M \subseteq R^n$ – выпуклое тело и $x_0 \in M$. Тогда любой замкнутый конус $K \subseteq \text{int} T_M(x_0)$ является гладким шатром для M в точке x_0 .

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что $x_0 = 0$. Рассмотрим пересечение $Q = S_1 \bigcap K$, где S_1 – единичная сфера. Q – компакт и для любого $x \in Q$ множество $a(x) \stackrel{\text{def}}{=} [0, x] \bigcap M$, в силу теоремы 4.1, содержит отличный от нуля элемент $y \in \text{int} M$. Поэтому многозначное отображение a с выпуклыми непустыми компактными значениями непрерывно на компакте Q (см. [1], теорему 3.1.16). Положим $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} d(x, a(x))$. Так как многозначное отображение a непрерывно, то функция f также непрерывна. Следовательно, она достигает своего максимального значения на компакте Q , т.е. $\max_{x \in Q} f(x) = f(x_*)$. Очевидно, что $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \|x_*\| - f(x_*) > 0$. Поэтому, если $x \in K \bigcap B_\delta(0)$, то $x \in M$. $\square$

Теорема 4.3. Пусть $M \subseteq R^n$ – звездное тело. Тогда для любого $x \in M$ конус $C_M(x)$ является липшицевым шатром для M в точке x .

Доказательство. Согласно теореме 2.2, в окрестности любой точки $x_0 \in \partial M$ множество является эпиллипицевым. Поэтому существуют линейное обратимое отображение $\mathbf{A}$ и липшицева функция $\varphi: R^{n-1} \rightarrow R$ такие, что для некоторой окрестности U точки x_0 имеет место равенство

$$M \cap U = U \cap A^{-1}(\text{epi}\varphi).$$

Положим

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) - y_n, \quad \widehat{y} \stackrel{\text{def}}{=} (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}).$$

Функция f липшицева вблизи точки $y_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}x_0$ и субдифференциал Кларка этой функции равен $(\partial^0 \varphi(\widehat{y}_0), -1)$. Значит, $0 \notin \partial^0 f(y_0)$, и поэтому существует такой вектор a , что $f^0(y_0, a) < 0$. Нетрудно заметить, что если $C_M(x_0)$ – касательный конус Кларка, то $\mathbf{A}C_M(x_0)$ является касательным конусом для $\mathbf{A}M$ в точке y_0 . Известно (см. теорему 2.4.9 [7]), что надграфик функции $\varphi^0(\widehat{y}, \cdot)$ совпадает с конусом $C_{\text{epi}(f)}(\widehat{y}, \varphi(\widehat{y}))$. Не нарушая общности, предположим, что $x_0 = 0$ и $f(0) = 0$. Выберем направление $a = (0, 0, \dots, 1)$. Так как функция f липшицева вблизи нуля, то согласно лемме 5.3.5 [10] существует функция $r(\bar{y}) = o(\bar{y})$ такая, что

$$(4.3) \quad f(\bar{y}) \leq f(0) + f^0(0, \bar{y}) + r(\bar{y}).$$

Поскольку функция $f^0(y, a)$ полунепрерывна сверху по y , то существуют окрестность $V \subseteq U$ нуля и число C такие, что

$$\max_{y \in V} f^0(y, a) \stackrel{\text{def}}{=} m < 0, \quad \text{и} \quad \|y^*\| \leq C \text{ для любого } y \in V.$$

Положим $\omega(\lambda) = \sup\{r(\bar{y}) : \|\bar{y}\| \leq \lambda\}$. Ясно, что $\omega(\lambda)$ монотонно не убывает и $\omega(\lambda)/\lambda \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$ и $r(\bar{y}) \leq \omega(\|\bar{y}\|)$. Положим $K \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{y} : f^0(0, \bar{y}) \leq 0\}$. Пусть вектор $\bar{y} \in K$ и $\mu > 0$. Тогда из (4.3) получим

$$\begin{aligned} f(\bar{y} + \mu\|\bar{y}\|a) &\leq f^0(0, \bar{y} + \mu\|\bar{y}\|a) + \omega(\|\bar{y}\|(1 + \mu\|a\|)) \leq \\ &\leq \|\bar{y}\|[\mu f^0(0, a) + \omega(\|\bar{y}\|(1 + \mu\|a\|))]/\|\bar{y}\|. \end{aligned}$$

Выберем теперь $\delta_\mu > 0$ настолько малым, чтобы выражение в квадратных скобках, было меньше $1/2\mu f^0(0, a)$ при $\|\bar{y}\| \leq \delta_\mu$. Тогда имеем

$$f(\bar{y} + \mu\|\bar{y}\|a) \leq \frac{1}{2} f^0(0, a)\|\bar{y}\| < 0 \text{ при } \|\bar{y}\| \leq \delta_\mu, \bar{y} \neq 0.$$

Рассмотрим теперь функцию $q(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} f(\bar{y} + \alpha\|\bar{y}\|a)$ на отрезке $[0, \mu]$. Очевидно, что она непрерывна на этом отрезке. Теперь на множестве $K \cap B_{\delta_\mu}(0)$ определим функцию $\alpha(\bar{y})$ следующим образом. Если $f(\bar{y}) \leq 0$, то положим $\alpha(\bar{y}) = 0$. Если $f(\bar{y}) > 0$, то $q(0) > 0$, $q(\mu) < 0$. Следовательно, существует единственная точка $\alpha(\bar{y}) \in [0, \mu]$ такая, что $q(\alpha(\bar{y})) = 0$. Из определения функции $\alpha(\bar{y})$ непосредственно следует, что $\alpha(\bar{y}) \rightarrow 0$ при $\bar{y} \rightarrow 0$. Положим $\rho(\bar{y}) = \alpha(\bar{y})\|\bar{y}\|$. Очевидно, что $\rho(\bar{y}) = o(\bar{y})$. Покажем, что функция $\rho(\bar{y})$ удовлетворяет условию Липшица на множестве $\bar{U} \stackrel{\text{def}}{=} K \cap B_{\delta_\mu}(0)$. Пусть $\bar{y}_1, \bar{y}_2 \in \bar{U}$.

