Известия НАН Армении. Математика, том 47, н. 1, 2012, стр. 31-50.

СРАВНЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ И ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧНОСТЬ

В. Н. МАРГАРЯН

Российско-Армянский (Славянский) университет
E-mail: *vachagan.margaryan@yahoo.com*

Аннотация. Исследуется почти гипоэллиптичность многочленов путем сравнений.

MSC2010 number: 12E10, 26C05

Ключевые слова: Почти гипоэллиптичность; гипоэллиптичность; сравнение многочленов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_0^n$ – множество n-мерных мультииндексов, т.е. точек $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbb{N}_0$, $j = 0, ..., n$, $\mathbb{R}^n$ – n-мерное вещественное евклидово пространство точек $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$, а $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \times i\mathbb{R}^n$ $(i^2 = -1)$ n–мерное комплексное пространство.

Для $\xi \in \mathbb{R}^n$ $(\xi \in \mathbb{C}^n)$ и $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ обозначим

$$|\xi| = (|\xi_1|^2 + ... + |\xi_n|^2)^{1/2}, \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} ... \xi_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$$

и

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}, \quad \text{где} \quad D_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \quad j = 1, ..., n.$$

Пусть

$$P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n) = \sum_\alpha \gamma_\alpha \xi^\alpha, \quad \gamma_\alpha \in C, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n$$

многочлен, где сумма распространяется по конечному набору

$$(P) = \{\alpha, \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \gamma_\alpha \neq 0\}.$$

Для многочлена P введем следующие обозначения:

$\Re(P)$ (характеристический многогранник многочлена P) – минимальный выпуклый многогранник содержащий множество $(P) \cup \{0\}$, $\Gamma(P)$ – множество точек лежащих на главных гранях $\Re(P)$ (т.е. на тех гранях $\Re(P)$, для которых существуют индекс $j\,:\,1 \le j \le n$ и внешняя (относительно $\Re(P)$) нормаль $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ этой грани, для которых $\lambda_j > 0$). Далее пусть

$$ord\, P \equiv \max_{\alpha \in (P)} |\alpha|, \quad ord_j P \equiv \max_{\alpha \in (P)} \alpha_j, \quad j = 1, \dots, n,$$
$$D(P, n) \equiv \{\zeta \in \mathbb{C}^n : P(\zeta) = 0\}, \quad d_P(\xi, n) \equiv \inf_{\zeta \in D(P,n)} |\xi - \zeta|, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$
$$\rho_P(n) \equiv \liminf_{t \to \infty} \inf_{|\zeta| = t} d_P(\xi, n).$$

Характеристический многогранник $\Re(P)$ многочлена P называется полным (правильным, вполне правильным) в $\mathbb{R}^n$, если $\Re(P)$ имеет вершину на каждой оси координат, отличную от начала координат, (компоненты внешних (относительно $\Re(P)$) нормалей $(n-1)$-мерных не координатных граней не отрицательны, положительны).

Определение 1.1. *Будем говорить, что многочлен P от n-переменных существенно зависит только от переменных ξ_j: $j \le k$ $(k \le n,\ k \in \mathbb{N}_0)$, если $ord_j P \ge 1 \quad j \le k$ и $ord_j P = 0$, $j = k+1, ..., n$, т.е. когда*

$$P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_k, 0, \dots, 0), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \textit{и} \quad \prod_{j=1}^{k} D_j P \ne 0.$$

Нетрудно заметить, что если многочлен P от n-переменных существенно зависит только от переменных $\xi_j : 1 \le j \le k \quad (k \le n)$, то

$$D(P, n) = D(P, k) \times \mathbb{C}^{n-k}, \tag{1.1}$$
$$d_P(\xi, n) = d_P(\xi', n), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \text{где} \quad \xi' = (\xi_1, \dots, \xi_k),$$
$$\rho_P(n) = \min\left\{\rho_P(k),\ \inf_{\xi' \in \mathbb{R}^k} d_P(\xi, n)\right\} \quad \text{при} \quad k < n.$$

Через $L(n)$ обозначим множество многочленов P рассматриваемых как многочлен от n-переменных, а через $L(n,k)$, $0 \le k \le n$ – множество многочленов $P \in L(n)$ существенно зависящих только от переменных ξ_j; $j \le k$.

Определение 1.2. *(см. [1], определение 11.1.2 и теорему 11.1.3). Многочлен $P \in L(n)$ называется гипоэллиптическим в $\mathbb{R}^n$, если для любого $0 \neq \alpha \in \mathbb{N}_0^n$*

$$P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi) \equiv D^\alpha P(\xi)/P(\xi) \to 0 \quad \textit{при} \quad |\xi| \to \infty, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Из определения 1.2 следует, что если многочлен $P \in L(n)$ гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^n$, то $P \in L(n,n)$.

Определение 1.3. *(см. [2]). Многочлен $P \in L(n)$ называется почти гипоэллиптическим в $\mathbb{R}^n$, если существует постоянная $c > 0$ для которого*

$$\sum_{\alpha \in N_0^n} |P^{(\alpha)}(\xi)| \leq c(|P(\xi)| + 1) \quad \textit{для любого} \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Из определения 1.3 следует, что если многочлен $P \in L(n)$ почти гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^n$, то оно, рассматриваемый как многочлен из $L(n+k)$, почти гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^{n+k}$, $k = 0, 1, ...$

Пример 1.1. *Многочлен $\xi_1^2 + \xi_2^2$ гипоэллптичен и почти гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^2$. Однако этот многочлен рассматриваемый как многочлен от $n \geq 3$ переменных не является гипоэллиптическим в $\mathbb{R}^n$, но является почти гипоэллиптическим в $\mathbb{R}^n$.*

