

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Г. М. АЙРАПЕТЯН, А. Р. АЙРАПЕТЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *hhayrapet@gmail.com*

Аннотация. В статье исследуется граничная задача типа Шварца для полианалитических функций, когда граничные функции принадлежат весовому пространству $L^1(\rho)$.

MSC2010 number: 35J40, 35J67, 35J30; 35Q15, 31B10

Ключевые слова: Неправильная эллиптичность; краевая задача; весовые пространства; задача Дирихле.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть B_0 -класс функций U , определенных в верхней полуплоскости $\Pi^+ = \{z; \operatorname{Im} z > 0\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, и удовлетворяющих условию

$$|U(z)| < A |z|^N, \quad \operatorname{Im} z > y_0 > 0,$$

где A —постоянная зависящая от y_0 , N — целое число, зависящее только от U , а $L^1(\rho)$ — пространство действительнoзначных функций на $(-\infty, \infty)$ с нормой

$$\|f\|_{L^1(\rho)} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |\rho(x)| dx < \infty,$$

где

$$(1.1) \quad \rho(x) = \frac{1}{(1 + |x|)^\alpha}$$

и α — действительное число. Для уравнения

$$(1.2) \quad \frac{\partial^n U(z)}{\partial \bar{z}^n} = 0, \quad z \in \Pi^+,$$

где

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

исследуется следующая граничная задача типа Шварца:

Задача Р. Пусть f_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$ – действительнoзначные функции, определенные на $(-\infty, \infty)$, такие, что $f_k^{(n-k-1)} \in L^1(\rho)$. Определить функцию $U \in B_0$ удовлетворяющую уравнению (1.2) и граничным условиям

$$(1.3) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left\| \operatorname{Re} \frac{\partial^k U(z)}{\partial y^k} - f_k(x) \right\|_{L^1(\rho)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Задача **Р** в классической постановке в классах Гельдера исследована в работах [1] - [5]. В работах [6], [7] исследованы задачи Шварца и Дирихле для неоднородного уравнения (1.2) и получены необходимые и достаточные условия разрешимости этих задач, когда граничные функции непрерывны на границе. В работе [8] исследована задача типа Римана-Гильберта для уравнения (1.2) в единичном круге, когда граничные условия понимаются в $L^1(T)$, где T – единичная окружность. В $L^1(\rho)$ при $n = 2$ эта задача исследована в [9].

В настоящей работе исследуется задача **Р**. Устанавливается, что она имеет решение для любых функций $f_k(x)$ при $\alpha \geq 0$. Если $\alpha < 0$ получены необходимые и достаточные условия разрешимости этой задачи.

2. ЗАДАЧА ШВАРЦА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Рассмотрим следующие две граничные задачи типа Шварца.

Задача Р₁. Пусть $f \in L^1(\rho)$. Определить аналитическую в Π^+ функцию $\varphi \in B_0$ по граничному условию

$$\lim_{y \rightarrow 0} \|\operatorname{Re} \varphi(x + iy) - f(x)\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

где ρ – весовая функция вида (1.1). Пусть A_0 – класс аналитических функций $\phi(z)$ в $\Pi^+ \cup \Pi^-$, $\Pi^- = \{z; \operatorname{Im} z < 0\}$ удовлетворяющих условию

$$|\phi(z)| < A |z|^N, \quad |\operatorname{Im} z| > y_0 > 0,$$

где N – целое число, зависящее от ϕ , а A – постоянная, зависящая от y_0 .

Рассмотрим также следующую задачу (задача о скачке).

Задача Р₂. Пусть $f \in L^1(\rho)$ – комплекснозначная функция. Определить функцию $\phi \in A_0$ по граничному условию

$$(2.1) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \|\phi^+(x + iy) - \phi^-(x - iy) - f(x)\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

где $\phi^\pm$ – сужения функции ϕ на $\Pi^\pm$ соответственно.

Если ϕ – произвольная аналитическая функция в $\Pi^+ \cup \Pi^-$, то следуя [10] положим $\phi_*(z) = -\overline{\phi(\bar{z})}$.

Лемма 2.1. Пусть $f \in L^1(\rho)$ – действительнoзначная функция, тогда общее решение задачи $\mathbf{P}_1$ можно представить в виде

$$(2.2) \quad \varphi(z) = \frac{1}{2}(\phi(z) + \phi_*(z)),$$

где $\phi(z)$ – общее решение задачи $\mathbf{P}_2$.

Доказательство. Пусть $\phi(z)$ – некоторое решение задачи $\mathbf{P}_2$. Так как f – действительнoзначная функция, то $\phi_*(z)$ также решение этой задачи, т.е.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \|\phi_*^+(x + iy) - \phi_*^-(x - iy) - f(x)\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Ясно, что функция

$$\psi(z) = \frac{\phi(z) + \phi_*(z)}{2}.$$

решение задачи $\mathbf{P}_2$ и

$$\psi_*(z) = \psi(z).$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \psi(x + iy) &= \frac{\phi(x + iy) + \overline{\phi(x + iy)}}{2} - \frac{\overline{\phi(x - iy)} + \phi(x - iy)}{2} = \\ &= \frac{1}{2}(\phi(x + iy) - \phi(x - iy)) + \frac{1}{2}(\overline{\phi(x + iy)} - \overline{\phi(x - iy)}), \end{aligned}$$

то заключаем, что

$$\lim_{y \rightarrow 0} \|\operatorname{Re} \psi(x + iy) - f(x)\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

т.е. $\psi(z)$ есть решение задачи $\mathbf{P}_1$. Верно и обратное: каждое решение задачи $\mathbf{P}_1$ представимо в виде (2.2). Действительно, пусть $\varphi(z)$ – произвольное решение задачи $\mathbf{P}_1$. Положим

$$\phi(z) = \begin{cases} \varphi(z), & z \in \Pi^+ \\ -\overline{\varphi(\bar{z})}, & z \in \Pi^-. \end{cases}$$