Рассмотрим случай, когда $f(\bar{y}_1) > 0$, $f(\bar{y}_2) \leq 0$. Тогда согласно определению функции ρ имеем

$$f(\bar{y}_1 + \rho(\bar{y}_1)a) = 0 \text{ и } \rho(\bar{y}_2) = 0.$$

Значит,

$$f(\bar{y}_2 + \rho(\bar{y}_2)a) - f(\bar{y}_1 + \rho(\bar{y}_1)a) = (y^*, \bar{y}_2 - \bar{y}_1 + \rho(\bar{y}_2)a - \rho(\bar{y}_1)a) \leq 0,$$

где $y^* \in \partial^0 f(\xi)$, ξ – некоторая точка из $\bar{U}$. Отсюда получим

$$(4.4) \quad (y^*, \rho(\bar{y}_2)a - \rho(\bar{y}_1)a) \leq (y^*, \bar{y}_1 - \bar{y}_2) \leq C\|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|,$$

где

$$C = \max_{y \in \bar{U}} \max_{y^* \in \partial^0 f(y)} \|y^*\|.$$

Так как $f^0(0, a) < 0$ и отображение $f^0(y, a)$ полунепрерывно сверху по y , то, не нарушая общности, можно считать, что

$$l \stackrel{\text{def}}{=} \max_{y \in \bar{U}} f^0(y, a) < 0.$$

Отсюда и из (4.4) получим

$$\rho(\bar{y}_1) - \rho(\bar{y}_2) \leq \frac{C}{-l} \|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|.$$

Положив $L \stackrel{\text{def}}{=} \frac{C}{-l}$ и имея ввиду, что $\rho(\bar{y}_2) = 0$, окончательно получаем

$$|\rho(\bar{y}_1) - \rho(\bar{y}_2)| \leq L \|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|.$$

Остальные случаи рассматриваются аналогично. Пусть Π – оператор проектирования на выпуклый замкнутый конус $K = C_{\mathbf{A}M}(0)$. Положим $r(\bar{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \rho(\Pi(\bar{y})a)$. Так как оператор проектирования удовлетворяет условию Липшица с константой 1, то отображение $r(\bar{y})$ также удовлетворяет условию Липшица. Очевидно, что $r(\bar{y}) = o(\bar{y})$ и если $\bar{y} \in \bar{U}$, то $f(\bar{y} + r(\bar{y})) \leq 0$. Таким образом мы доказали, что выпуклый конус $K = \mathbf{A}C_M(0)$ является липшицевым шатром к множеству $\mathbf{A}M$ в нуле. Следовательно, конус $C_M(0)$ – липшицевый шатер для M в нуле. $\square$

Предложение 4.2. Пусть $a: R^n \rightarrow 2^{R^m}$ – многозначное отображение, графиком которого является такой выпуклый замкнутый конус, что $\text{dom}(a) = R^n$. Тогда существует такое липшицево, положительно однородное отображение $P: R^n \rightarrow R^m$, что $P(x) \in a(x)$ для всех $x \in R^n$.

Доказательство. Рассмотрим многозначное отображение $b(x) \stackrel{\text{def}}{=} a(x) \cap B_1(0)$. Очевидно, что b – выпуклое отображение с компактными значениями и

$$0 \in \text{int}(a(0) - B_1(0)).$$

Известно (см. [8], теорема 6.1) – теорема о липшицевости пересечения липшицевых многозначных отображений с условием непустой внутренней), что отображение b удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности $B_\delta(0)$ нуля с некоторой константой L . Обозначим через $z_s(x)$ селектор Штейнера для отображения b , определенный на этой окрестности. Известно (см. [9], лемма 2.1.4) также, что этот селектор удовлетворяет условию :

$$\|z_s(x_1) - z_s(x_2)\| \leq L_m H(b(x_1), b(x_2)), \text{ где } L_m = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(m/2 + 1)}{\Gamma((m+1)/2)}.$$

Положим

$$(4.5) \quad P(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left\| \frac{x}{\delta} \right\| z_s\left(\delta \frac{x}{\|x\|}\right), \text{ если } x \neq 0 \text{ и } P(0) = 0.$$

Очевидно, что

$$P(\lambda x) = \lambda P(x) \text{ и } P(x) \in a(x) \text{ для всех } x \in R^n, \lambda \geq 0.$$

Теперь покажем, что отображение P на R^n удовлетворяет условию Липшица.

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \|P(x_1) - P(x_2)\| &\leq \left\| \frac{x_1}{\delta} \left(\|z_s(\delta \frac{x_1}{\|x_1\|}) - z_s(\delta \frac{x_2}{\|x_2\|})\| + \|z_s(\delta \frac{x_2}{\|x_2\|})\| \left\| \frac{x_1}{\delta} - \frac{x_2}{\delta} \right\| \right) \right\| \leq \\ &\leq LL_m \|x_1\| \left\| \frac{x_1}{\|x_1\|} - \frac{x_2}{\|x_2\|} \right\| + \frac{\max_{u \in B_\delta(0)} \|z_s(u)\|}{\delta} \|x_1\| - \|x_2\| \leq (2LL_m + \frac{C}{\delta}) \|x_1 - x_2\|, \end{aligned}$$

где $C \stackrel{\text{def}}{=} \max_{u \in B_\delta(0)} \|z_s(u)\|$.