В дальнейшем нам понадобятся следующие известные (см. [1], лемма 11.1.4, лемма 10.4.1 и теорема 10.4.3) результаты.
Для любых $n, m \in N$ включение $P \in L(n)$ и неравенство $ordP \leq m$ выполняются. А если $P(\xi) \neq 0$, то существуют постоянные $\chi_j = \chi_j(n,m) > 0$, $(j = 1,2,3,4)$, для которых

$$\chi_1 \leq d_P(\xi, n) \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \left| P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi) \right|^{1/|\alpha|} \leq \chi_2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.2}$$

$$\chi_3 \widetilde{P}(\xi, t) \leq \sup_{|\eta| \leq t} |P(\xi + \eta)| \leq \chi_4 \widetilde{P}(\xi, t), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{1.3}$$

если для многочлена $Q \in L(n)$ с некоторой постоянной $\chi > 0$ выполняется неравенство

$$\widetilde{Q}(\xi, 1) \leq \chi \widetilde{P}(\xi, 1), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.4}$$

то существует постоянная $\chi_5 = \chi_5(n, m, \chi) > 0$ для которой

$$\widetilde{Q}(\xi, t) \leq \chi_5 \widetilde{P}(\xi, t), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 1, \tag{1.5}$$

где для данного многочлена $S \in L(n)$

$$\widetilde{S}(\xi, t) \equiv \left[\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \left| S^{(\alpha)}(\xi) \right|^2 t^{2|\alpha|} \right]^{1/2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0.$$

Нетрудно заметить, что если для многочленов $P, Q \in L(n)$ выполняется оценка (1.4), то $ord_j Q = 0$ при $ord_j P = 0$, $1 \leq j \leq n$.

Из оценки (1.2) и определения $\rho_P(n)$, непосредственно следует, что

a1. многочлен $P \in L(n)$ гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда $\rho_P(n) = +\infty$.

a2. если для многочлена $P \in L(n) \quad \rho_P(n) > 0$, то многочлен P почти гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^n$. При этом, если $P \in L(n, k) \quad k < n$, то (см. (1.1)) существует постоянная $c > 0$ для которой

$$|P(\xi)| \geq c \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

a3. если для почти гипоэллиптического в $\mathbb{R}^n$ многочлена $P \in L(n)$ с некоторыми постоянными $C, M > 0$

$$|P(\xi)| \geq c, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad \text{с} \quad |\xi| \geq M, \tag{1.6}$$

то $\rho_P(n) > 0$.

Заметим, что если для многочлена $P \in L(n) \setminus L(n, n)$ выполняется оценка (1.6), то

$$|P(\xi)| \geq c \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Замечание 1.1. *Несмотря на то, что из почти гипоэллиптичности в $\mathbb{R}^n$ многочлена $P \in L(n)$ следует его почти гипоэллиптичность в $\mathbb{R}^{n+k}$, если его рассмотреть как многочлен от $(n+k)$-переменного $k = 0, 1, ...$, однако, при $\rho_P(n) > 0$ $\rho_P(n+k)$ может обращаться в нуль при $k = 1, 2, ...$ (см. а1).*

Пример 1.2. *Многочлен* $P = \xi_1^2 + \xi_2^2 - 1$ *почти гипоэллиптичен в* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ *и (см. a1)* $\rho_P(2) = +\infty$, *т.к. многочлен* P *гипоэллиптичен в* $\mathbb{R}^2$. *Однако,* $\rho_P(n) = 0$ *при* $n \geq 3$.

Определение 1.4. *(см. определения 10.3.4 и 10.4.4 из [1] и [3]). Многочлен* $P \in L(n)$ *сильнее (доминирует, мощнее) многочлена* $Q \in L(n)$ *и записывают* $Q \prec P$ $(Q \prec\prec P; Q < P)$, *если с некоторой постоянной* $\chi > 0$ *выполняется оценка (1.4)* $\Big(\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \widetilde{Q}(\xi, t)/\widetilde{P}(\xi, t) \to 0$ *при* $t \to \infty$; *с некоторой постоянной* $c > 0 \quad |Q(\xi)| \leq (|P(s)| + 1),$ *для любого* $\xi \in \mathbb{R}^n\Big)$.

Из определения 1.4 и оценки (1.3) следует, что если $Q \prec\prec P \quad (Q < P)$, то $Q \prec P$, если $Q \prec P$, то $D_j Q \prec\prec P$, $j = 1, ..., n$.

Замечание 1.2. *Если* $Q < P, Q \prec P, Q \prec\prec P \quad P, Q \in L(n)$ *то* $ord_j Q = 0$ *при* $ord_j P = 0 \quad 1 \leq j \leq n$.

В работе [4] В. П. Михайловым и в [5] в других терминах, Л. Р. Волевичем, С. Г. Гиндикином введено понятие регулярного многочлена и доказано, что многочлен $P \in L(n)$ регулярен тогда и только тогда, когда с некоторой постоянной $c > 0$

$$|\xi_1|^{\nu_1} \ldots |\xi_n|^{\nu_n} \leq c(|P(\xi)| + 1), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \text{где} \quad \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \Re(P).$$

Известно (см. [3] – [5]), что

- b1. если многочлен $P \in L(n)$ регулярен, то $Q < P$ для многочлена $Q \in L(n)$ тогда и только тогда, когда $\Re(Q) \subset \Re(P)$.
- b2. если характеристический многогранник $\Re(P)$ регулярного многочлена $P \in L(n)$ полный, то $P(\xi) \to \infty$ при $|\xi| \to \infty, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$,
- b3. если характеристический многогранник $\Re(P)$ регулярного многочлена $P \in L(n)$ полный, $Q \in L(n)$ то $Q(\xi)/P(\xi) \to 0$ при $Q(\xi) \to \infty$ тогда и только тогда, когда $\Re(Q) \subset \Re(P) \setminus \Gamma(P)$,
- b4. если характеристический многогранник $\Re(P)$ регулярного многочлена $P \in L(n)$ правильный, то $Q \prec P$ для многочлена $Q \in L(n)$ тогда и только тогда, когда $\Re(Q) \subset \Re(P)$

b5. если характеристический многогранник $\Re(P)$ регулярного многочлена $P \in L(n)$ вполне правильный, то $Q \prec\prec P$ для многочлена $Q \in L(n)$ тогда и только тогда, когда $\Re(Q) \subset \Re(P) \setminus \Gamma(P)$.

