

Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 6, 2011, стр. 67-76.

О ВРАЩЕНИИ ОБРАЗА ОКРУЖНОСТИ ПРИ ОТОБРАЖЕНИИ МЕРОМОРФНОЙ ФУНКЦИЕЙ

В. Г. ПЕТРОСЯН

Ереванский Государственный Университет

E-mail: *math@ysu.am*

Аннотация. В работе изучаются вращения образа окружности $|z| = r$ при отображении функциями $w(z) - p(z)$, где $w(z)$ – мероморфная в $\mathbb{C}$ функция, $p(z)$ – полином. В терминах отмеченных вращений устанавливаются некоторые аналоги второй основной теоремы Р. Неванлинны.

MSC2010 number: 30D30, 30D35, 30C15.

Ключевые слова: Теория Неванлинны; свойство близости a -точек.

1. ВВЕДЕНИЕ

Предполагаем известными основные положения теории распределения значений мероморфных функций, теории поверхностей наложения Л. Альфорса и пользуемся стандартными обозначениями из [1].

Из первой основной теоремы Р. Неванлинны вытекает следующие качественное следствие: если мероморфная в $|z| < R \leq \infty$ функция $w(z)$ (с неограниченной характеристикой) относительно редко принимает в круге $|z| \leq r < R$ значение a , то на окружности $|z| = r$ найдутся участки, на которых $|w(z) - a|$ “мало”. Иначе некоторые участки границы ∂F_r области $F_r = \{w(z) : |z| \leq r\}$ (F_r – часть римановой поверхности функции $w^{-1}(z)$, на которую отображается круг $|z| \leq r$ при отображении функцией $w(z)$) “близко” расположены от a .

Рассмотрим часть границы ∂F_r , лежащую над кругом $|w - a| < 1$ при $a \neq \infty$ и над $|w| > 1$, при $a = \infty$. Это множество является объединением некоторой совокупности дуг γ_a .

В работе [2] доказано следующее утверждение.

Теорема А. Пусть $w(z)$ мероморфная в $|z| < R \leq \infty$ функция, $a_\nu \in \bar{\mathbb{C}}$, $\nu = 1, 2, \dots, q$, $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$. Тогда для любого $r < R$ имеет место неравенство

$$(1.1) \quad \sum_{\nu=1}^q \int_{\Delta(r, a_\nu)} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w(z) - a_\nu) \right| d\varphi \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \frac{\partial}{\partial \varphi} w(z) \right| d\varphi + h \cdot L(z),$$

где $z = re^{i\varphi}$, а $L(z)$ – сферическая характеристика Альфорса,

$$\Delta(r, a) = \Delta(r, a, w) = \{z : |z| = r, |w(z) - a| < 1\}, |h| < h_1(a_1, \dots, a_q) < \infty.$$

Неравенство (1.1) показывает, что вращения дуг γ_{a_ν} , $\nu = 1, 2, \dots, q$ вокруг точки a_ν оценивается через вариацию угла между касательной к кривой $w(re^{i\varphi})$ и действительной осью (r – фиксировано).

Теорема А имеет определенное методическое значение. Оно состоит в том, что в ней как бы концентрируется “геометрия” доказательства соотношений типа второй основной теоремы Р. Неванлинны.

В доказательстве второй основной теоремы Р. Неванлинны и многих других основных результатов теории распределения важную роль играет следующее неравенство,

$$(1.2) \quad \sum_{\nu=1}^q m(r, a_\nu) \leq m\left(r, \frac{1}{w'}\right) + O\left[m\left(r, \frac{w'}{w}\right)\right].$$

Это неравенство позволяет оценку близости $w(z)$ к значениям a_ν , $\nu = 1, 2, \dots, q$ сводить к оценке близости $w'(z)$ к нулю. Величина $m\left(r, \frac{1}{w'}\right)$ выполняет как бы “собирательную” роль, поскольку в левой части неравенства (1.2) q произвольно. Неравенство (1.1) по существу является аналогом неравенства (1.2). В этом случае вместо величин $m(r, a)$, изучаются величины равные числу оборотов дуг γ_a вокруг точки a , а величина

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \frac{\partial}{\partial \varphi} w(z) \right| d\varphi$$

выполняет ту же роль, что и величина $m\left(r, \frac{1}{w'}\right)$ в неравенстве (1.2).

