Известия НАН Армении. Математика, том 47, н. 1, 2012, стр. 23-30.

О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ МНОЖЕСТВ ТОЧЕК НЕОГРАНИЧЕННОЙ РАСХОДИМОСТИ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ ФРАНКЛИНА

Д. А. КАРАГУЛЯН

Ереванский Государственный Университет, Армения
E-mail: *davidkar89@yahoo.com*

Аннотация. В работе доказываются теоремы, дающие полные характеристики множеств точек расходимости и абсолютной расходимости рядов по системе Франклина.

MSC2010 number: 42A20

Ключевые слова: ряды Франклина; множество расходимости; множество типа G_δ.

1. ВВЕДЕНИЕ

Для функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in [0,1], \tag{1.1}$$

множество $E \subset [0,1]$ называется множеством точек расходимости, если этот ряд расходится при $x \in E$ и сходится когда $x \in [0,1] \setminus E$. Если же расходимость в точках E неограничена, то E является множеством точек неограниченной расходимости ряда (1.1). Хорошо известна классическая теорема Хана–Серпинского (см. [8], [2]): для того чтобы $E \subset [0,1]$ стало множеством точек расходимости (неограниченной расходимости) некоторого ряда (1.1), с непрерывными членами $f_n(x)$, необходимо и достаточно, чтобы оно имело тип $G_{\delta\sigma}$ (G_δ). Характеризации множеств точек расходимости рядов Фурье функций из разных классов посвящено много работ. При этом рассматриваются как ряды Фурье по тригонометрической так и по другим классическим ортонормированным системам (Уолша, Хаара, Виленкина). Множество неограниченной расходимости рядов Фурье-Хаара полностью было охарактеризовано в работе М. А. Луниной [7]. Ею доказано, что во первых множество точек неограниченной расходимости любого ряда Фурье-Хаара является множеством типа $\tilde{G}_\delta$, и наоборот, любое множество типа $\tilde{G}_\delta$ может стать множеством точек неограниченной расходимости ряда Фурье-Хаара некоторой функции. Множество точек обычной расходимости рядов Фурье-Хаара полностью охарактеризована Г. А. Карагуляном в работе [3], где доказывается, что для того чтобы множество $E \subset [0,1]$ было множеством расходимости ряда Фурье-Хаара некоторой функции из $L^\infty[0,1]$ необходимо и достаточно, чтобы оно имело тип $G_{\delta\sigma}$. Аналогичное свойство для системы Франклина установлено Г. А. Карагуляном в [5]. Более того, в работах [4] и [5] Карагуляном дается полная характеристика множеств расходимости последовательностей операторов со свойством локализации. В настоящей работе рассматривается вопрос о характеризации множество точек неограниченной расходимости рядов по системе Франклина.

Система Франклина получается ортогонализацией системы Фабера-Шаудера методом Шмидта и обозначается через $\{F_n(x)\}_{n=1}^\infty$. Множество A назовем множеством типа G_δ, если

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k,$$

где G_k суть открытые множества. При этом, очевидно, можно предполагать, что $G_k \supseteq G_{k+1}$ для всех $k \in N$. Нижеследующая теорема является основным результатом статьи.

Теорема 1. *Если множество $E \subset [0,1]$ имеет тип G_δ, то существует ряд по системе Франклина*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k F_k(x), \tag{1.2}$$

который неограниченно расходится в любой точке $x \in E$ и абсолютно сходится при $x \in [0,1] \setminus E$.

Отметим, что система Франклина состоит из непрерывных функций и поэтому согласно теоремы Хана-Серпинского множество неограниченной расходимости любого ряда Франклина имеет тип G_δ. Отсюда, с учетом результата теоремы 1 получаем:

Следствие 1. *Для того, чтобы множество $E \subset [0,1]$ было множеством неограниченной расходимости для некоторого ряда Франклина* (1.2)*, необходимо и достаточно, чтобы оно было множеством типа G_δ.*

Следствие 2. *Для того чтобы множество $E \subset [0,1]$ было множеством неограниченной расходимости для некоторого ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k F_k(x)|,$$

необходимо и достаточно, чтобы оно было множеством типа G_δ.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Для доказательства теоремы нам потребуются несколько лемм. Положим

$$\beta_k(x) = r_{k+1}(x) r_{k+2}(x), \quad x \in [0,1], \quad k = 1,2,...$$

где

$$r_n(x) = sign[\sin(2^n \pi x)], \quad x \in [0,1], \quad n = 1,2,...$$

есть функции Радемахера.