Заметим, что если P многочлен из пунктов b2 - b4, то $P \in L(n, n)$, если из пункта b5, то P гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^n$.

Из теоремы 11.1.9, определения гипоэллиптичности и следствия 10.4.8 работы [1] следует, что

(i) если $Q \prec P \prec Q, \quad Q \in L(n)$ и многочлен P гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^n$, то многочлен Q также гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^n$,

(ii) если $P, Q \in L(n)$ гипоэллиптичны в $\mathbb{R}^n$, то $P \cdot Q$ также гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^n$,

(iii) если $P \in L(n)$ гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^n$ и $Q \prec\prec P \quad (Q \in L(n))$, то для любого $a \in C$ многочлен $P + aQ$ также гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^n$.

На примерах покажем, что в общем случае, эти утверждения перестают быть справедливыми для почти гипоэллиптических в $\mathbb{R}^n$ многочленов.

Пример 1.3. *Пусть $n = 2$, $P(\xi) = \xi_1^2 + \xi_1^2 \cdot \xi_2^2 + \xi_2^4$, $Q(\xi) = \xi_1^2 \cdot \xi_2^2 + \xi_2^4$. Прямой проверкой можно убедиться, что многочлен P почти гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^2$, Q не является почти гипоэллиптическим в $\mathbb{R}^2$ хотя с некоторыми постоянными $c_1, c_2 > 0$*

$$c_1^{-1}(|P(\xi)| + 1) \le \widetilde{P}(\xi, 1) \le c_1(|P(\xi)| + 1), \quad \xi \in \mathbb{R}^2,$$
$$c_2^{-1}(|P(\xi)| + 1) \le \widetilde{Q}(\xi, 1) \le c_2(|P(\xi)| + 1), \quad \xi \in \mathbb{R}^2,$$

т.е. $Q \prec P \prec Q$.

Пример 1.4. *Пусть $n = 2$, $P(\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2$, $Q(\xi) = \xi_1 - \xi_2$. Нетрудно проверить, что оба многочлена почти гипоэллиптичны в $\mathbb{R}^2$. Однако при $\xi_1 = \xi_2 \to \infty$*

$$|D_1(P \cdot Q)(\xi)|/[|(P \cdot Q)(\xi)| + 1] \to \infty,$$

т.е. многочлен $P \cdot Q$ не является почти гипоэллиптическим в $\mathbb{R}^2$.

Пример 1.5. *Пусть* $n = 2$, $P(\xi) = \xi_1^2 + \xi_1^2 \cdot \xi_2^2 + \xi_2^2$, $Q(\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2$. *Так как при всех* $\xi \in \mathbb{R}^2$, $|(D_1^2 + D_2^2)P(\xi)| \geq 2|Q(\xi)|$, *то* $Q \prec\prec P$. *С другой стороны непосредственной проверкой можно убедиться, что многочлен* $P - Q$ *не является почти гипоэллиптическим в* $\mathbb{R}^2$ *хотя многочлен* P *почти гипоэллиптичен в* $\mathbb{R}^2$.

Цель настоящей работы — исследовать условия, при которых утверждения (i), (ii) и (iii) останутся в силе, если заменить гипоэллиптичность на почти гипоэллиптичность.

2. Почти гипоэллиптические многочлены с комплексными коэффициентами

Теорема 2.1. *Пусть для многочленов* $P, Q \in L(n)$ *с некоторой постоянной* $c > 0$

$$c^{-1}\widetilde{Q}(\xi, 1) \leq \widetilde{P}(\xi, 1) \leq c\,\widetilde{Q}(\xi, 1), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

т.е. $Q \prec P \prec Q$. *Тогда существует число* $\rho_0 = \rho_0(c, \chi_2, \chi_5) > 0$ (χ_2, χ_5 *– постоянные из оценок (1.2) и (1.5)), такие, что если* $\rho_P(n) > \rho_0$, *то многочлен* Q *почти гипоэллиптичен в* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть $\rho_1 \in (0, \rho_P)$ любое фиксированное число. Тогда из оценки (1.2) имеем, что существует постоянная $M(\rho_1) > 0$ для которого

$$d_P(\xi, n) \geq \rho_1/2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad |\xi| \geq M(\rho_1), \tag{2.2}$$

и

$$\left|P^{(\alpha)}(\xi)\right| d_P^{(\alpha)}(\xi, n) \leq \chi_2^{|\alpha|}|P(\xi)|, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad |\xi| \geq M(\rho_1), \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n. \tag{2.3}$$

Из условия $Q \prec P$ теоремы, в силу оценок (2.2), (1.5) и (2.3) с некоторой постоянной $c_1 = c_1(\chi_2, \chi_5) > 0$ при $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| \geq M(\rho_1)$ когда $\rho_1 \geq 2$ имеем, что

$$
\begin{aligned}
(2.4) \qquad \widetilde{Q}(\xi, \rho_1/2) &\leq \widetilde{Q}(\xi, d_P(\xi, n)) \leq \chi_5 \widetilde{P}(\xi, d_P(\xi, n)) \\
&= \chi_5 \left[\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \left| P^{(\alpha)}(\xi) \right|^2 d_P^{2|\alpha|}(\xi, n) \right]^{1/2} \\
&\leq \chi_5 |P(\xi)| \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ |\alpha| \leq ord\, P} \chi_2^{2|\alpha|} \right)^{1/2} \leq c_1 |P(\xi)|.
\end{aligned}
$$

Так как, в силу оценки (2.1),

$$
|P(\xi)| \leq c \cdot \tilde{Q}(\xi, 1) \quad \xi \in \mathbb{R}^n,
$$

то из оценки (2.4) и отсюда при $\rho_1 \geq 2$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| \geq M(\rho_1)$ имеем, что

$$
\begin{aligned}
|Q(\xi)|^2 + \left(\frac{\rho_1}{2}\right)^2 \sum_{\alpha \neq 0} \left| Q^{(\alpha)}(\xi) \right|^2 &\leq \left(\widetilde{Q}(\xi, \rho_1/2) \right)^2 \leq c_1^2 |P(\xi)|^2 \\
&\leq c_1^2 c^2 \left(\widetilde{Q}(\xi, 1) \right)^2 \leq c_1^2 c^2 \left(|Q(\xi)|^2 + \sum_{\alpha \neq 0} \left| Q^{(\alpha)}(\xi) \right|^2 \right).
\end{aligned}
$$