В настоящей работе вместо чисел $\{a_\nu\}$ рассматриваются полиномы:

$$P_\nu(z) = P_{\nu,n}(z) = \sum_{k=0}^n a_k^{(\nu)} z^k, \quad \nu = 1, 2, \dots, q,$$

где $a_n^{(i)} \neq a_n^{(j)}$, при $i \neq j$. Соответственно вместо множества $\Delta(r, a_\nu)$ рассматриваются множества $\Delta(r, P_\nu) = \Delta(r, w - P_\nu, 0)$.

В нижеследующей теореме 1.1 мы используем обозначение

$$E_\alpha(R) = \{r : \alpha^2 R \leq r \leq \alpha R\},$$

где $\alpha \in (0, 1)$ предполагаем фиксированным.

Теорема 1.1. Пусть $w(z)$ – мероморфная в $\mathbb{C}$ функция, $\beta \in (0, 1)$, $q > 2$ – фиксированные числа. Тогда для каждого $R > R_0$ существует такое подмножество

$E_\alpha(q, R)$ множества $E_\alpha(R)$, что $\text{mes } E_\alpha(q, R) > \beta \cdot \text{mes } E_\alpha(R)$ и при $r \in E_\alpha(q, R)$ выполняется неравенство

$$(1.3) \quad \sum_{\nu=1}^q \int_{\Delta(r, P_\nu)} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w(z) - P_\nu(z)) \right| d\varphi \\ \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \frac{\partial}{\partial \varphi} w^{(n)}(z) \right| d\varphi + o[T(cr, w)], \quad z = re^{i\varphi},$$

где $T(r)$ – неванлинновская характеристика $c = \text{const} > 1$.

Следствие 1.1. Если $w(z)$ имеет конечный нижний порядок λ , то существует последовательность $r = r_n \rightarrow \infty$ такое, что

$$(1.4) \quad \sum_{\nu=1}^q \int_{\Delta(r, P_\nu)} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w(z) - P_\nu(z)) \right| d\varphi \\ \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \frac{\partial}{\partial \varphi} w^{(n)}(z) \right| d\varphi + o[T(r)], \quad z = re^{i\varphi}.$$

В работе [3] введена величина $\nu(r, a) = \nu(r, a, w)$, которая характеризует участки $\{\gamma_\alpha\}$ границы ∂F_r . Обозначим через $2\pi\nu_{\gamma_\alpha}$ приращение на γ_α величины $\arg(w(z) - a)^{-1}$, при $a \neq \infty$ и величины $\arg w(z)$ при $a = \infty$. Положим

$$\nu(r, a) = \nu(r, a, w) = \sum_{\gamma_\alpha} [\nu_{\gamma_\alpha}],$$

где $[x]$ – целая часть числа x .

Величина $\nu(r, a)$ определяется структурой границы ∂F_r в окрестности точки a и сама характеризует эту структуру, показывая суммарное количество целочисленных оборотов дуг $\{\gamma_a\}$ вокруг точки a . В работе [2] вводятся следующие величины

$$\nu^+(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta(r, a)} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w(z) - a)^{-1} \right)^+ d\varphi, \\ \nu^-(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta(r, a)} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w(z) - a)^{-1} \right)^- d\varphi,$$

где $x^+ = \max\{x, 0\}$, $x^- = \min\{x, 0\}$ и рассматривается следующий вопрос: возможно ли, чтобы для широкого набора значений a и r величина $\nu^+(r, a) - \nu^-(r, a)$ (суммарное количество оборотов дуг γ_α вокруг точки a без учета знаков оборотов) существенно превосходила величину $\nu(r, a)$? Если бы это было так, то это указывало бы на “хаотичность” геометрической структуры ∂F_r . И наоборот, если для широкого набора значений a и r величины $\nu(r, a)$ и $\nu^+(r, a) - \nu^-(r, a)$ примерно равны, то это в известной степени указывает на рациональность строения ∂F_r , ибо количество оборотов (без учета знака), примерно равное $\nu(r, a)$, в силу

теоремы 1 работы [3] будет определять разность $A(r) - n(r, a)$, т.е. дефектность значения a .