Из (4.5) следует, что

$$\|P(x)\| \leq \frac{C}{\delta} \|x\| \text{ для всех } x \in R^n.$$

Предложение доказано. $\square$

Пусть $a: R^n \rightarrow 2^{R^m}$ — многозначное отображение и $z_0 \stackrel{\text{def}}{=} (x_0, y_0) \in \text{graf}(a)$. Положим $a_{z_0}(\bar{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{y} \in R^m : (\bar{x}, \bar{y}) \in K\}$, где K — шатер к множеству $\text{graf}(a)$ в точке z_0 .

Теорема 4.4. Пусть выпуклый замкнутый конус K является непрерывным шатром для $\text{graf}(a)$ в точке z_0 . Допустим также, что $\text{dom}(a_{z_0}) = R^n$. Тогда:

- (1) существует селектор $y(x)$ отображения a , проходящий через точку z_0 и определенный в некоторой окрестности точки x_0 , такой, что

$$y'(x_0, \bar{x}) \in a_{z_0}(\bar{x}) \text{ для всех } \bar{x} \in R^n,$$

- (2) отображение $y'(x_0, \bar{x})$ удовлетворяет условию Липшица по $\bar{x}$ в R^n .

Доказательство. По предложению 4.2 найдется липшицевый и положительно однородный селектор P для отображения a_{z_0} . Так как K — непрерывный шатер для $\text{graf}(a)$ в точке z_0 , то существует такое непрерывное отображение

$$r(\bar{z}) \equiv (r_1(\bar{x}, \bar{y}), r_2(\bar{x}, \bar{y})) = o(\bar{z}), \quad \text{при } |\bar{z}| \rightarrow 0$$

что

$$z_0 + \bar{z} + o(\bar{z}) \in \text{graf}(a) \text{ для достаточно малых } |\bar{z}|, \quad \bar{z} \in K.$$

Покажем, что уравнение

$$g(\bar{x}, u) \stackrel{\text{def}}{=} (x_0 + \bar{x} + u + r_1(\bar{x}, P(\bar{x} + u)) - (x_0 + \bar{x}) = 0$$

удовлетворяет всем требованиям теоремы 5.1.1 о неявных функциях [10], стр. 191). Действительно, имеем

(1) g – непрерывное отображение, определенное в некоторой окрестности U нуля и $g(0, 0) = r_1(0, 0) = 0$,

(2) $\|g(\bar{x}, u) - u\| \leq \bar{r}(\sqrt{\|\bar{x}\|^2 + \|u\|^2})$, где $\bar{r}(\lambda) = o(\lambda)$.

Следовательно, согласно вышеуказанной теореме существует отображение $u(\bar{x})$, определенное в некоторой окрестности $\bar{U} \subseteq U$ нуля, такое, что

$$g(\bar{x}, u(\bar{x})) = 0 \text{ при } \bar{x} \in \bar{U} \text{ и } \frac{u(\bar{x})}{\|\bar{x}\|} \rightarrow 0 \text{ при } \bar{x} \rightarrow 0.$$

Положим $z(\bar{x}) \stackrel{\text{def}}{=} (\bar{x} + u(\bar{x}), P(\bar{x} + u(\bar{x})))$. При малых $\bar{x}$ имеем $z(\bar{x}) \in K$.

Следовательно,

$$y(x_0 + \bar{y}) \stackrel{\text{def}}{=} y_0 + P(\bar{x} + u(\bar{x})) + r_2(\bar{x}, P(\bar{x} + u(\bar{x}))) \in a(x_0 + \bar{x}).$$

Очевидно, что

$$y'(x_0, \bar{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{y(x_0 + \lambda \bar{x}) - y(x_0)}{\lambda} = P(\bar{x}) \in a_{z_0}(\bar{x}).$$

Теорема доказана. $\square$

Теорема 4.5. Пусть $M \subseteq R^n$ – звездное тело и $x \in M^0$. Тогда конус $T_M(x)$ является шатром для M в точке x .

Доказательство. Не нарушая общности, предположим, что $x = 0$. Пусть $\bar{x} \in T_M(0)$ и $\bar{x} \neq 0$. Рассмотрим все векторы, образующие с вектором $\bar{x}$ углы, не превосходящие ε . Эти вектора заполняют в пространстве R^n конус, который мы обозначим через $K_\varepsilon(\bar{x})$. Пусть $Q \subseteq \text{int } T_M(0)$ – замкнутый конус такой, что для любого $\bar{x} \in T_M(0)$ имеет место $Q \cap K_\varepsilon(\bar{x}) \neq \{0\}$. Рассмотрим некоторую сферу с центром в нуле и обозначим через $\mathbf{R}$ пересечение этой сферы с конусом Q . В силу теоремы 4.1 $\text{int } T_M(0) = G_M(0)$. Поэтому, если $\bar{x} \in \mathbf{R}$, то существуют окрестность $\mathbf{V}_{\bar{x}} \subseteq \text{int } T_M(0)$ и вещественное число $\delta > 0$, такие, что $\lambda y \in M$