Пусть $\rho_0 \equiv max\{2, 2\sqrt{2} \cdot c_1 \cdot c\}$ и $\rho_P > \rho_0$. Тогда при $\rho_1 \in (\rho_0, \rho_P)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| \geq M(\rho_1)$

$$
(2.5) \qquad |Q(\xi)|^2 + c_1^2 c^2 \sum_{\alpha \neq 0} \left| Q^{(\alpha)}(\xi) \right|^2 \leq c_1^2 c^2 |Q(\xi)|^2.
$$

Откуда, непосредственно, следует утверждение теоремы 2.1. □

Следствие 2.1. *При условиях теоремы 2.1* $\rho_Q(n) > 0$.

Доказательство. Непосредственно, следует из оценки (2.5) и в силу оценки (1.4) для многочлена Q. □

Теорема 2.2. *Пусть* $P, Q \in L(n)$. *Если* $Q < P < Q$ *и многочлен* P *почти гипоэллиптичен в* $\mathbb{R}^n$, *то многочлен* Q *также почти гипоэллиптичен в* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Из оценки (1.3), в силу условия $Q < P$ и почти гипоэллиптичности многочлена P в $\mathbb{R}^n$, с некоторыми постоянными $c_j > 0$, $(j = 1, 2, 3, 4)$

имеем, что

$$\begin{aligned}\widetilde{Q}(\xi,1) &\le c_1 \sup_{|\eta|\le 1} |Q(\xi+\eta)| \le c_2 \sup_{|\eta|\le 1} (|P(\xi+\eta)|+1) \le c_3 \widetilde{P}(\xi,1) \\ &\le c_4(|P(\xi)|+1), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Отсюда, в силу условия $P < Q$, с некоторой постоянной $c_5 > 0$ имеем, что

$$\widetilde{Q}(\xi,1) \le c_5(|Q(\xi)|+1), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

т.е. многочлен Q почти гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^n$. Теорема доказана. □

Заметим, что в теореме 2.2 не требовалось условие $\rho_P(n) > 0$.

Пример 2.1. *Пусть $n = 2$ $P(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^2$, $Q_a(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^2 + (\xi_1 - \xi_2) + a$, $a \in R$. Очевидно, оба многочлена почти гипоэллиптичны в $\mathbb{R}^2$ и $Q \prec P \prec Q$. Однако $\rho_P(2) = 0$, $\rho_{Q_a}(2) = 0$ при $a \le \frac{1}{4}$ и $\rho_{Q_a}(2) > 0$ при $a > \frac{1}{4}$.*

Теорема 2.3. *Если для многочленов $P, Q \in L(n)$ $\rho_P(n) > 0$, $\rho_Q(n) > 0$, то $\rho_{P\cdot Q}(n) > 0$ т.е. (см. пункт а2) многочлен $P \cdot Q$ почти гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Так как, очевидно, $D(P\cdot Q, n) = D(P,n) \cup D(Q,n)$, то

$$d_{P\cdot Q}(\xi,n) = \min\{d_P(\xi,n), d_Q(\xi,n)\} \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Откуда $\rho_{P\cdot Q}(n) = \min\{\rho_P(n), \rho_Q(n)\} > 0$. Следовательно, в силу пункта а2, многочлен $P \cdot Q$ почти гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^n$. □

Следствие 2.2. *Пусть $1 \le k < n$, $1 < l \le n$, $P \in L(n,k)$, $Q \in L(n)$, $ord_j Q = 0$, $j = 1,...,l-1$, $ord_j Q \ge 1$, $j = l,...,n$. Если многочлен P почти гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^k$, Q почти гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^{n-l}$ и с некоторой постоянной $c > 0$*

$$\begin{aligned}&|P(\xi)| \ge c, \quad \xi' = (\xi_1,\dots,\xi_k) \in \mathbb{R}^k, \\ &|Q(\xi)| \ge c, \quad \xi'' = (\xi_l,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^{n-l}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

то многочлен $P \cdot Q$ почти гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Из оценки (2.6) в силу пункта а3 имеем, что $\rho_P(k) > 0$, $\rho_Q(n-l) > 0$. Из оценок (2.6), (1.3) и почти гипоэллиптичности в $\mathbb{R}^k$ многочлена P и в

$\mathbb{R}^{n-l}$ многочлена Q имеем, что с некоторой постоянной $c_1 > 0$

$$d_P(\xi', k) \geq c_1, \quad \xi' \in \mathbb{R}^k \quad \text{и} \quad d_Q(\xi'', n-l) \geq c_1, \quad \xi'' \in \mathbb{R}^{n-l}.$$

Следовательно, в силу (1.1)

$$\rho_P(n) \geq \min\{c_1, \rho_P(k)\} > 0 \quad \text{и} \quad \rho_Q(n) \geq \min\{c_1, \rho_Q(n-l)\} > 0.$$

Отсюда, в силу теоремы 2.3 получаем, что многочлен $P \cdot Q$ почти гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^n$. □

На примере покажем, что, при условиях следствия 2.2, выполнение оценки (2.6) существенно для почти гипоэллиптичности многочлена $P \cdot Q$.

Пример 2.2. *Пусть* $P(\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + 1$, $Q(\xi) = \xi_2^2 + \xi_3^2 - 1$, $\xi \in \mathbb{R}^3$. *Нетрудно заметить, что многочлены* P, Q *почти гипоэллиптичны в* $\mathbb{R}^2$. *Однако* $P \cdot Q$ *не является почти гипоэллиптическим в* $\mathbb{R}^3$.