Легко проверить, что функция $\phi(z)$ – решение задачи $\mathbf{P}_2$, $\phi_*(z) = \phi(z)$ и, следовательно, $\varphi(z)$ представима в виде (2.2). $\square$

Пусть $m = [\alpha]$ и $f \in L^1(\rho)$. Положим

$$K(m, f, z) = \frac{(z+i)^m}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t+i)^m} \frac{dt}{t-z}, \quad z \in \Pi^+ \cup \Pi^-.$$

Ясно, что при $m \geq 0$ функция $K(m, f, z)$ голоморфна на $\Pi^+ \cup \Pi^-$ и $K(m, f, z) \in B_0$ при $z \in \Pi^+$. Если же $m < 0$, то $K(m, f, z)$ голоморфна на $\Pi^+ \cup \Pi^-$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)(t+i)^k dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -m-1,$$

или

$$(2.3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)t^k dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -m-1.$$

Лемма 2.2. *Имеет место оценка*

$$\|K_m(f, x+iy) - K_m(f, x-iy)\|_{L^1(\rho)} \leq C\|f\|_{L^1(\rho)}, \quad y \in (0, 2^{-1}),$$

где C – постоянная, не зависящая от f и y .

Доказательство. Так как

$$K_m(f, x+iy) - K_m(f, x-iy) = I_1(x, y) + I_2(x, y),$$

где

$$I_1(x, y) = \frac{(x+iy+i)^m - (x-iy+i)^m}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t+i)^m} \frac{dt}{t-x-iy},$$

$$I_2(x, y) = \frac{(x+iy+i)^m}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t+i)^m} \frac{ydt}{(t-x)^2 + y^2}.$$

то достаточно установить, что

$$\|I_j(x, y)\|_{L^1(\rho)} \leq C\|f\|_{L^1(\rho)}, \quad j = 1, 2.$$

Учитывая, что $|(x+iy+i)^m - (x-iy+i)^m| \leq C_1(1+|x|)^{m-1}y$, где C_1 – некоторая постоянная, не зависящая от x и y , получаем

$$\begin{aligned} & \|I_1(x, y)\|_{L^1(\rho)} \leq \\ & \leq C_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{(1+|t|)^\alpha} (1+|t|)^{\{\alpha\}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ydx}{(1+|x|)^{1+\{\alpha\}}|t-x-iy|} dt. \end{aligned}$$

где C_2 – постоянная, не зависящая от f и y , а $\{\alpha\}$ – дробная часть числа α .

Поскольку (см. [11])

$$\sup_{-\infty < t < \infty} (1+|t|)^{\{\alpha\}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ydx}{(1+|x|)^{1+\{\alpha\}}|t-x-iy|} < \infty,$$

то

$$\|I_1(x, y)\|_{L^1(\rho)} \leq C\|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Учитывая, что [11]

$$\sup_{-\infty < t < \infty} (1 + |t|)^{\{\alpha\}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y dx}{(1 + |x|)^{\{\alpha\}}((t - x)^2 + y^2)} < \infty,$$

получаем $\|I_2(x, y)\|_{L^1(\rho)} \leq C\|f\|_{L^1(\rho)}$. $\square$

Лемма 2.3. Пусть $f(x)$ – финитная функция из класса Гельдера. Справедливы следующие утверждения:

а) Если $\alpha \geq 0$, то

$$(2.4) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \|K(m, f, x + iy) - K(m, f, x - iy) - f(x)\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

б) Если $\alpha < 0$ и функция f удовлетворяет условиям (2.3), то $K(m, f, z)$ удовлетворяет соотношению (2.4).

Доказательство. Существует $R > 0$ такое, что $K(m, f, z)$ аналитична в $|z| > R$.

При $|z| > 2R$ будем иметь $|K(m, f, z)| < A|z|^{m-1}$. Поэтому

$$|K(m, f, x + iy) - K(m, f, x - iy)| < Ay|x|^{m-2}$$

и

$$\int_{|x| > 2R} |K(m, f, x + iy) - K(m, f, x - iy)| \rho(x) dx < Ay \int_{|x| > 2R} \frac{dx}{(1 + |x|)^{2+\{\alpha\}}}.$$

Следовательно

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{|x| > 2R} |K_m(f, x + iy) - K_m(f, x - iy)| \rho(x) dx = 0.$$

Так как в силу формулы Сохоцкого-Племеля

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{|x| < 2R} |\operatorname{Re} K(m, f, x + iy) - f(x)| \rho(x) dx = 0,$$

получаем доказательство утверждения а).

Если теперь $\alpha < 0$, то при условии (2.3) функция $K(m, f, z)$ голоморфна в $\Pi^+ \cup \Pi^-$ и обращается в нуль порядка $-m+1$ при $z = \infty$. Аналогично устанавливается, что $K(m, f, z)$ удовлетворяет (2.4). $\square$

Лемма 2.4. Пусть $f(x) \in L^1(\rho)$. Справедливы следующие утверждения:

- а) Если $\alpha \geq 0$, то функция $K(m, f, z)$ – решение задачи $\mathbf{P}_2$.
- б) Если $\alpha < 0$ и функция f удовлетворяет условиям (2.3), то функция $K(m, f, z)$ – решение задачи $\mathbf{P}_2$.

Доказательство. Пусть $\alpha \geq 0$, $\varepsilon > 0$ и $f_\varepsilon(x)$ произвольная финитная функция из класса Гельдера такая, что

$$(2.5) \quad \|f - f_\varepsilon\|_{L^1(\rho)} < \varepsilon.$$

В силу леммы 2.2

$$\begin{aligned} & \|K(m, f, x + iy) - K(m, f, x - iy) - f(x)\|_{L^1(\rho)} \leq \\ & \leq \|K(m, f - f_\varepsilon, x + iy) - K(m, f - f_\varepsilon, x - iy)\|_{L^1(\rho)} + \\ & + \|K(m, f_\varepsilon, x + iy) - K(m, f_\varepsilon, x - iy) - f_\varepsilon(x)\|_{L^1(\rho)} + \|f_\varepsilon - f\|_{L^1(\rho)} \leq \\ & \leq \|K(m, f_\varepsilon, x + iy) - K(m, f_\varepsilon, x - iy) - f_\varepsilon(x)\|_{L^1(\rho)} + C\|f_\varepsilon - f\|_{L^1(\rho)}. \end{aligned}$$

Учитывая лемму 2.3, получаем доказательство утверждения а) леммы.