для всех $y \in \mathbf{V}_{\bar{x}}$ и $\lambda \in (0, \delta)$. Семейство окрестностей $\mathbf{V}_{x \in \mathbf{R}}$ образует открытое покрытие компактного множества $\mathbf{R}$. Выделим конечное подпокрытие $\{\mathbf{V}_{\bar{x}_i}\}_{i=1}^N$. Положим $\delta_0 = \min_{i \in [1:N]} \delta_i$. Тогда, если $\bar{x} \in Q \cap B_{\delta_0}(0)$, то $\bar{x} \in M$. Пусть теперь $\bar{x} \in T_M(0)$ – произвольная точка такая, что $\|\bar{x}\| < \delta_0$. Тогда конус $K_\varepsilon(\bar{x})$ имеет нетривиальное пересечение с $Q \cap B_{\delta_0}(0)$. Иными словами найдется точка $y \in Q \cap B_{\delta_0}(0)$ такая, что $y \in K_\varepsilon(\bar{x})$ и $y \neq 0$. Пусть $\hat{x}$ – ортогональная проекция точки $\bar{x}$ на луч, проходящий через y . Расстояние же между точками $\hat{x}$ и $\bar{x}$ не превосходит $\|\bar{x}\| \sin \varepsilon$, т.е. меньше $\|\bar{x}\| \varepsilon$. Но тогда

$$d(\bar{x}, M) \leq \|\bar{x}\| \varepsilon \text{ при } \bar{x} \in T_M(0) \cap B_{\delta_0}(0).$$

Это означает, что конус $T_M(0)$ является шатром к множеству M в точке 0. $\square$

Теорема 4.6. Пусть

- (1) $M_1 \subseteq R^n$ – выпуклое замкнутое множество, $M_2 \subseteq R^n$ – замкнутое звездное тело,
- (2) $M_1 \cap \text{int } M_2^0 \neq \emptyset$ и $x_0 \in M_1 \cap M_2^0$.

Тогда конус $T_{M_1}(x_0) \cap T_{M_2}(x_0)$ является шатром для множества $M_1 \cap M_2$ в точке x_0 .

Доказательство. Не нарушая общности, будем считать, что $x_0 = 0$. Рассмотрим многозначное отображение F из R^n в R^n

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} M_1 - u, \text{ если } u \in M_2, \quad F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset, \text{ если } u \notin M_2.$$

Очевидно, что $0 \in \text{int } F(M_2)$. Значит, существует окрестность $B_\delta(0)$ такая, что $B_\delta(0) \subseteq F(M_2)$. Тогда поскольку график многозначного отображения F есть звездное замкнутое множество, то согласно соотношению (3.4) существует такое число $C > 0$, что

$$d(u, F^{-1}(\nu)) \leq Cd(\nu, F(u)) \text{ для } u \in B_\delta(0), \nu \in M_2.$$

Положив в этом неравенстве $\nu = 0$, с учетом $F^{-1}(0) = M_1 \cap M_2$ получим

$$(4.6) \quad d(u, M_1 \cap M_2) \leq Cd(0, F(u)) = Cd(u, M_1) \quad u \in M_2 \cap B_\delta(0).$$

Пусть теперь $w \in B_{\delta/2}(0)$ произвольная точка. Тогда, если u — метрическая проекция точки w на множество M_2 , а v — метрическая проекция точки w на множество M_1 . Тогда $u \in M_2 \cap B_{\delta}(0)$ и из (4.6) получим, что

$$\begin{aligned} d(w, M_1 \cap M_2) &\leq \|w - u\| + d(u, M_1 \cap M_2) \leq \|w - u\| + Cd(u, M_1) \leq \\ &\leq d(w, M_2) + Cd(u, M_1) \leq d(w, M_2) + C(\|w - u\| + \|w - v\|). \end{aligned}$$

Значит,

$$(4.6) \quad d(w, M_1 \cap M_2) \leq (C + 1)(d(w, M_1) + d(w, M_2)).$$

Так как $0 \in \text{int}(M_1 - M_2^0)$, то аналогично теореме 1.4.16 [1] легко установить, что

$$(4.7) \quad T_{M_1 \cap M_2}(x_0) = T_{M_1}(x_0) \cap T_{M_2}(x_0).$$

С другой стороны, так как выпуклый конус $T_{M_1}(0)$ является липшицевым шатром к множеству M_1 в точке 0, то $d(\bar{x}, M_1) = o(\bar{x})$, если $\bar{x} \in T_{M_1}(0)$ и $\bar{x} \rightarrow 0$. Аналогично, в силу теоремы 4.5, имеем $d(\bar{x}, M_2) = o(\bar{x})$ при $\bar{x} \rightarrow 0$, $\bar{x} \in T_{M_2}(0)$. Отсюда и из соотношений (4.7) и (4.8) следует, что

$$d(\bar{x}, M_1 \cap M_2) = o(\bar{x}), \text{ если } \bar{x} \in T_{M_1}(0) \cap T_{M_2}(0) \text{ и } \bar{x} \rightarrow 0.$$

Значит, конус $T_{M_1}(0) \cap T_{M_2}(0)$ является шатром к множеству $M_1 \cap M_2$ в нуле.

□

5. О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Определение 5.1. [1] *Контингентный производной $Da(x_0, y_0)$ многозначного отображения $a: R^n \rightarrow 2^{R^m}$ в точке $(x_0, y_0) \in \text{graf}(a)$ называется отображение, график которого есть конус $T_{\text{graf}(a)}(x_0, y_0)$.*

Определение 5.2. [1] *Производной Кларка для отображения a в точке $(x_0, y_0) \in \text{graf}(a)$ называется отображение $Ca(x_0, y_0)$, график которого является конус $C_{\text{graf}(a)}(x_0, y_0)$.*

Определение 5.3. Многозначное отображение $a: R^n \rightarrow 2^{R^m}$ является дифференцируемым в точке x_0 , если найдется положительно однородное отображение $\Lambda: R^n \rightarrow 2^{R^m}$ такое, что

$$H(a(x_0) + \Lambda(\bar{x}), a(x_0 + \bar{x})) = o(\bar{x}).$$

Замечание 5.1. В отличие от дифференцируемости по Де Блази (см.[16]) здесь выпуклость значений отображения Λ не предполагается.