Лемма 1. *Если функция $f(x)$, $x \in [0,1]$, линейна на интервалах*

$$\left[\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}\right], \quad l = 1,2,..,2^k,$$

тогда

$$\int_0^1 f(x)\beta_k(x)dx = 0.$$

Доказательство. Достаточно установить равенство

$$\int_{\frac{l-1}{2^k}}^{\frac{l}{2^k}} \beta_k(x)(ax+b)dx = 0,$$

для любых чисел $a, b \in R$ и $l = 1, 2, \dots 2^k$, или же

$$\int_{\frac{l-1}{2^k}}^{\frac{l}{2^k}} \beta_k(x)dx = \int_{\frac{l-1}{2^k}}^{\frac{l}{2^k}} \beta_k(x)xdx = 0.$$

А последнее можно получить простыми вычислениями интегралов. □

Обозначим

$$\beta_I^k(x) = \begin{cases} \beta_k\left(\frac{x-a}{b-a}\right), & x \in I \\ 0, & x \notin I \end{cases} \tag{2.1}$$

где $I=[a,b]$. В силу леммы 1, имеем

$$\int_0^1 \beta_I^k(x) f(x) dx = 0, \tag{2.2}$$

если $f(x)$ линейна на интервалах

$$\left[a + \frac{(l-1)(b-a)}{2^k}, a + \frac{l(b-a)}{2^k}\right], \quad l = 1, 2, .., 2^k.$$

Отметим, что система Франклина является базисом в $C[0,1]$ и обладает свойством локализации. Характерным свойством системы Франклина является экспоненциальная оценка

$$|F_n(t)| \le C\sqrt{n} q^{n|t-z_n|}, \quad t \in [0,1] \tag{2.3}$$

где $C>0$ и q, $0<q<1$ – абсолютные постоянные, и $z_n = \frac{2i-1}{2^{k+1}}$, если $n = 2^k + i$, $k = 0, 1, ..., i = 1, 2..., 2^k$, $z_1 = 1$ (см. [6], стр. 223).

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть $J=(a,b) \subset [0,1]$, $I=[c,d] \subset J$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $n = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что для любой функции $f \in L^\infty[0,1]$, с $suppf \subset I$ и $\|f\|_\infty \le 1$, имеем*

$$\sum_{k=n}^{\infty} |(F_k, f) F_k(x)| < \varepsilon, \quad \text{при} \quad x \in J^c. \tag{2.4}$$

Доказательство. Обозначим

$$I_1 = \left[\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right], \quad r = \min\left\{\frac{c-a}{2}, \frac{b-d}{2}\right\}$$

и зафиксируем любую точку $x \in J^c$. Заметим, что при условии

$$z_k \in I_1$$

имеем $|x - z_k| \ge r$. Отсюда, с учетом (2.3) и неравенства $\|F_k\|_1 \le C/\sqrt{k}$, получим

$$|(F_k, f) F_k(x)| \le \|F_k\|_1 C\sqrt{k} q^{kr} \le C\ q^{kr}. \tag{2.5}$$

Если же

$$z_k \notin I_1,$$

то для $t \in I$ имеем $|z_k - t| \geq r$, и следовательно, получим

$$|(F_k, f)F_k(x)| \leq C\sqrt{k}\int_0^1 |F_k(t)f(t)|dt = C\sqrt{k}\int_I |F_k(t)f(t)|dt \leq$$

$$\leq C\sqrt{k}\int_I |F_k(x)|dx \leq C_1 q^{kr}. \tag{2.6}$$

Из (2.5) и (2.6) получим

$$|(F_k, f)F_k(x)| \leq C_2 q^{kr}, \quad x \in J^c, \tag{2.7}$$

при любом $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, соотношение (2.4) сразу же следует из (2.7) если учесть, что числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^{kr}$ сходится, при $q < 1$. □

В доказательстве следующей леммы воспользуемся утверждением Г. Г. Геворкяна [1]: если интегрируемая функция $f(t)$ в точке $x \in (0,1)$ имеет разрыв первого рода, то

$$\limsup_{n\to\infty} S_n(x,f) - \liminf_{n\to\infty} S_n(x,f) \geq B|f(x+0) - f(x-0)|, \tag{2.8}$$

где B есть абсолютная постоянная, а $S_n(x,f)$ – частичная сумма ряда Фурье–Франклина функции f.