Пусть теперь $\alpha < 0$ и $f \in L^1(\rho)$ удовлетворяет условиям (2.3). Выберем финитную функцию $f_\varepsilon(x)$ из класса Гельдера так, чтобы имели место (2.3) и (2.5). Аналогичными рассуждениями получаем доказательство утверждения б) теоремы. $\square$

Лемма 2.5. Пусть $f \in L^1(\rho)$ и $\phi(z) \in A_0$ удовлетворяет условию (2.1). Тогда

- а) Если $\alpha \geq 0$ и α – нецелое, то $\phi(z)$ представима в виде

$$(2.6) \quad \phi(z) = K(m, f, z) + P(z)$$

где $P(z)$ – полином порядка m .

- б) Если $\alpha \geq 0$ и α – целое, то $\phi(z)$ представима в виде (2.6), где $P(z)$ – полином порядка $m - 1$.

- в) Если $\alpha < 0$, то f удовлетворяет условиям (2.3) и $\phi(z)$ представима в виде (2.6), где $P(z) = \text{const}$.

Доказательство. Из (2.1) получаем

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\phi^+(x + iy)}{(x + i)^m} - \frac{\phi^-(x - iy)}{(x + i)^m} - \frac{f(x)}{(x + i)^m} \right| \rho_1(x) dx = 0,$$

где $\rho_1(x) = (1 + |x|)^{-1}$. Положим

$$\frac{\phi^+(x + iy)}{(x + i)^m} - \frac{\phi^-(x - iy)}{(x + i)^m} = f_y(x).$$

Ясно, что $f_y(x) \in L^1(\rho_1)$ и

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\| f_y(x) - \frac{f(x)}{(x + i)^m} \right\|_{L^1(\rho_1)} = 0.$$

Пусть $\alpha \geq 0$. Тогда функция $\phi^-(x - iy)(z + i)^{-m}$ имеет полюс порядка m в точке $z = -i$. Если

$$R_m(z) = \frac{A_1(y)}{(z + i)} + \frac{A_2(y)}{(z + i)^2} + \dots + \frac{A_m(y)}{(z + i)^m}$$

главная часть разложения Лорана этой функции в точке $z = -i$, то получаем

$$\psi_y^+(x) - \psi_y^-(x) + R_{my}(x) = f_y(x) + R_{my}(x),$$

где

$$\psi_y^\pm(z) = \begin{cases} \frac{\phi^+(z + iy)}{(z + i)^m}, & z \in \Pi^+, \\ \frac{\phi^-(z - iy)}{(z + i)^m}, & z \in \Pi^-. \end{cases}$$

Так как $\psi_y(z)$ имеет полиномиальный рост, то

$$\psi_y^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_y(t)dt}{t - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_{my}(t)dt}{t - z} + P_y(z).$$

Поскольку

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_{my}(t)dt}{t - z} = \begin{cases} R_{my}(z), & z \in \Pi^+, \\ 0, & z \in \Pi^-, \end{cases}$$

то, переходя к пределу при $y \rightarrow 0$, получаем

$$\frac{\phi(z)}{(z + i)^m} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t + i)^m} \frac{dt}{t - z} + P(z),$$

где $P(z)$ - некоторый полином. Окончательно

$$(2.7) \quad \phi(z) = K(m, f, z) + P_1(z),$$

где $P_1(z) = (z + i)^m P(z)$. В силу леммы 4

$$K(m, f, x + iy) - K(m, f, x - iy) \rightarrow f(x),$$

в $L^1(\rho)$ при $y \rightarrow 0$. Следовательно

$$\lim_{y \rightarrow 0} \|P_1(x + iy) - P_1(x - iy)\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Если N_1 порядок полинома $P_1(z)$, то

$$|P_1(x + iy) - P_1(x - iy)| = O(1 + |x|)^{N_1 - 1}$$

и $P_1(x + iy) - P_1(x - iy) \in L^1(\rho)$, тогда и только тогда, когда $\alpha - N_1 + 1 > 1$ т. е. $N_1 < \alpha$. Получаем $N_1 \leq m$ при α нецелом и $N_1 < m$ при α целом. Утверждения а) и б) леммы доказаны.

Пусть $\alpha < 0$. Так как $\psi_y(z)$ аналитическая функция на $\Pi^+ \cup \Pi^-$, получаем представление (2.7), где $P_1(z)$ имеет вид

$$P_1(z) = \frac{B_1}{z + i} + \frac{B_2}{(z + i)^2} + \dots + \frac{B_{|m|}}{(z + i)^{|m|}} + \tilde{P}_1(z),$$

$\tilde{P}_1(z)$ — некоторый полином. Учитывая, что $\phi(z)$ аналитическая функция в точке $z = -i$ получаем

$$(2.8) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(t + i)^k dt + B_{|m| - k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, |m| - 1.$$

Так как

$$|P_1(x + iy) - P_1(x - iy)| = O(1 + |x|)^{n_1 - 1}, \quad |x| \rightarrow \infty,$$

где n_1 — порядок полинома $\tilde{P}_1(z)$, то $P_1(x + iy) - P_1(x - iy) \in L^1(\rho)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{P}_1(z) = \text{const}$. Далее, пусть B_k первый коэффициент, отличный от нуля, тогда в окрестности $z = \infty$ будем иметь

$$|P_1(x + iy) - P_1(x - iy)| = O\left(\frac{1}{|x|^{k+1}}\right)$$

и $P_1(x + iy) - P_1(x - iy) \in L^1(\rho)$ при $k + 1 - |m| > 1$ т. е. $k > |m|$. Следовательно, $B_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, |m|$ и, учитывая (2.8), f удовлетворяет условиям (2.3). $\square$