Определение 5.4. Положительно однородное отображение $\Lambda: R^n \rightarrow 2^{R^m}$ называется нижним дифференциалом для a в точке $(x_0, y_0) \in \text{graf}(a)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$y_0 + \Lambda(\bar{x}) \subseteq a(x_0 + \bar{x}) + \varepsilon \|\bar{x}\| B_1(0) \text{ для всех } \bar{x} \in B_\delta(0).$$

Определение 5.5. Положительно однородное отображение $\Lambda: R^n \rightarrow 2^{R^m}$ называется верхним дифференциалом для a в точке $(x_0, y_0) \in \text{graf}(a)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$a(x_0 + \bar{x}) \subseteq y_0 + \Lambda(\bar{x}) + \varepsilon \|\bar{x}\| B_1(0) \text{ для всех } \bar{x} \in B_\delta(0).$$

Предложение 5.1. Если $f: R^n \rightarrow R$ – выпуклая непрерывная функция, то она дифференцируема по Де Блази.

Доказательство. Имеем

$$f(x_0) + f'(x_0, \bar{x}) \leq f(x_0 + \bar{x}) \leq f(x_0) + f'(x_0, \bar{x}) + o(\bar{x}).$$

Значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$|f(x_0 + \bar{x}) - f(x_0) - f'(x_0, \bar{x})| \leq \varepsilon \|\bar{x}\| \text{ для } \bar{x} \in B_\delta(0).$$

Это и есть условие дифференцируемости по Де Блази отображения $a(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x)\}$ в точке x_0 . □

Предложение 5.2. Пусть $f(x)$ – липшицева функция в некоторой окрестности точки x_0 . Пусть $(x_0, f(x_0)) \in (\text{epi}(f))^0$. Тогда многозначное отображение $a(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{y/y \geq f(x)\}$ дифференцируемо в точке x_0 .

Доказательство немедленно следует из теорем 2.1 и 4.5.

Предложение 5.3. Пусть $a(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in R^n : g(x) + \mathbf{A}y = 0\}$, где $g: R^n \rightarrow R^m$ — дифференцируемое отображение, $\mathbf{A}: R^n \rightarrow R^m$ — есть такой линейный оператор, что $\text{Im} \mathbf{A} = R^m$. Тогда отображение $\Lambda_x(\bar{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{y} : g'(x)\bar{x} + \mathbf{A}\bar{y} = 0\}$ является дифференциалом для a в точке x .

Доказательство. Пусть $y_0 \in a(x_0)$, $\bar{y} \in \Lambda_{x_0}(\bar{x})$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} a(x_0 + \bar{x}) &= \{y \in R^m / g(x_0) + g'(x_0)\bar{x} + o(\bar{x}) + \mathbf{A}y = 0\} = \\ &= \{y \in R^m / \mathbf{A}(y - y_0 - \bar{y}) + o(\bar{x}) = 0\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$(5.1) \quad a(x_0 + \bar{x}) \subseteq y_0 + \Lambda_{x_0}(\bar{x}) + \mathbf{A}^{-1}(o(\bar{x})).$$

Так как $\text{Im} \mathbf{A} = R^m$, то известно (см. теорему 1.3.1 [1]), что обратное отображение $\mathbf{A}^{-1}$ является липшицевым отображением. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\mathbf{A}^{-1}(o(\bar{x})) \subseteq \mathbf{A}^{-1}(0) + \varepsilon \|\bar{x}\| B_1(0) \text{ для } \bar{x} \in B_\delta(0).$$

Отсюда и из (5.1) следует, что

$$a(x_0 + \bar{x}) \subseteq y_0 + \Lambda_{x_0}(\bar{x}) + \mathbf{A}^{-1}(0) + \varepsilon \|\bar{x}\| B_1(0).$$

Поскольку $\Lambda_{x_0}(\bar{x}) = \Lambda_{x_0}(\bar{x}) + \mathbf{A}^{-1}(0)$, то из (5.2) следует, что

$$a(x_0 + \bar{x}) \subseteq a(x_0) + \Lambda_{x_0}(\bar{x}) + \varepsilon \|\bar{x}\| B_1(0).$$

С другой стороны для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} a(x_0) + \Lambda_{x_0}(\bar{x}) &= -\mathbf{A}^{-1}g(x_0) - \mathbf{A}^{-1}g'(x_0)\bar{x} = -\mathbf{A}^{-1}(g(x_0) + g'(x_0)\bar{x}) = \\ &= -\mathbf{A}^{-1}(g(x_0 + \bar{x})) - \mathbf{A}^{-1}(o(\bar{x})) \subseteq a(x_0 + \bar{x}) + \mathbf{A}^{-1}(0) + \varepsilon \|\bar{x}\| B_1(0) \subseteq \\ &\subseteq a(x_0 + \bar{x}) + \varepsilon \|\bar{x}\| B_1(0) \text{ для } \bar{x} \in B_\delta(0). \end{aligned}$$

Отсюда и из соотношения (5.1) следует предложение 5.3. □

Теорема 5.1. Пусть $a: R^n \rightarrow 2^{R^m}$ – многозначное отображение со звездным и замкнутым графиком и $(x_0, y_0) \in \text{graf}(a^0)$, причем $x_0 \in \text{int dom}(a^0)$ и множество $a(x_0)$ ограничено. Тогда:

- (1) найдется $\gamma_0 > 0$ такое, что для любого $\gamma \geq \gamma_0$ отображение $\Lambda_1(\bar{x}) \stackrel{\text{def}}{=} Da(x_0, y_0)(\bar{x}) \cap \gamma \|\bar{x}\| B_1(0)$ является нижним дифференциалом для a в точке (x_0, y_0) ,
- (2) отображение $\Lambda_2(\bar{x}) \stackrel{\text{def}}{=} Da(x_0, y_0)(\bar{x})$ является верхним дифференциалом для a в точке (x_0, y_0) .