Теорема 2.4. *Многочлен* $P \in L(n)$ *почти гипоэллиптичен в* $\mathbb{R}^n$ *тогда и только тогда, когда почти гипоэллиптичен в* $\mathbb{R}^n$ *многочлен* $|P|^2 = P \cdot \overline{P}$.

Доказательство. Пусть многочлен $P \in L(n)$ почти гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^n$. Тогда в силу конечности множества $\{\alpha;\ \alpha \in N_0^n, \quad D^\alpha |P|^2 \neq 0\}$, оценки (1.3) и формулы Тейлора с некоторыми постоянными $c_j > 0$, $j = 1, ..., 4$ имеем, что

$$\begin{aligned}
\sum_\alpha D^\alpha |P|^2(\xi) &\leq c_1 \left(\sum_\alpha (D^\alpha |P|^2(\xi))^2 \right)^{1/2} \\
&\leq c_2 \sup_{|\eta| \leq 1} |P|^2(\xi + \eta) = c_2 \left(\sup_{|\eta| \leq 1} |P(\xi + \eta)| \right)^2 \\
&\leq c_2 \left(\sup_{|\eta| \leq 1} \left| \sum_\beta \frac{P^\beta(\xi) \eta^\beta}{\alpha!} \right| \right)^2 \leq c_2 \left(\sum_\beta \left| \frac{P^\beta(\xi)}{\beta!} \right| \right)^2 \\
&\leq c_3 (|P(\xi)| + 1)^2 \leq c_4 (|P(\xi)|^2 + 1), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что многочлен $|P|^2$ почти гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^n$.

Обратно, пусть для многочлена $P \in L(n)$ многочлен $|P|^2$ почти гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^n$, т.е. с некоторой постоянной $c_5 > 0$

$$\sum_{\alpha} (D^{\alpha}|P|^2(\xi)) \leq c_5(|P|^2(\xi) + 1) \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Так как, в силу конечности множества $\{\alpha;\ \alpha \in N_0^n, \quad P^{(\alpha)} \neq 0\}$, с некоторой постоянной $c_6 > 0$

$$\sum_{\alpha} \left| P^{(\alpha)}(\xi) \right| \leq c_6 \left(\sum_{\alpha} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 \right)^{1/2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

то отсюда, в силу оценки (1.3) и формулы Тейлора, с некоторой постоянной $c_7 > 0$ имеем, что

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 &\leq c_7 \left(\sup_{|\eta| \leq 1} |P(\alpha + \eta)| \right)^2 = c_7 \sup_{|\eta| \leq 1} |P|^2(\alpha + \eta) \\ &= c_7 \sup_{|\eta| \leq 1} \left| \sum_{\beta} \frac{D^{\beta}|P|^2(\xi)\eta^{\beta}}{\beta!} \right| \leq c_7 \sum_{\beta} \left| \frac{D^{\beta}|P|^2(\xi)}{\beta!} \right| \\ &\leq c_7 c_5 (|P|^2(\xi) + 1) \leq c_7 c_5 (|P(\xi)| + 1)^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

Откуда, непосредственно, следует почти гипоэллиптичность многочлена P в $\mathbb{R}^n$. Теорема доказана. □

Заметим, что в отличии от теоремы 2.3 здесь не требовалось условие $\rho_P(n) > 0$. Аналогично теореме 2.4 можно доказать следующую теорему.

Теорема 2.5. *Многочлен $P \in L(n)$ почти гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда почти гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^n$ многочлен P^2.*

Теорема 2.6. *Пусть $P \in L(n)$ почти гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^n$. Если для многочлена $Q \in L(n)$*

$$|Q(\xi)| / \big[|P(\xi)| + 1\big] \to \infty \quad \textit{при} \quad Q(\xi) \to \infty, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{2.7}$$

то для любого $0 \neq a \in C$ многочлен $P + aQ$ также почти гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Для любого $t > 0$ через $A(Q,t)$ обозначим множество $\xi \in \mathbb{R}^n$ для которых $|Q(\xi)| \geq t$. Пусть $0 \neq a \in C$ любое фиксированное число. Из соотношения (2.7) следует, что существует число $t_a > 0$ для которого

$$|Q(\xi)|/(|P(\xi)|+1) \leq \frac{|a|}{2}, \quad \xi \in A(Q,t_a),$$

Для любого $\xi \in A(Q,t_a)$ имеем

$$1 + |P(\xi) + aQ(\xi) \geq 1 + |P(\xi)| - |a||Q(\xi)| \geq \frac{1}{2}(1 + |P(\xi)|).$$

Так как при $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus A(Q,t_a)$,

$$|P(\xi) + aQ(\xi)| \geq |P(\xi)| - |a|t_a,$$

то отсюда получаем, что $P < P + aQ$.

Так как из соотношения (2.7) следует, что с некоторой постоянной $c > 0$

$$\begin{aligned} |P(\xi) + aQ(\xi)| &\leq |P(\xi) + |a||Q(\xi)| \leq |P(\xi)| + |a|c(|P(\xi)| + 1) \\ &\leq (|a|c + 1)(|P(\xi)| + 1), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

Следовательно, при выполнении соотношения (2.7) для любого $a \in C$ $P < P + aQ < P$. Отсюда по теореме 2.2, в силу почти гипоэллиптичности в $\mathbb{R}^n$ многочлена P получаем утверждение теоремы. □

3. Почти гипоэллиптические многочлены с вещественными коэффициентами

Определение 3.1. *Скажем, что многочлен $P \in L(n)$ устойчив в $\mathbb{R}^n$, если для любого линейного обратимого отображения $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ многочлен $Q(\eta) \equiv \equiv P(T\eta)$ принадлежит $L(n,n)$.*