В пользу такой рациональности, говорит следующий результат:

Теорема В. (см.[2]). Пусть $w(z)$ – мероморфная в $\mathbb{C}$ функция. Тогда для всех a , исключая быть может, не более чем счетное множество значений a , выполняется

$$(1.5) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\nu^+(r, a) - \nu^-(r, a)}{A(r)} = 0,$$

отсюда для тех же значений a имеем:

$$(1.6) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|\nu(r, a)|}{A(r)} = 0.$$

В соотношениях (1.5) и (1.6) содержится ответ на поставленный вопрос, поскольку из них следует, что имеет место общность в распределениях величин $\nu(r, a)$ и $\nu^+(r, a) - \nu^-(r, a)$. В настоящей работе доказывается следующая теорема:

Теорема 1.2. Пусть $w(z)$ – мероморфная в $\mathbb{C}$ функция; $\beta \in (0, 1)$, $q > 2$ – фиксированные числа. Тогда для каждого $R > R_0$ существует такое подмножество $E_\alpha(q, R) \subset E_\alpha(R)$, что $\text{mes} E_\alpha(q, R) > \beta \cdot \text{mes} E_\alpha(R)$, и при $r \in E_\alpha(q, R)$ выполняется неравенство

$$(1.7) \quad \sum_{k=1}^q [\nu^+(r, P_k) - \nu^-(r, P_k)] \leq K(\alpha, \beta, n) \cdot T(cr, w),$$

где $\nu^+(r, P_k) = \nu^+(r, w - P_k, 0)$, $\nu^-(r, P_k) = \nu^-(r, w - P_k, 0)$, $K(\alpha, \beta, n)$ – постоянная, зависящая от α , β и n .

Следствие 1.2. Если $w(z)$ имеет конечный нижний порядок λ , то существует последовательность $r = r_m \rightarrow \infty$ такая, что выполняется неравенство

$$(1.8) \quad \sum_{k=1}^q [\nu^+(r, P_k) - \nu^-(r, P_k)] \leq K(\lambda, n) \cdot T(r, w),$$

где $K(\lambda, n)$ – постоянная, зависящая от λ и n .

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Обозначим через

$$\begin{aligned} w_{\nu, i}(z) &= w^{(i)}(z) - P_{\nu}^{(i)}(z) + b_i^{(\nu)}, \\ \Delta^* \left(r, b_i^{(\nu)} \right) &= \Delta \left(r, b_i^{(\nu)}, w_{\nu, i} \right), \\ \Delta_l(r, a) &= \Delta_l(r, a, w) = \{z : |z| = r, |w(z) - a| \leq l\}, \\ \Delta_l^* \left(r, b_i^{(\nu)} \right) &= \Delta_l \left(r, b_i^{(\nu)}, w_{\nu, i} \right), \end{aligned}$$

где $b_i^{(\nu)} = i!a_i^{(\nu)}$ и $l = \max_{i,\nu} |b_i^{(\nu)}| + 1$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, $\nu = 1, 2, \dots, q$.