Доказательство. Пусть $F(\bar{x}) \stackrel{\text{def}}{=} Ca(x_0, y_0)(\bar{x}) \cap B_1(0)$. Из условий теоремы следует, что $\text{dom}(Ca(x_0, y_0)) = R^n$. Так как отображение $Ca(x_0, y_0)$ полунепрерывно снизу и $0 \in \text{int}(Ca(x_0, y_0)(0) - B_1(0))$, то найдется окрестность $B_\delta(0)$ такая, что

$$0 \in Ca(x_0, y_0)(\bar{x}) - B_1(0) \text{ для } \bar{x} \in B_\delta(0).$$

Значит, $F(\bar{x}) \neq \emptyset$ при $\bar{x} \in B_\delta(0)$. Рассмотрим многозначное отображение:

$$t: R^n \rightarrow 2^{R^m}, \quad t(\bar{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\delta} \|\bar{x}\| F\left(\delta \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}\right), \text{ если } \bar{x} \neq 0, \quad t(0) = 0.$$

Очевидно, что

$$t(\bar{x}) \subseteq \frac{1}{\delta} \|\bar{x}\| Da(x_0, y_0)\left(\delta \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}\right) \subseteq Da(x_0, y_0)(\bar{x}), \quad t(\lambda \bar{x}) = \lambda t(\bar{x}) \quad \forall \lambda \geq 0.$$

Отсюда следует, что для любого $\bar{x}$ существует

$$\bar{y} \in Da(x_0, y_0)(\bar{x}) \text{ такой, что } \|\bar{y}\| \leq \gamma_0 \|\bar{x}\|, \text{ где } \gamma_0 = \frac{1}{\delta}.$$

Поскольку, в силу теоремы 4.5, конус $T_{\text{graf}(a)}(x_0, y_0)$ является шатром для $\text{graf}(a)$ в точке (x_0, y_0) , то существует такое отображение, что

$$r(\bar{z}) \stackrel{\text{def}}{=} r(\bar{x}, \bar{y}) = (r_1(\bar{x}, \bar{y}), r_2(\bar{x}, \bar{y})) = o(\bar{z}),$$

определенное в окрестности нуля, что $z_0 + \bar{z} + r(\bar{z}) \in \text{graf}(a)$ для достаточно малых $\bar{z} \in T_{\text{graf}(a)}(x_0, y_0)$. Значит, $y_0 + \bar{y} + r_2(\bar{x}, \bar{y}) \in a(x_0 + \bar{x} + r_1(\bar{x}, \bar{y}))$ при малых $(\bar{x}, \bar{y}) \in T_{\text{graf}(a)}(x_0, y_0)$, таких, что $\|\bar{y}\| \leq \gamma \|\bar{x}\|$, $\gamma \geq \gamma_0$. Так как в силу теоремы 3.1. отображение a липшицево вблизи точки x_0 с некоторой константой

$L > 0$, то существует такое число $\delta_1 \leq \delta$, что при $\|\bar{x}\| \leq \delta_1$ имеет место включение

$$y_0 + \bar{y} \in a(x_0 + \bar{x}) + \varepsilon(1 + L)\sqrt{\|\bar{x}\|^2 + \gamma^2\|\bar{x}\|^2}B_1(0).$$

Отсюда

$$y_0 + Da(x_0, y_0)(\bar{x}) \bigcap \gamma\|\bar{x}\|B_1(0) \subseteq a(x_0 + \bar{x}) + \varepsilon(1 + L)\sqrt{1 + \gamma^2}\|\bar{x}\|B_1(0).$$

Теперь покажем, что Λ_2 является верхним дифференциалом для a . Действительно, поскольку a — отображение со звездным замкнутым графиком, то для каждого $y_0 \in a^0(x_0)$, $y \in a(x_0 + \bar{x})$ и для достаточно малых $\lambda \in (0, 1)$ имеет место включение $(1 - \lambda)y_0 + \lambda y \subseteq a(x_0 + \lambda\bar{x})$. Следовательно,

$$y - y_0 \in \frac{a(x_0 + \bar{x}) - y_0}{\lambda}.$$

Переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, получим $y - y_0 \in Da(x_0, y_0)(\bar{x})$. Следовательно,

$$a(x_0 + \bar{x}) \subseteq y_0 + Da(x_0, y_0)(\bar{x}).$$

□

6. ТЕОРЕМЫ О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ

Пусть X и Y — банаховы пространства, $a: X \rightarrow 2^Y$ — многозначное отображение со звездными значениями. Обозначим через a_0 многозначное отображение, которое каждому $x \in X$ сопоставляет множество $(a(x))^0$.

Предложение 6.1. Пусть $a: X \rightarrow 2^Y$ — непрерывное отображение со звездными замкнутыми значениями. Тогда отображение a_0 является полунепрерывным сверху.

Доказательство. Пусть $x_n \rightarrow x_0$, $y_n \in a_0(x_n)$, $y_n \rightarrow y_0$. Покажем, что $y_0 \in a_0(x_0)$.

Пусть $v_0 \in a(x_0)$. Так как a полунепрерывно снизу, то существует последовательность $v_n \in a(x_n)$ такая, что $v_n \rightarrow v_0$. С другой стороны, поскольку $y_n \in a_0(x_n)$, то

$$\lambda v_n + (1 - \lambda)y_n \in a(x_n), \quad \text{для любого } \lambda \in [0, 1].$$

Переходя здесь к пределу, когда $n \rightarrow \infty$, получим $\lambda v_0 + (1 - \lambda)y_0 \in a(x_0)$. Значит, $y_0 \in a_0(x_0)$. □

Из предложения 6.1 и классической теоремы Какутани (см. [1], теорема 6.4.13, стр. 336) следует

Следствие 6.1. Пусть $M \subset X$ – компактное выпуклое множество, $a: M \rightarrow 2^M$ – непрерывное отображение со звездными замкнутыми значениями. Тогда a имеет неподвижную точку.