Из лемм 2.4 и 2.5 непосредственно следует:

Теорема 2.1. Пусть $f \in L^1(\rho)$. Справедливы следующие утверждения:

а) Если $\alpha \geq 0$, то задача $\mathbf{P}_2$ имеет решение для любой функции $f \in L^1(\rho)$. Общее решение можно представить в виде (2.6), где $P(z)$ — произвольный полином порядка $\tilde{m}$:

$$\tilde{m} = \begin{cases} m, & \{\alpha\} \neq 0 \\ m - 1, & \{\alpha\} = 0. \end{cases}$$

б) Если $\alpha < 0$, то задача $\mathbf{P}_2$ имеет решение тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условиям (2.3). Решение представимо в виде (2.6), где $P(z) = \text{const}$.

Теорема 2.2. Справедливы следующие утверждения:

а) Если $\alpha \geq 0$, то задача $\mathbf{P}_1$ имеет решение для любой действительнoзначной функции $f \in L^1(\rho)$ и общее решение представимо в виде

$$(2.9) \quad \varphi(z) = \frac{1}{2}(K(m, f, z) + K_*(m, f, z)) + P_{\tilde{m}}(z),$$

где $P_{\tilde{m}}(z)$ произвольный полином порядка $\tilde{m}$ вида

$$P_{\tilde{m}}(z) = iA_0 + iA_1z + \dots + iA_{\tilde{m}}z^{\tilde{m}},$$

причем A_k , $k = 0, 1, \dots, \tilde{m}$ – действительные числа.

б) Если $\alpha < 0$, то задача $\mathbf{P}_1$ имеет решение тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условиям (2.3). Решение представимо в виде (2.9), где $P_{\tilde{m}}(z) = iA_0$, A_0 – произвольное действительное число.

Доказательство. Пусть $\alpha \geq 0$ и $\phi(z)$ – общее решение задачи $\mathbf{P}_2$. В силу леммы 2.1 и теоремы 2.1, оно представимо в виде (2.9), где $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_mz^m$ полином порядка m . Тогда

$$P_*(z) = -\bar{a}_0 - \bar{a}_1z - \dots - \bar{a}_mz^m$$

и

$$\frac{1}{2}(P(z) + P_*(z)) = \frac{a_0 - \bar{a}_0}{2} + \frac{(a_1 - \bar{a}_1)z}{2} + \dots + \frac{(a_m - \bar{a}_m)z^m}{2}.$$

Положив $A_k = a_k - \bar{a}_k$ и учитывая формулу (2.2) получаем (2.9). Аналогично устанавливается утверждение б). Теорема доказана. $\square$

3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 3.1. Общее решение уравнения (1.2) можно представить в виде

$$(3.1) \quad U(z) = \varphi_0(z) + y\varphi_1(z) + \dots + y^{n-1}\varphi_{n-1}(z),$$

где $\varphi_k(z)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ – аналитические функции в Π^+ .

Доказательство. Хорошо известно [12], что общее решение уравнения (1.2) можно представить в виде

$$(3.2) \quad U(z) = \phi_0(z) + \bar{z}\phi_1(z) + \dots + \bar{z}^{n-1}\phi_{n-1}(z),$$

где $\phi_k(z)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ – аналитические функции в Π^+ . Поскольку $\bar{z} = z - 2iy$, то получаем представление (3.1), где

$$(3.3) \quad \varphi_0(z) = \phi_0(z) + z\phi_1(z) + \dots + z^{n-1}\phi_{n-1}(z),$$

$$(3.3) \quad \varphi_k(z) = 2^k(-i)^k(\phi_k(z) + C_{k+1}^k z\phi_{k+1}(z) + \dots + C_{n-1}^k z^{n-1-k}\phi_{n-1}(z)),$$

$k = 1, 2, \dots, n-1$. □

Лемма 3.2. Пусть полианалитическая функция $U \in B_0$ представима в виде (3.2). Тогда $\phi_k(z) \in B_0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Доказательство. Пусть $y_0 > 0$ и $z = x + iy$, $y > y_0$. По условию леммы имеем $|U(z)| < M|z|^N$, $Imz > y_0$. Поэтому функция

$$U(z) = \frac{\phi_0(z)}{(z+i)^N} + \bar{z}\frac{\phi_1(z)}{(z+i)^N} + \dots + \bar{z}^{n-1}\frac{\phi_{n-1}(z)}{(z+i)^N}$$

полианалитическая и ограничена в полуплоскости $Imz > y_0$, т.е. $|U(z)| < C$, где C – постоянная, зависящая от y_0 . Пусть теперь z – произвольная точка $Imz > y_0$. Известно (см. [13]), что если $U(z)$ полианалитическая ограниченная функция в круге $D = \{z : |z - z_0| < R\}$, то

$$\left| \frac{\partial^k U(z_0)}{\partial \bar{z}^k} \right| \leq \frac{M}{R^k}, \quad M = \sup_{z \in D} |u(z)|, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Применив это неравенство для круга $D = \left\{ w : |w - z| < y - \frac{y_0}{2} \right\}$, получаем

$$\frac{|\phi_{n-k}(z)|}{|z+i|^N} < A \frac{|z|^{k-1}}{y_0^{n-1}}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad Imz > y_0,$$

или

$$|\phi_k(z)| \leq A \frac{|z|^{N+n-k-1}}{y_0^{n-1}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

где A – некоторая постоянная. Следовательно $\phi_k \in B_0$. Лемма доказана. □

Лемма 3.3. Пусть полианалитическая функция $u(z) \in B_0$ и представима в виде (3.1). Тогда $\varphi_k(z) \in B_0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Доказательство. Непосредственно следует из (3.3). $\square$

Лемма 3.4. Пусть $\alpha \geq 0$, $\varphi(z) \in B_0$, $f(x) = \operatorname{Re} \varphi(x) \in L^1(\rho)$, $x \in (-\infty, \infty)$, и $\operatorname{Re} \varphi(x + iy) \in L^1(\rho)$ при $y = y_0 > 0$. Тогда

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}(K(m, f, z) + K_*(m, f, z)) + \sum_{k=0}^{\tilde{m}} iA_k z^k,$$

где A_k – действительные числа.