Нетрудно проверить, что гипоэллиптические в $\mathbb{R}^n$ многочлены из $L(n)$ устойчивы в $\mathbb{R}^n$. Известно (см. [6]), что

c1. если почти гипоэллиптический в $\mathbb{R}^n$ многочлен $P \in L(n)$ устойчив в $\mathbb{R}^n$, то

$$P \in I_n \equiv \{Q \in L(n) : Q(\xi) \to \infty \ \text{ при } \ |\xi| \to \infty\} \subset L(n,n).$$

c2. если многочлен $P \in L(n)$ почти гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^n$, то для любого линейного обратимого отображения $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ многочлен $Q(\eta) \equiv P(T\eta)$ также почти гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^n$,

c3. если многочлен $P \in L(n)$ почти гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^n$, то многочлены $Q_j(\xi_1, ..., \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, ..., \xi_n) \equiv P(\xi_1, ..., \xi_{j-1}, 0, \xi_{j+1}, ..., \xi_n)$, $j = 1, ..., n$ почти гипоэллиптичны в $\mathbb{R}^{n-1}$,

c4. если почти гипоэллиптический в $\mathbb{R}^n$ многочлен $P \in L(n)$ с $ordP \geq 1$ не устойчив в $\mathbb{R}^n$, то существуют линейное, обратимое отображение $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k \in N$, $1 \leq k < n$, почти гипоэллиптический в $\mathbb{R}^k$, устойчивый в $\mathbb{R}^k$ многочлен $q \in L(k)$ такой, что
$$Q(\eta) = q(\eta_1, \dots, \eta_k), \quad \eta \in \mathbb{R}^n,$$
где $Q(\eta) \equiv P(T\eta)$.

Лемма 3.1. *Если почти гипоэллиптический в $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ многочлен $P \in L(n)$ с вещественными коэффициентами устойчив в $\mathbb{R}^n$, то существует число $a \in \mathbb{R}$ такое, что*
$$P(\xi) \geq a, \quad \textit{для любого} \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \textit{либо} \quad P(\xi) \leq a, \quad \textit{для любого} \quad \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. непосредственно следует из пункта 3.1 так как, если многочлен $P \in L(n)$, $n \geq 2$ с вещественными коэффициентами принадлежит I_n, то либо $P(\xi) \to +\infty$ когда $|\xi| \to \infty$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ либо $P(\xi) \to -\infty$ когда $|\xi| \to \infty$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. □

Лемма 3.2. *Пусть $m, n \in N$, $m \geq 1$, $n \geq 2$, $P(\xi) = \xi_1^m + r(\xi) \in L(n)$, $ordr < m$ многочлен с вещественными коэффициентами, для которого $ord_2 r + ... + ord_n r \geq 1$. Если многочлен P почти гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^n$, то для него верно утверждение леммы 3.1.*

Доказательство. Предположим обратное, что существуют последовательности $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty$, $\{\eta^s\}_{s=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$, $|\xi^s| \to \infty$, $|\eta^s| \to \infty$ при $s \to \infty$ для которых
$$P(\xi^s) \to -\infty \quad \text{и} \quad P(\eta^s) \to +\infty \quad \text{при} \quad s \to \infty. \tag{3.1}$$

Отсюда, в силу вещественности P и условия $n \geq 2$, существует последовательность $\{\tau^s\}_{s=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ такая, что $|\tau^s| \to \infty$ при $s \to \infty$ и $P(\tau^s) = 0$, $s = 1, 2, ...$ Отсюда, в силу пункта c1 следует, что многочлен P не устойчив в $\mathbb{R}^n$. Тогда, в силу пункта c4, для некоторого линейного, обратимого отображения $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k \in N$, $1 \leq k < n$, устойчивого и почти гипоэллиптического в $\mathbb{R}^k$ (в силу пунктов c2 и c3) многочлена $q \in L(k)$ имеем, что

$$P(T\eta) \equiv Q(\eta) = q(\eta'), \quad \eta \in \mathbb{R}^n, \quad \eta' = (\eta_1, \ldots, \eta_k). \tag{3.2}$$

Покажем, что при условиях леммы $k \geq 2$. Предположим обратное, что $k = 1$. Тогда из (3.2) следует, что для любого j имеем

$$0 \equiv \frac{\partial}{\partial \eta_j} q(\eta_1) = \frac{\partial}{\partial \eta_j} P(T\eta) = \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_l} P \right) (T\eta) t_{lj}, \quad j = 2, \ldots, n, \tag{3.3}$$

где $(t_{lj})_{l,j=1}^n \equiv T$.

Так как, в силу вида P

$$\sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_l} P \right) (T\eta) t_{lj} = \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left(\xi_1^m + r(\xi) \right) \Big|_{\xi = T\eta} t_{1j} + \sum_{l=2}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_l} r \right) (T\eta) t_{lj},$$

то отсюда и условия $ordr < m$ получаем, что $t_{1j} = 0$, $j = 2, ..., n$. Следовательно из (3.3) получаем, что

$$\sum_{l=2}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_l} r \right) (T\eta) t_{lj} \equiv 0, \quad j = 2, \ldots, n.$$

Отсюда, в силу обратимости минора $(t_{lj})_{l,j=2}^n$, получаем

$$(\frac{\partial}{\partial \xi_1} r)(T\eta) \equiv 0 \quad l = 2, ..., n.$$

Это, в силу обратимости T, противоречит условию $ord_2 r + ... + ord_n r \geq 1$ леммы и доказывает, что в представлении (3.3) $k \geq 2$.

Так как многочлен $q \in L(k)$ устойчив, почти гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^k$ и $k \geq 2$, то в силу леммы 3.1 существует число $a \in R$ для которого

$$q(\eta') \geq a, \quad \eta' \in \mathbb{R}^k, \tag{3.4}$$

либо

$$q(\eta') \leq a, \quad \eta' \in \mathbb{R}^k. \tag{3.5}$$

Тогда из (3.2), в силу обратимости T, имеем, что

$$P(\xi) \geq a \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

если имеет место (3.4) или

$$P(\xi) \leq a \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

если имеет место (3.5).

Оба случая противоречат соотношению (3.1) и доказывают утверждение леммы.