Применяя Следствие 6.1, можно установить следующий результат, доказательство которого мы опускаем, ибо оно аналогично доказательству теоремы 5.1.1 [10].

Теорема 6.1. (Теорема о неявных функций для многозначных отображений). Пусть $a: R^n \times R^p \rightarrow 2^{R^n}$ – непрерывное отображение со звездными компактными значениями, такое, что

$$a(x, y) = \Lambda x + r(x, y),$$

где Λ – невырожденная $n \times n$ матрица и $\|r(x, y)\| \leq \bar{r}(\sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2})$, где $\bar{r}(\lambda) = o(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$. Тогда для достаточно малых y включение $0 \in a(x, y)$ разрешима относительно y , причем существует такое решение $x(y)$, что $x(y) = o(y)$ при $y \rightarrow 0$.

Предложение 6.2. Пусть $a: R^n \rightarrow 2^{R^m}$ – отображение такое, что $a(x) = \Lambda(x) + r(x)$, где $\Lambda: R^n \rightarrow R^m$ – линейный суръективный оператор, r – непрерывное многозначное отображение со звездными компактными значениями и $\|r(x)\| = o(\|x\|)$. Тогда подпространство $H \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{x} : \Lambda \bar{x} = 0\}$ является шатром для $M \stackrel{\text{def}}{=} \{x : 0 \in a(x)\}$ в нуле.

Доказательство. Рассмотрим включение

$$(6.1) \quad 0 \in A(\bar{x}, y) \stackrel{\text{def}}{=} a(\bar{x} + \Lambda^* y) - \Lambda \bar{x},$$

в которой неизвестными является y , а $\bar{x}$ – параметр. Нетрудно видеть, что

$$A(\bar{x}, y) = \Lambda \Lambda^* y + r(\bar{x} + \Lambda^* y).$$

Так как матрица $\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda\Lambda^*$ невырождена, то выполнены все условия теоремы 6.1, и поэтому согласно этой теореме для достаточно малых $\bar{x}$ существует такое решение $y(\bar{x})$ включения (6.1), что $y(\bar{x}) = o(\bar{x})$. Для малых $\bar{x} \in H$ имеем

$$0 \in A(\bar{x}, y(\bar{x})) = a(\bar{x} + \Lambda^*y(\bar{x})),$$

а значит $\bar{x} + \Lambda^*y(\bar{x}) \in M$, причем $\Lambda^*y(\bar{x}) = o(\bar{x})$. $\square$

Следствие 6.2. *Если $H \neq 0$, то для любой окрестности нуля существует точка $\hat{x} \neq 0$ в этой окрестности, такая, что $0 \in a(\hat{x})$.*

Доказательство. Поскольку подпространство H является шатром для M , то для любого ненулевого вектора $\bar{x} \in H$ имеем

$$x_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \lambda\bar{x} + r(\lambda\bar{x}) \in M.$$

Отсюда для малых $\lambda > 0$ имеем $x_\lambda \neq 0$ и $0 \in a(x_\lambda)$. $\square$

Рассмотрим теперь так называемую нелинейную экономическую модель Неймана. Пусть имеется m технологических способов производства, причем использование технологического способа интенсивностью $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ведет к производству вектора $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ товаров, удовлетворяющему условию $y \in a(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}\lambda + r_1(\lambda)$, где $(n \times m)$ – матрица, $r_1: R^n \rightarrow 2^{R^m}$ – многозначное отображение такое, что

$$(6.2) \quad \|r_1(\lambda)\| = o(\lambda).$$

Аналогично, при уровне технологии λ в системе расходуется вектор x товаров, удовлетворяющий условию $x \in b(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B}\lambda + r_2(\lambda)$, где отображение r_2 удовлетворяет условию (6.2). Тогда чистый выпуск системы задается векторами z , удовлетворяющих условию

$$z \in a(\lambda) - b(\lambda).$$

В экономической системе, действующий на технологическом уровне λ i –й продукт в выпуске z называется промежуточным, если $z_i = 0$. Один и тот же продукт i в экономических системах с одинаковой технологией может при разных

условиях быть отнесен к первичным ($z_1 < 0$), конечным ($z_i > 0$) или промежуточным продуктам.

Предложение 6.3. Пусть

- (1) многозначные отображения $a(x) = \mathbf{A}x + r_1(x)$, $b(x) = \mathbf{B}x + r_2(x)$ удовлетворяют всем требованиям предложения 6.2,
- (2) существует технологический уровень $\hat{\lambda} \geq 0$ такой, что $\mathbf{A}\hat{\lambda} = \mathbf{B}\hat{\lambda}$,
- (3) $\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A} - \mathbf{B}$ — суръективный оператор.

Тогда существует уровень $\bar{\lambda}$ технологии и выпуск $\bar{z}$ на этом уровне в котором все продукты промежуточные.

Доказательство. Рассмотрим следующее включение

$$0 \in A(\bar{x}, y) \stackrel{\text{def}}{=} a(\bar{x} + \Lambda^*y) - b(\bar{x} + \Lambda^*y) - \Lambda\bar{x}.$$

Заметим, что $A(\bar{x}, y) = \Lambda\Lambda^*y + r_1(\bar{x} + \Lambda^*y) - r_2(\bar{x} + \Lambda^*y)$. Применяя теорему 6.1 и, аналогично как в предложении 6.2 установим справедливость нашего утверждения. $\square$

Из теоремы Банаха о сжимающих отображениях следует существование неподвижной точки у сжимающего отображения полного метрического пространства M в себя. В [13] рассматривается вопрос существования неподвижных точек для так называемых k -сжатых многозначных отображений. В случае, когда M — компактное звездное множество банахова пространства, то предположение можно ослабить и считать отображение нерастягивающим.