Лемма 3. *Пусть $J \subset [0,1]$ – открытый интервал, а $I = [a,b] \subset J$ -двоичный. Тогда для любых чисел $p \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$, существует полином по системе Франклина*

$$\sum_{k=p}^{q} a_k F_k(x), \tag{2.9}$$

такой, что

$$\sum_{k=p}^{q} |a_k F_k(x)| < \varepsilon, \ \textit{при } x \in J^c, \tag{2.10}$$

$$\max_{p\leq n\leq q} |\sum_{k=p}^{n} a_k F_k(x)| \geq 1, \ \textit{при } x \in I. \tag{2.11}$$

Доказательство. Согласно лемме 2, существует натуральное число n_0 такое, что для любой функции $f \in L^\infty[0,1]$, с условиями $\|f\|_\infty \leq 1$ и $\mathrm{supp} f \subset I$, имеет место неравенство

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} |(F_k, f)F_k(x)| < \frac{B\varepsilon}{(2B+1)}, \text{ при } x \in J^c, \tag{2.12}$$

где B есть абсолютная постоянная из (2.8). Так как I – двоичный интервал, то его можно представить в виде

$$I = \bigcup_{j=1}^{2^m} I_j,$$

где I_k – разные двоичные интервалы одинаковой длины. Рассмотрим функцию β_I^m, определенную в (2.1), и пусть $n = \max\{p, n_0\}$. Из (2.12) следует

$$\sum_{k=p}^{\infty} |(F_k, \beta_I^m) F_k(x)| < \frac{B\varepsilon}{(2B+1)}, \text{ при } x \in J^c. \tag{2.13}$$

Ясно, что при достаточно большом m, первые N функции системы Франклина будут линейными на отрезках I_j. Тогда, согласно (2.2), имеем

$$(F_k, \beta_I^m) = 0, \text{ для } k = 1, 2, ..., N.$$

Функция β_I^m имеет конечное число точек разрыва. Обозначим их через ξ_k, $k = 1, 2, \ldots, l$. Согласно (2.8), для любой точки ξ_k существует частичная сумма, для которой имеем

$$|S_{\nu_k}(\xi_k, \beta_I^m))| > B|\beta_I^m(\xi_k + 0) - \beta_I^m(\xi_k - 0)| \geq B,$$

Из непрерывности S_{ν_k} следует, что

$$|S_{\nu_k}(x, \beta_I^m))| > B, \quad x \in (\xi_k - \delta_k, \xi_k + \delta_k) \tag{2.14}$$

для некоторого числа $\delta_k > 0$. С другой стороны, ряд Фурье–Франклина функции β_I^m равномерно сходится к β_I^m на множестве $I \setminus \bigcup_k (\xi_k - \delta_k, \xi_k + \delta_k)$, и, следовательно, существует число $\nu_0 \in \mathbb{N}$, такое, что

$$|S_{\nu_0}(\xi_k, \beta_I^m))| > \frac{1}{2}, \quad x \in I \setminus \bigcup_k (\xi_k - \delta_k, \xi_k + \delta_k) \tag{2.15}$$

Определим полином (2.9) взяв

$$q = \max_{0 \leq j \leq l} \nu_j, \quad a_k = \frac{2B+1}{B}(\beta_I^m, F_k).$$

Из (2.14) и (2.15) легко следует неравенство (2.11), а (2.10) получается из (2.13). Лемма доказана. □

Пусть G – открытое множество. Скажем, что система замкнутых двоичных интервалов $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ является разбиением для G, если $(\omega_i)^o \bigcap (\omega_j)^o = \emptyset$ для любых $i, j \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} \omega_k = G$, и

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{dist}(\omega_k, G^c) = 0.$$

Обозначим через ω_k^* объединение ω_k с его двумя соседними интервалами. Легко заметить, что любое открытое множество обладает таким разбиением.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1.