Доказательство. Рассмотрим граничную задачу

$$f(x) = \operatorname{Re} \varphi(x), \quad x \in (-\infty, \infty),$$

где $\varphi \in B_0$. Общее решение этой задачи представимо в виде (2.2), где $\phi \in A_0$ – решение граничной задачи

$$\phi^+(x) - \phi^-(x) = 2f(x).$$

Разделив это равенство на $(z + i)^m$ получаем

$$\psi^+(x) - \psi^-(x) = \frac{2f(x)}{(x + i)^m}$$

где

$$\psi^+(z) = \frac{\phi^+(z)}{(z + i)^m}, \quad \psi^-(z) = \frac{\phi^-(z)}{(z + i)^m}$$

Функция $\psi^+(z)$ аналитична в Π^+ , а $\psi^-(z)$ в Π^- за исключением точки $z = -i$.

Если

$$R(z) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k}{(z + i)^k}$$

главная часть разложения Лорана функции $\psi^-(z)$ в точке $z = -i$, то получаем

$$\psi^+(x) - (\psi^-(x) - R(x)) = \frac{2f(x)}{(x + i)^m} + R(x).$$

Следовательно

$$\psi^\pm(z) = \frac{(z + i)^m}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t + i)^m} \frac{dt}{t - z} + \tilde{P}(z),$$

где $\tilde{P}(z) = a_0 + a_1(z) + \dots + a_{n_0} z^{n_0}$ – некоторый полином. Поскольку

$$\tilde{P}_*(z) = - \sum_{k=1}^{n_0} \bar{a}_k z^k,$$

то применяя формулу (2.2), получаем соответствующее представление. Так как в силу леммы 2.2

$$\operatorname{Re}(K(m, f, x + iy) + K_*(m, f, x + iy)) \in L^1(\rho),$$

при $y > 0$, то $\tilde{P}(x + iy) + \tilde{P}_*(x + iy) \in L^1(\rho)$, что возможно лишь при $n_0 \leq \tilde{m}$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3.5. Пусть $\alpha < 0$, $\varphi \in B_0$, $f(x) = \operatorname{Re}\varphi(x) \in L^1(\rho)$. Тогда, если $\operatorname{Re}\varphi(x + iy_0) \in L^1(\rho)$, $y_0 > 0$, то f удовлетворяет условиям (2.3), а $\varphi(z)$ представима в виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}(K(m, f, z) + K_*(m, f, z)) + iA_0,$$

где A_0 – действительное число.

Доказательство. По аналогии с предыдущей леммой имеем

$$\varphi^+(x)(x+i)^{|m|} - \varphi^-(x)(x+i)^{|m|} = 2f(x)(x+i)^{|m|}.$$

и следовательно

$$\varphi^\pm(z)(z+i)^{|m|} = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)(t+i)^{|m|}}{t-z} dt + P(z),$$

где $P(z) = A_0 + A_1(z+i) + \dots + A_N(z+i)^N$ – некоторый полином порядка N , $N \geq m$. Так как левая часть имеет нуль порядка m в точке $z = -i$, то получаем

$$(3.4) \quad \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(t+i)^{|m|-k} dt + A_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, |m|.$$

Далее имеем

$$\varphi(z) = \frac{(z+i)^{-|m|}}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)(t+i)^{|m|}}{t-z} dt + \sum_{k=1}^{|m|} \frac{A_k}{(z+i)^k} + \tilde{P}_1(z)$$

В силу леммы 2.5 заключаем, что $A_k = 0$, $k = 0, 1, \dots, |m|$, $\tilde{P}_1(z) = \operatorname{const}$. Учитывая теперь (3.4), получаем доказательство леммы. $\square$

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ **P**

Задачу **P** будем называть однородной, если $f_k \equiv 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Теорема 4.1. Пусть $\alpha \geq 0$. Тогда общее решение однородной задачи **P** можно представить в виде (3.1), где

$$(4.1) \quad \varphi_0(z) = iA_{00} + iA_{01}z + \dots + iA_{0\tilde{m}}z^{\tilde{m}},$$

$$(4.2) \quad \varphi_k(z) = \frac{1}{k!}(iA_{k0} + iA_{k1}z + \dots + iA_{k\tilde{m}}z^{\tilde{m}} - \sum_{j=0}^{k-1} C_k^j j! i^{k-j} \varphi_j^{(k-j)}(z))$$

причем A_{kj} , $k = 0, 1, \dots, n-1$, $j = 0, 1, \dots, \tilde{m}$ – действительные числа.

Доказательство. При $k = 0$ из (1.3), получаем

$$\lim_{y \rightarrow 0} \|\operatorname{Re}(\varphi_0(x + iy) + y\varphi_1(x + iy) + \dots + y^{n-1}\varphi_{n-1}(x + iy))\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Обозначим

$$\operatorname{Re}(\varphi_0(x + iy) + y\varphi_1(x + iy) + \dots + y^{n-1}\varphi_{n-1}(x + iy)) = f_{0y}(x).$$

В силу леммы 3.4

$$\begin{aligned} & \varphi_0(z + iy) + y\varphi_1(z + iy) + \dots + y^{n-1}\varphi_{n-1}(z + iy) = \\ & = K(m, f_{0y}, z) + K_*(m, f_{0y}, z) + \sum_{k=0}^{\tilde{m}} iA_{0k}(y)z^k \end{aligned}$$