□

Лемма 3.3. *Пусть $P, Q \in L(n)$, $ordQ < ordP$ такие многочлены с вещественными коэффициентами, что для любого $a \in \mathbb{R}$ многочлен $R_a = P + aQ$ почти гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^n$. Если для некоторого $c \in \mathbb{R}$*

$$P(\xi) \geq c, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{3.6}$$

то для любого $a \in \mathbb{R}$ существует постоянная $c_a \in \mathbb{R}$ для которой

$$R_a(\xi) \geq c_a, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.7}$$

Доказательство. Представим многочлен P в следующем виде $P = P_0 + r$, где P_0 – однородный многочлен порядка $ordP$ и $ordr < ordP$. Тогда из (3.6) в силу однородности многочлена P_0 имеем, что

$$P_0(\xi) \geq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.8}$$

Пусть при условиях леммы, существует число $a_0 \in \mathbb{R}$, для которого не выполняется оценка (3.7). Тогда существует последовательность $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$, $|\xi^s| \to \infty$ при $s \to \infty$ для которой

$$R_{a_0}(\eta^s) \to -\infty \quad \text{при} \quad s \to \infty. \tag{3.9}$$

Так как $ordP_0 = ordP > ordQ$, $ordP_0 > ordr$, то из (3.8) следует, что существует последовательность $\{\eta^s\}_{s=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$, $|\eta^s| \to \infty$ при $s \to \infty$ и для которой

$$R_{a_0}(\eta^s) \to +\infty \quad \text{при} \quad s \to \infty. \tag{3.10}$$

Проводя рассуждения аналогичные доказательству леммы 3.2, в силу соотношений (3.9) и (3.10), получаем, что существуют линейное, обратимое отображение

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k \in N$, $1 \le k < n$ и устойчивый, почти гипоэллиптический в $\mathbb{R}^k$ многочлен $q \in L(k)$ для которого

$$R_{a_0}(T\eta) = P_0(T\eta) + r(T\eta) + a_0 Q(T\eta) \tag{3.11}$$
$$= q(\eta') = q_0(\eta') + q_1(\eta'), \quad \eta \in \mathbb{R}^n,$$

$$\eta' = (\eta_1, \dots, \eta_k), \quad q_0(\eta') \equiv P_0(T\eta), \quad q_1(\eta') \equiv r(T\eta) + a_0 Q(T\eta),$$
$$ord\, q_0 = ord\, P_0 = ord\, P \quad \text{and} \quad ord\, q_1 = ord\,(r + a_0 Q) \le m - 1.$$

Так как, в силу оценки (3.8)

$$q_{a_0}(\eta') \ge 0, \quad \eta' \in \mathbb{R}^k,$$

и $ordq_0 > ordq_1$, то существует последовательность $\{(\tau')^s\}_{s=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^l$ при $s \to \infty$ для которой

$$q\left((\tau')^s\right) \to +\infty \quad \text{при} \quad s \to \infty.$$

Отсюда, в силу устойчивости многочлена q в $\mathbb{R}^k$, имеем (см. 3.1)

$$q(\eta') \to +\infty \quad \text{при} \quad |\eta'| \to \infty, \quad \eta' \in \mathbb{R}^k.$$

Следовательно с некоторой постоянной $c_1 \in \mathbb{R}$

$$q(\eta') \ge c_1, \quad \eta' \in \mathbb{R}^k. \tag{3.12}$$

Из (3.11), в силу (3.12) и обратимости T, имеем

$$R_{a_0}(\xi) \ge c_1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Это противоречит соотношению (3.4) и доказывает справедливость утверждения леммы. □

Предложение 3.1. *Пусть f, g – функции, определенные на $\mathbb{R}^n$ а $\{a_s\}_{s=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $|a_s| \to \infty$ при $s \to \infty$ – некоторая последовательность. Если для любого s с некоторой постоянной c_s*

$$|a_s g(\xi)| \le |f(\xi)| + c_s, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{3.13}$$

то $|g(\xi)/f(\xi)| \to 0$ при $g(\xi) \to \infty$.

Доказательство. Пусть, наоборот, существует последовательность $\{\xi^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$, $|g(\xi^k)| \to \infty$ при $k \to \infty$ и число $\varepsilon > 0$, для которых $|g(\xi^k)/f(\xi^k)| \geq \varepsilon$, $s = 1, 2, \ldots$. Так как $|a_s| \to \infty$ при $s \to \infty$, то существует $s_0 \in N$ для которого $|a_{s_0}| \geq 2/\varepsilon$. Тогда, из оценки (3.13) имеем, что

$$\left|a_{s_0} g(\xi^k)\right| \leq \left|f\left(\xi^k\right)\right| + c_{s_0} \leq \frac{|a_{s_0}|}{2}\left|g\left(\xi^k\right)\right| + c_{s_0}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

которое противоречит условию $g(\xi^k) \to \infty$ при $k \to \infty$. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения предположения. □

Теорема 3.1. *Пусть $P, Q \in L(n)$, $ordQ < ordP$ – многочлены с вещественными коэффициентами. Если для любого $a \in \mathbb{R}$ многочлен $P + aQ$ почти гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^n$, то*

$$Q(\xi)/P(\xi) \to 0 \quad \textit{при} \quad Q(\xi) \to \infty, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. Так как при $n = 1$ утверждение теоремы непосредственно следует из условия $ordQ < ordP$, то пусть $n \geq 2$. Тогда, в силу пунктов c1 и c4, существуют линейное, обратимое отображение $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k \in N$, $1 \leq k \leq n$ и устойчивый, почти гипоэллиптический в $\mathbb{R}^k$ многочлен $q \in L(k)$ для которого

$$P(T\eta) = q(\eta'), \quad \eta \in \mathbb{R}^n, \tag{3.14}$$

где $\eta' = (\eta_1, ..., \eta_k)$.

Через $R_a(\eta)$ обозначим многочлен $P(T\eta) + aQ(T\eta)$, $a \in \mathbb{R}$. В силу пункта 3.2 для любого $a \in \mathbb{R}$ многочлен $R_a(\eta)$ почти гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим следующие возможные случаи:

(A) $k = 1$,

(B) $k \geq 2$.