Если A есть множество типа G_δ, то

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k,$$

где G_k – открытые множества и $G_k \supseteq G_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$. Каждое из множеств G_k обладает некоторым разбиением на двоичные интервалы. Пусть $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть некоторая нумерация всех этих интервалов. Легко заметить, что утверждение $x \in A$ эквивалентно нижеследующим утверждениям

$$x \in \omega_k \text{ для бесконечного числа } k \in \mathbb{N},$$

$$x \in \omega_k^* \text{ для бесконечного числа } k \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

Для каждого интервала ω_k построим многочлен Франклина

$$\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} a_i F_i(x) \tag{3.2}$$

с условиями

$$\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} |a_i F_i(x)| \leq \frac{1}{2^k} \quad x \notin \omega_k^*, \tag{3.3}$$

$$\max_{n_{k-1} < n \leq n_k} |\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} a_i F_i(x)| \geq k, \quad x \in \omega_k, \tag{3.4}$$

где $1 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ есть некоторая последовательность номеров. Сделаем это по индукции. Применив лемму 3, при $J = \omega_1^*$, $I = \omega_1$, $p = 1$, $\varepsilon = 1$, получим полином (3.2), с условиями (3.3) и (3.4) в случае $k = 1$. Далее предположим, что условия (3.3) и (3.4) выполняются для некоторых полиномов (3.2) при $k = 1, 2, \ldots, t$. Обозначим

$$M_{t+1} = \max_{x \in [0,1]} |\sum_{i=1}^{n_t} a_i F_i(x)| + (t+1)$$

Вновь применив лемму 3, с $J = \omega_{t+1}^*$, $I = \omega_{t+1}$, $n = n_t$, $\varepsilon = 1/M_{k+1}2^k$, получим полином вида (3.2), удовлетворяющий условиям (3.3) и (3.4) при $k = t+1$. Итак, завершая индукцию, мы получим некоторый ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i F_i(x) \tag{3.5}$$

удовлетворяющий условиям (3.3) и (3.4). Пусть $x \in A$. Тогда, согласно (3.1), существует бесконечная последовательность интервалов ω_k, содержащих точку x. Это значит, что в точке x для бесконечного числа значений k выполняется (3.4). Отсюда следует расходимость ряда (3.5) в точке x. Если же $x \notin A$, то существуют лишь конечное число интервалов ω_k^*, содержаших x. Это значит, что (3.3) может не выполнятся только для конечного числа индексов k. Отсюда получаем, что ряд (3.5) абсолютно расходится. Теорема доказана.

В заключении выражаю благодарность Г. А. Карагуляну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Abstract. Theorems of the paper give a complete description of the divergence and absolute divergence sets of the series in Franklin system.

Список литературы

[1] Г. Г. Геворкян, "О рядах по системе Франклина", Analysis Mathematica, **16**, 87 – 114 (1990).
[2] H. Hahn, "Über die Menge der Konvergenzpunkte einer Funktionenfolge", Arch. d. Math. u. Phys., **28**, 34 – 45 (1919).
[3] Г. А. Карагулян, "Полная характеристика множеств точек расходимости рядов Фурье-Хаара", Известия НАН Армении, серия Математика, **45**. no. 6, 33 – 50 (2010).
[4] G. A. Karagulyan, "Divergence of general localized operators on the sets of measure zero", Colloq. Math., **121**, no. 1, 113 – 119 (2010).
[5] Г. А. Карагулян, "О характеризации множеств точек расходимости последовательностей операторов со свойством локализации", Мат. Сборник, **202**, no. 1, 11 – 36 (2011).
[6] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные ряды, Москва, "Наука" (1984).
[7] М. А. Лунина, "О множестве точек неограниченной расходимости рядов по системе Хаара", Вестник Моск. ун-та, Серия 1, Мат. мех., no 4, 13 – 20 (1976).
[8] W. Sierpinski, "Sur Tensemble des points de convergence d'une suite de fonctions continues", Fund. Math., no. 2, 41 – 49 (1921).

Поступила 16 июня 2011