Теорема 6.2. Пусть M — компактное звездное подмножество банахова пространства X , $a: M \rightarrow 2^M$ — нерастягивающее многозначное отображение с замкнутыми значениями. Тогда a имеет неподвижную точку.

Доказательство. Выберем точку x_0 из M^0 рассмотрим многозначные отображения

$$b_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{k}x_0 + \left(1 - \frac{1}{k}\right)a(x), \quad k > 1.$$

Так как множество M звездно, то $b_k(x) \subseteq M$. Имеем

$$H(b_k(x), b_k(y)) = (1 - \frac{1}{k})H(a(x), a(y)) \leq (1 - \frac{1}{k})\|x - y\|.$$

Отсюда следует, что все отображения b_k являются сжимающими. Значит, для каждого из них существует неподвижная точка $x_k \in M$, $x_k \in b_k(x_k)$. Не нарушая общности, можно считать, что последовательность x_k сходится к некоторому элементу $\bar{x}$ из M . Очевидно, что

$$(6.3) \quad d(x_k, a(x_k)) \leq \frac{1}{k}(\|x_0\| + \max_{y \in a(x_k)} \|y\|).$$

Поскольку $a(x_k) \subseteq M$ и M ограничено, то правая часть неравенства (6.3) сходится к нулю при $k \rightarrow \infty$, и поэтому $d(x_k, a(x_k)) \rightarrow 0$. Значит,

$$(6.4) \quad d(x_k, a(\bar{x})) \leq d(x_k, a(x_k)) + H(a(\bar{x}), a(x_k)).$$

Поскольку правая часть неравенства (6.4) стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, то

$$(6.5) \quad d(x_k, a(\bar{x})) \rightarrow 0.$$

Отсюда и из (6.5) следует, что $\bar{x} \in a(\bar{x})$. □

Abstract. The paper studies some topological properties of starlike bodies. It is proved that the boundary of a starlike body is a Lipschitz surface. A separability theorem for starlike bodies is proved. It is shown that under some additional assumptions the starlikeness property of the graph provides the local Lipschitz property of the set-valued mapping itself. It is shown that F. Clark's contingent and tangential cones are Boltyansky tents. On the base of these results, some lower and upper differentials for set-valued mappings with starlike graphs are constructed. Some theorems on fixed points of set-valued mappings with starlike values are proved.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ж. П. Обен, И. Экланд, Прикладной Нелинейный Анализ, Мир, М. (1988).
- [2] С. М. Асеев, "Квазилинейные операторы и их применение в теории многозначных отображений", Труды Мат. института АН СССР, **167**, 25 – 52 (1985).
- [3] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, Оптимальное Управление, Наука, М. (1979).
- [4] В. Г. Болтянский, "Метод шатров в теории экстремальных задач", Успехи мат. наук, **30:3**, 3 – 55 (1975).

- [5] В. Г. Болтянский, Оптимальное Управление Дискретными Системами, Наука, М. (1973).
- [6] Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, Б. Б. Обуховский, “О новых результатах в теории многозначных отображений ||. Анализ и приложения”, Итоги науки и техники, серия мат. анализ, ВИНТИ, **29**107 – 159 (1991).
- [7] Ф. Кларк, Оптимизация и Негладкий Анализ, Мир, М. (1988).
- [8] Е. С. Половинкин, “Необходимые условия оптимальности с дифференциальным включением”, Тр. МИ РАН, **211**, 387 – 400 (1995).
- [9] Е. С. Половинкин, М. В. Балашов, Элементы Выпуклого и Сильно Выпуклого Анализа, физматлит, М. (2004).
- [10] Б. Н. Пшеничный, Выпуклый Анализ и Экстремальные Задачи, Наука, М. (1980).
- [11] В. В. Остапенко, “К вопросу о непрерывности многозначных отображений”, Укр. мат. журнал, **47**, no. 11, 1919 – 1925 (1995).
- [12] К. Лейхвейс, Выпуклые Множества, Наука, М. (1985).
- [13] П. В. Семенов, “О неподвижных точках многозначных сжатий”, Функ. анализ и его прил., **36**, no. 2, 89 – 92 (2002).
- [14] А. Р. Хачатрян, “О представлении липшицевых многозначных отображений”, Изв. НАН Армении, серия математика, **39**, no. 3, 64 – 73 (2004).
- [15] А. Р. Хачатрян, “Непрерывные и липшицевые многозначные отображения с ограничениями типа равенств и неравенств”, Изв. НАН Армении, серия математика, **39**, no. 6, 39 – 55 (2004).
- [16] F. S. De Blasi, “On the differentiability of multifunctions”, Pasific journal of matematics, **66**, no. 1, 67 – 81 (1976).
- [17] H. T. Banks, H. T. Jacobs, “Differential calcul for multifunction”, J. math. anal. end appl., **29**, no. 2, 246 – 272 (1970).
- [18] D. Dentcheva, “Differentiable selections of set-valued mappings with applications in stoshastic programming”, Workshop “Stochastic Optimization”, Berlin, Germany, 1 – 27 (1995).
- [19] E. Michael, “Continuous selections”, Ann. Math, **63**, 361 – 381 (1956).
- [20] R. T. Rockafellar, J. B. Roger, Variational Analisis, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1998).

Поступила 29 апреля 2011