В случае (A) возможны следующие подслучаи:

(A_1) $ord_2\, r + \ldots + ord_n\, r = 0$,

(A_2) $ord_2\, r + \ldots + ord_n\, r \geq 1$,

где $r(\eta) \equiv Q(T\eta)$.

Так как, в силу обратимости T, $Q(\xi) \to \infty$ тогда и только тогда, когда $r(\eta) \to \infty$, где $\xi = T\eta$, то в подслучае (A_1) утверждение теоремы непосредственно следует из условия $ordQ = ordr < ordq = ordP$.

Рассмотрим подслучай (A_2). Пусть $0 \neq a_0 \in \mathbb{R}$. Тогда, в силу леммы 3.2 существует постоянная $c \in \mathbb{R}$, для которой

$$R_{a_0}(\eta) \geq c, \quad \eta \in \mathbb{R}^n, \tag{3.15}$$

либо

$$R_{a_0}(\eta) \leq c, \quad \eta \in \mathbb{R}^n. \tag{3.16}$$

Так как утверждение теоремы при выполнении оценки (3.17) доказывается аналогично случаю, когда выполняется оценка (3.16), то пусть имеет место оценка (3.16). Тогда, в силу леммы 3.3 для любого $a \in \mathbb{R}$ существует число $c_a \in \mathbb{R}$ такое, что

$$R_a(\eta) = R_{a_0}(\eta) + (a - a_0)r(\eta) \geq c_a, \quad \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда непосредственно получаем, что

$$|\theta r(\eta)| \leq |R_{a_0}(\eta)| + \max\left\{|c_{\theta+a_0}|, |c_{-\theta+a_0}|\right\}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Следовательно, в силу предложения 3.1

$$r(\eta)/R_{a_0}(\eta) \to 0 \quad \text{при} \quad r(\eta) \to \infty, \quad \eta \in \mathbb{R}^n,$$

или, что тоже самое

$$r(\eta)/P(T\eta) \to 0 \quad \text{при} \quad r(\eta) \to \infty, \quad \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Но так как, в силу обратимости T, $Q(\xi) \to \infty$ тогда и только тогда, когда $r(\eta) \to \infty$, $\xi = T\eta$, то отсюда получаем утверждение теоремы и в подслучае (A_2)

Рассмотрим случай (B) $(k \geq 2)$. Так как $q(\eta')$ устойчивый почти гипоэллиптический в $\mathbb{R}^k$ многочлен, то, в силу пункта 3.1 по лемме 3.1 существует число $c \in \mathbb{R}$ такое, что

$$q(\eta') \geq c, \quad \eta' \in \mathbb{R}^k, \tag{3.17}$$

либо

$$q(\eta') \le c, \quad \eta' \in \mathbb{R}^k. \tag{3.18}$$

Так как утверждение теоремы при выполнении оценки (3.19) доказывается аналогично случаю, когда выполняется оценка (3.18), то пусть выполняется оценка (3.18). Из представления (3.15), в силу обратимости T, из оценки (3.18) имеем, что

$$P(\xi) \ge c, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда, в силу леммы 3.3 при условиях теоремы имеем, что для любого $a \in \mathbb{R}$ с некоторой постоянной $c_a \in \mathbb{R}$

$$P(\xi) + aQ(\xi) \ge c_a, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Откуда, проводя аналогичные рассуждения как в подслучае (A_2) получаем, что

$$Q(\xi)/P(\xi) \to 0 \quad \text{при} \quad Q(\xi) \to \infty, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

Этим утверждение теоремы в случае (B) и тем самым окончательно доказана.

□

Следствие 3.1. *При условиях теоремы 3.1 для всех j: $1 \le j \le n$ для которых $ord_j Q > 0$ $\quad ord_j P > ord_j Q$.*

Доказательство непосредственно следует из условия

$$Q(\xi)/P(\xi) \to 0 \quad \text{при} \quad Q(\xi) \to \infty, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема 3.1 является обратной к теореме 2.6, когда многочлены $P, Q \in L(n)$ вещественозначные.

На примере покажем, что обратное утверждение теоремы 2.6 в общем случае не верна.

Пример 3.1. *Пусть $n = 2$, $P(\xi) = \xi_1^2$, $Q(\xi) = \xi_1 + i\xi_2$. Не трудно проверить, что при всех $a \in \mathbb{C}$ с некоторой постоянной $c_a > 0$*

$$|\xi_1| \le c_a\big(|P(\xi) + aQ(\xi)| + 1\big), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Откуда с некоторой постоянной $c'_a > 0$

$$\sum_\alpha \left|D^\alpha\big(P(\xi)+aQ(\xi)\big)\right| \le \left|P(\xi)+aQ(\xi)\right| + 2|\xi_1| + |a| + 2$$
$$\le c'_a\big(|P(\xi)+aQ(\xi)|+1\big), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

т.е. для любого $a \in \mathbb{C}$ *многочлен* $P + aQ$ *почти гипоэллиптичен в* $\mathbb{R}^2$. *Однако* $Q(\xi)/P(\xi) \not\to 0$ *при* $Q(\xi) \to \infty$.

Abstract. The paper investigates the hypoellipticity of polynomials in terms of comparisons.

Список литературы

[1] Л. Хермандер, Анализ Линейных Дифференциальных Операторов с Частными Производными, Москва, Мир, **2**, (1986).

[2] G. G. Kazaryan, "On almost hypoelliptic polynomials", Doklady Poss. Acad. Nauk, **398**, no. 6, 701 – 703 (2004).

[3] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Критерии гипоэллиптичности в терминах мнощности и силы операторов", Тр. МИАН СССР, **150**, 128 – 142 (1979).

[4] В. П. Михайлов, "О поведений на бесконечности одного класса многочленов", Тр. МИАН СССР, **91**, 59 – 81 (1961).

[5] L. Volevich, S. Gindikin, The Method of Newtons Polyhedrons in the Theory of PDE, Kluwer Acad. Publisher (1992).

[6] H. G. Kazaryan, V. N. Margaryan, "On increase at infinity of the almost hypoelliptic polynomials", Eurasian Math. Journal (prepared to print)

Поступила 20 мая 2011