где $A_{0k}(y)$, $k = 0, 1, \dots, \tilde{m}$ – действительные числа. Переходя к пределу, при $y \rightarrow 0$ получаем представление (4.1) функции $\varphi_0(z)$. Далее при $k = 1$ из (1.3) имеем

$$\lim_{y \rightarrow 0} \|\operatorname{Re}(i\varphi_0'(z) + \varphi_1(z) + yi\varphi_1'(z) + \dots)\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

где остальные слагаемые содержат y как множитель. Обозначив

$$i\varphi_0'(x + iy) + \varphi_1(x + iy) + yi\varphi_1'(x + iy) + \dots = f_{1y}(x),$$

в силу леммы 3.4 получаем

$$\begin{aligned} & i\varphi_0'(z + iy) + \varphi_1(z + iy) + yi\varphi_1'(z + iy) + \dots = \\ & = K(m, f_{1y}, z) + K_*(m, f_{1y}, z) + iA_{10}(y) + iA_{11}(y)z + \dots + iA_{1\tilde{m}}(y)z^{\tilde{m}}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу, при $y \rightarrow 0$ получаем

$$\varphi_1(z) = -i\varphi_0'(z) + iA_{10} + iA_{11}z + \dots + iA_{1N_1}z^{N_1},$$

т.е. формулу (4.2) при $k = 1$. Аналогичными рассуждениями получаем (4.2) при $k > 1$.

Докажем, что функция $U(z)$ определяемая по формуле (3.1), где $\varphi_k(z)$ определяются по формулам (4.2), удовлетворяет условиям (1.3). Для этого заметим, что при фиксированном $y > 0$

$$|\operatorname{Re} U(x + iy)| = O(|x|^{\tilde{m}-1})$$

и поэтому $\operatorname{Re} U(x + iy) \in L^1(\rho)$

Каждая функция $\varphi_k(z)$ – полином порядка $\tilde{m}$ и

$$\frac{\partial^k U(z)}{\partial y^k} = \varphi_k(z) + yP(y, z),$$

где $P(y, z)$ полином относительно z порядка меньше чем $\tilde{m} - 1$. Поэтому при $y \in (0, 1)$ и $x \in (-\infty, \infty)$

$$\left| \operatorname{Re} \frac{\partial^k U(z)}{\partial y^k} \right| < Ay(1 + |x|)^{\tilde{m}-1}$$

где A – постоянная, не зависящая от x . Из последнего неравенства следует, что

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\| \operatorname{Re} \frac{\partial^k U(z)}{\partial y^k} \right\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Теорема доказана. □

По аналогии устанавливается

Теорема 4.2. Пусть $\alpha < 0$. Тогда общее решение однородной задачи **P** представимо в виде

$$U(z) = iA_0 + iA_1y + \dots + iA_{n-1}y^{n-1},$$

где A_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$ – действительные числа.

5. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ **P**

Рассмотрим следующую задачу:

Задача $\tilde{\mathbf{P}}_k$. Пусть даны k , $0 \leq k \leq n-1$, и $f^{(s)} \in L^1(\rho)$, $s = 0, 1, \dots, n-k-1$. Определить решение уравнения (1.2) так, чтобы выполнялись граничные условия

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\| \operatorname{Re} \frac{\partial^k U(x, y)}{\partial y^k} - f(x) \right\|_{L^1(\rho)} = 0$$

и

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\| \operatorname{Re} \frac{\partial^j U(x, y)}{\partial y^j} \right\|_{L^1(\rho)} = 0, \quad j \neq k, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Лемма 5.1. Пусть $f \in L^1(\rho)$ и $p \geq s > 0$. Тогда

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^p \|(K(m, f, z))^{(s)}\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Доказательство. Утверждение леммы верно, если f бесконечно дифференцируемая финитная функция. Поэтому, учитывая что этот класс всюду плотен в $L^1(\rho)$, достаточно установить оценку

$$y^p \|(K(m, f, x + iy))^{(s)}\|_{L^1(\rho)} \leq C \|f\|_{L^1(\rho)},$$

где C – постоянная, не зависящая от f и y . Имеем

$$(K(m, f, z))^{(s)} = \sum_{j=0}^s A_j \frac{(x + iy + i)^{m-j}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t + i)^m} \frac{dt}{(t - x - iy)^{s-j+1}},$$

где A_j – постоянные, и

$$|(K(m, f, z))^{(s)}| \leq M \sum_{j=0}^s (1 + |x|)^{m-j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{|t + i|^m} \frac{dt}{|t - x - iy|^{s-j+1}},$$

где M – постоянная, не зависящая от x . Учитывая, что $y < |t - x - iy|$, получаем

$$\begin{aligned} y^p |(K(m, f, z))^{(s)}| &\leq M y^{p-s+j} \sum_{j=0}^{s-1} (1 + |x|)^{m-j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{|t + i|^m} \frac{y dx}{|t - x - iy|^2} + \\ &+ M y^p (1 + |x|)^{m-s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{|t + i|^m} \frac{dt}{|t - x - iy|}, \end{aligned}$$

причем, если $m < s$, то последнее слагаемое равно нулю.

Поскольку

$$\begin{aligned} &y^{p-s+j} \left\| (1 + |x|)^{m-j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{|t + i|^m} \frac{dt}{|t - x - iy|^2} \right\|_{L^1(\rho)} \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{|t + i|^\alpha} |t + i|^{\alpha-m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y dx dt}{(1 + |x|)^{\alpha-m+j} |t - x - iy|^2} \end{aligned}$$

и

$$\sup_{-\infty < t < \infty} |t + i|^{\alpha-m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y dx}{(1 + |x|)^{\alpha-m+j} |t - x - iy|^2} < \infty,$$

получаем

$$\begin{aligned} &y^{p-s+j} \left\| (1 + |x|)^{m-j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{|t + i|^m} \frac{dt}{|t - x - iy|^2} \right\|_{L^1(\rho)} \leq C \|f\|_{L^1(\rho)}, \\ &j = 0, 1, \dots, s-1. \end{aligned}$$

Учитывая, что $s > 0$ будем иметь

$$\sup_{-\infty < t < \infty} |t + i|^{\alpha-m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y dx}{(1 + |x|)^{\alpha-m+s} |t - x - iy|} < \infty$$

и поэтому

$$y^p \left\| (1 + |x|)^{m-s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{|t+i|^m} \frac{dt}{|t-x-iy|} \right\|_{L^1(\rho)} \leq C \|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Следовательно

$$y^p \|(K(m, f, z))^{(s)}\|_{L^1(\rho)} \leq C \|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 5.2. *Функция*

$$U_{k0}(x, y) = \frac{y^k}{2k!} \varphi_{k0}(x + iy),$$

где

$$(5.1) \quad \varphi_{k0}(z) = (K(m, f, z) + K_*(m, f, z))$$

удовлетворяет граничным условиям

$$(5.2) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left\| Re \frac{\partial^j U_{k0}(x, y)}{\partial y^j} \right\|_{L^1(\rho)} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, k-1,$$

$$(5.3) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left\| Re \frac{\partial^k U_{k0}(x, y)}{\partial y^k} - f(x) \right\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Доказательство. Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial^j U_{k0}(x, y)}{\partial y^j} &= \sum_{s=0}^j A_s y^{k-s} (K(m, f, x + iy))^{(j-s)} + \\ &+ \sum_{s=0}^j A_s y^{k-s} (K_*(m, f, x + iy))^{(j-s)}, \end{aligned}$$

где A_s – постоянные, и в силу леммы 5.1

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^{k-s} \|(K(m, f, x + iy))^{(j-s)}\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

то

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial^j (y^k K(m, f, x + iy))}{\partial y^j} \right\|_{L^1(\rho)} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, k-1.$$

Аналогично

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial^j (y^k K_*(m, f, x + iy))}{\partial y^j} \right\|_{L^1(\rho)} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, k-1.$$

Утверждения (5.2) леммы доказаны. Для доказательства (5.3) заметим, что

$$\frac{\partial^k U_{k0}(x, y)}{\partial y^k} = \frac{1}{2} (K(m, f, x + iy) + K_*(m, f, x + iy)) +$$

$$+ \sum_{s=0}^{k-1} A_s y^{k-s} (K(m, f, x + iy) + K_*(m, f, x + iy))^{(k-s)},$$

где A_s – постоянные. Так как

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^{k-s} \|K(m, f, x + iy)\|_{L^1(\rho)} = \lim_{y \rightarrow 0} y^{k-s} \|K_*(m, f, x + iy)\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

то доказательство леммы следует из теоремы 2.1. $\square$

Пусть

$$\begin{aligned} \varphi_{k1}(z) &= -i(K(m, f, z) + K_*(m, f, z))', \\ U_{k1}(x, y) &= U_{k0}(x, y) + \frac{y^{k+1}}{2(k+1)!} \varphi_{k1}(x + iy). \end{aligned}$$

Так как

$$K'_m(f, z) = \frac{m}{z+i} K(m, f, z) + K(m, \tilde{f}, z) - K(m, f', z),$$

где $\tilde{f}(t) = mf(t)(t+i)^{-1}$, то как при доказательстве леммы 5.1 устанавливается,

что

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial^j}{\partial y^j} \left(\frac{y^{k+1}}{2(k+1)!} \varphi_{k1}(x + iy) \right) \right\|_{L^1(\rho)} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, k.$$

При $j = k+1$ имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{k+1}}{\partial y^{k+1}} \left(U_{k0}(x, y) + \frac{y^{k+1}}{2(k+1)!} \varphi_{k1}(x + iy) \right) = \\ &= \sum_{s=0}^{k-1} A_s y^{k+1-s} (K(m, f, x + iy) + K_*(m, f, x + iy))^{(k+1-s)} + \\ & \quad + \sum_{s=0}^k B_s y^{k+1-s} (\varphi_{k1}(x + iy))^{(k+1-s)}. \end{aligned}$$

А по лемме 5.1

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^{k+1-s} \|(K(m, f, x + iy))^{(k+1-s)}\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^{k+1-s} \|(K_*(m, f, x + iy))^{(k+1-s)}\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^{k+1-s} \|(\varphi_{k1}(x + iy))^{(k+1-s)}\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

Поэтому функция $U_{k1}(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\| \operatorname{Re} \frac{\partial^j U_{k1}(x, y)}{\partial y^j} \right\|_{L^1(\rho)} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, k+1, \quad j \neq k.$$

и

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\| \operatorname{Re} \frac{\partial^k U_{k1}(x, y)}{\partial y^k} - f(x) \right\|_{L^1(\rho)} = 0$$

Аналогично доказывается следующая

Теорема 5.1. *Функция*

$$U_k(z) = y^k \varphi_{k0}(z) + y^{k+1} \varphi_{k1}(z) + \dots + y^{n-1} \varphi_{k,n-1-k}(z),$$

где $\varphi_{k0}(z)$ определяется формулой (5.1), а

$$\varphi_{kj}(z) = -\frac{1}{(k+1)!} (C_{k+j}^k k! i^j \varphi_{k0}^{(j)}(z) + \dots + C_{k+j}^{k+j-1} (k+j-1)! i \varphi'_{k,j-1}(z)),$$

$j = 0, 1, \dots, n-k-1$, является решением задачи $\tilde{\mathbf{P}}_k$.

Из этой теоремы и из теоремы 4.1 непосредственно следует:

Теорема 5.2. Пусть $\alpha \geq 0$. Задача P имеет решение для любых функций $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$, $f_k^{(j)} \in L^1(\rho)$, $j = 0, 1, \dots, n-1-k$. Общее решение можно представить в виде

$$U(z) = \tilde{U}_0(z) + \tilde{U}_1(z),$$

где $\tilde{U}_0(z)$ – общее решение однородной задачи, а

$$\tilde{U}_1(z) = U_0(z) + U_1(z) + \dots + U_{n-1}(z),$$

где $U_k(z)$ – решения задачи $\tilde{\mathbf{P}}_k$.

Теорема 5.3. Пусть $\alpha < 0$, $f_k^{(j)}(x) \in L^1(\rho)$, $j = 0, 1, \dots, n-1-k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Для того, чтобы задача $\mathbf{P}$ имела решение необходимо и достаточно чтобы функции f_k удовлетворяли условиям (2.3).

Доказательство. Для простоты изложения приведем доказательство при $m = 3$.

Тогда общее решение уравнения (1.2) представимо в виде

$$(5.4) \quad U(z) = \varphi_0(z) + y \varphi_1(z) + y^2 \varphi_2(z)$$

Граничные условия (1.3) представимы в виде

$$(5.5) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left\| \operatorname{Re} \frac{\partial^k U(x, y)}{\partial y^k} - f_k(x) \right\|_{L^1(\rho)} = 0, \quad k = 0, 1, 2,$$

где $f_k^{(j)}(x) \in L^1(\rho)$, $k = 0, 1, 2$, $j = 0, 2-k$. Из (5.5), при $k = 0$ получаем

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\| \operatorname{Re}(\varphi_0(x + iy) + y \varphi_1(x + iy) + y^2 \varphi_2(x + iy)) - f_0(x) \right\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Положим

$$\operatorname{Re}(\varphi_0(x + iy) + y \varphi_1(x + iy) + y^2 \varphi_2(x + iy)) = f_{0y}(x).$$

В силу леммы 3.5

$$\begin{aligned} & \varphi_0(x + iy) + y\varphi_1(x + iy) + y^2\varphi_2(x + iy) = \\ & = \frac{1}{2}(K(m, f_{0y}, z) + K_*(m, f_{0y}, z)) + iA_{0y}, \end{aligned}$$

где A_{0y} действительное число, а f_{0y} удовлетворяет условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{0y}(x)x^k dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -m - 1.$$

Переходя к пределу при $y \rightarrow 0$ получаем

$$(5.6) \quad \varphi_0(z) = \frac{1}{2}(K(m, f_0, z) + K_*(m, f_0, z)) + iA_0$$

и f_0 удовлетворяет условиям (2.3). Далее имеем

$$\begin{aligned} & \lim_{y \rightarrow 0} \|\operatorname{Re}(i\varphi'_0(x + iy) + \varphi_1(x + iy) + y\varphi'_1(x + iy) + \\ & + 2y\varphi_2(x + iy) + y^2\varphi'_2(x + iy)) - f_1(x)\|_{L^1(\rho)} = 0. \end{aligned}$$

Применяя лемму 3.5 будем иметь

$$(5.7) \quad \varphi_1(z) = -i\varphi'_0(z) + \frac{1}{2}(K(m, f_1, z) + K_*(m, f_1, z)) + iA_1$$

где A_1 действительное число. По аналогии получаем

$$(5.8) \quad \varphi_2(z) = \frac{i^2}{2}\varphi''_0(z) + \frac{i}{2}\varphi'_1(z) + \frac{1}{4}(K(m, f_1, z) + K_*(m, f_1, z)) + iA_2,$$

где A_2 действительное число. Поскольку в силу леммы 5.1

$$\lim_{y \rightarrow 0} y\|\varphi_1(x + iy)\|_{L^1(\rho)} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} y^2\|\varphi_2(x + iy)\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

заключаем, что функция (5.4), где $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ определяются формулами (5.6) – (5.8) удовлетворяет условиям (5.5). Теорема доказана. $\square$

Abstract. The paper investigates the Schwarz type boundary value problem for polyanalytic functions when the boundary functions belong to weighted space $L^1(\rho)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. Н. Векуа, Новые Методы Решения Эллиптических Уравнений, М., (1948).
- [2] M. Nicolescu, Les Fonctions Poliharmonique, Herman, Paris (1936).
- [3] Н. Е. Товмасын, “Задача типа Дирихле для одного неправильно эллиптического уравнения высокого порядка”, Изв. НАН Армении, серия Математика, **27**, no. 1, 99 – 109 (1992).
- [4] N. E. Tovmasyan, “Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics”, World Scientific, Singapore–New-Jersey–London–Honk-Kong, 250 p. (1994).

- [5] H. Begehr and A. Kumar, “Boundary value problems for bi-polyanalytic functions”, *Appl. Anal.*, **85**, 1045 – 1077 (2006).
- [6] H. Begehr, A. Kumar, “Boundary value problems for the inhomogeneous polyanalytic equation”, *International mathematical journal of analysis and its applications, Analysis*, **25**, 55 – 71 (2005).
- [7] H. Begehr, D. Schmersau, “The Schwarz problem for polyanalytic functions”, Preprint, FU Berlin, ZAA (2004).
- [8] Г. М. Айрапетян, “Граничная задача типа Римана-Гильберта для n -голоморфных функций”, *Изв. НАН Армении, серия Математика*, **31**, по. 3, 24 – 41 (1996).
- [9] Г. М. Айрапетян, М. С. Айрапетян, “Граничная задача типа Римана-Гильберта для неправильно эллиптического уравнения второго порядка”, *Изв. НАН Армении, серия Математика*, **45**, по. 2, 3-20 (2010).
- [10] Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные Интегральные Уравнения*, Москва (1968).
- [11] Г. М. Айрапетян, “О разрешимости задачи Дирихле с граничными функциями из пространств с весом”, *Мат. заметки*, **76**, вып. 5, 643 – 650 (2004).
- [12] А. В. Бицадзе, *Краевые Задачи для Эллиптических Уравнений Второго Порядка*, Москва, Наука (1968).
- [13] М. Б. Балк, М. Ф. Зуев, “О полианалитических функциях”, *УМН*, **XXV**, вып. 5(155), 203 – 226 (1970).

Поступила 26 апреля 2011