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 2.1. Пусть $w(z)$ – мероморфная в $\mathbb{C}$ функция. Тогда имеет место неравенство

$$(2.1) \quad \sum_{\nu=1}^q \int_{\Delta(r, P_\nu)} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w(z) - P_\nu(z)) \right| d\varphi \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \frac{\partial}{\partial \varphi} w^{(n)}(z) \right| d\varphi \\ + K_1 \sum_{\nu=1}^q \sum_{i=0}^{n-1} r \int_{\Delta_{\rho,i}^{\nu,i}} \left| \frac{w^{(i+2)}(z) - P_\nu^{(i+2)}}{w^{(i+1)}(z) - P_\nu^{(i+1)}} \right| d\varphi \\ + K_2 \sum_{\nu=1}^q \sum_{i=0}^n L(r, w^{(i)} - P_\nu^{(i)} + i!a_i^{(\nu)}), \quad z = re^{i\varphi},$$

где $\Delta_{\rho,i}^{\nu,i} = \Delta_\rho^*(r, b_i^{(\nu)}) \setminus \Delta_l^*(r, b_{i+1}^{(\nu)})$, $L(z)$ – сферическая характеристика Л. Альфорса, $\rho \in (0, 1)$ – фиксированное число, K_1, K_2 – постоянные.

Доказательство. В работе [2] установлено следующее неравенство

$$(2.2) \quad \int_{\Delta(r,a)} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w(z) - a) \right| d\varphi \leq \int_{\Delta_\rho(r,a)} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \frac{\partial}{\partial \varphi} w(z) \right| d\varphi + O(L(r, w)).$$

Используя это неравенство получим

$$\int_{\Delta^*(r, b_i^{(\nu)})} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w_{\nu,i}(z) - b_i^{(\nu)}) \right| d\varphi \\ \leq \int_{\Delta_\rho^*(r, b_i^{(\nu)})} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \frac{\partial}{\partial \varphi} w_{\nu,i}(z) \right| d\varphi + O(L(r, w_{\nu,i})).$$

Отсюда нетрудно видеть, что

$$(2.3) \quad \int_{\Delta^*(r, b_i^{(\nu)})} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w_{\nu,i}(z) - b_i^{(\nu)}) \right| d\varphi \\ \leq \int_{\Delta_\rho^*(r, b_i^{(\nu)}) \setminus \Delta^*(r, b_{i+1}^{(\nu)})} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w_{\nu,i+1}(z) - b_{i+1}^{(\nu)}) \right| d\varphi \\ + \int_{\Delta^*(r, b_{i+1}^{(\nu)})} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w_{\nu,i+1}(z) - b_{i+1}^{(\nu)}) \right| d\varphi + O(L(r, w_{\nu,i})) \\ \equiv I(r) + \int_{\Delta^*(r, b_{i+1}^{(\nu)})} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w_{\nu,i+1}(z) - b_{i+1}^{(\nu)}) \right| d\varphi + O(L(r, w_{\nu,i})).$$

Оценим первый интеграл в правой части неравенства (2.3). Обозначим через $\Delta_l^{\nu,i} = \Delta_l^* \left(r, b_i^{(\nu)} \right) \setminus \Delta^* \left(r, b_{i+1}^{(\nu)} \right)$, откуда получим

$$(2.4) \quad \begin{aligned} I(r) &\leq \int_{\Delta_l^{\nu,i}} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \left(w_{\nu,i+1}(z) - b_{i+1}^{(\nu)} \right) \right| d\varphi \\ &\quad + \int_{\Delta_{\rho,l}^{\nu,i}} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \left(\frac{w_{\nu,i+1}(z) - b_{i+1}^{(\nu)}}{w_{\nu,i+1}(z)} \right) \right| d\varphi \\ &\quad + \int_{\Delta_{\rho,l}^{\nu,i}} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg w_{\nu,i+1}(z) \right| d\varphi \equiv I_1(r) + I_2(r) + I_3(r). \end{aligned}$$

Поскольку при $z \in \Delta_l^{\nu,i}$, $1 < |w_{\nu,i+1}(z) - b_{i+1}^{(\nu)}| \leq l$, то имеем

$$(2.5) \quad \begin{aligned} I_1(r) &\leq r \int_{\Delta_l^{\nu,i}} \left| \frac{w'_{\nu,i+1}(z)}{w_{\nu,i+1}(z) - b_{i+1}^{(\nu)}} \right| d\varphi \leq Kr \int_{\Delta_l^{\nu,i}} |w'_{\nu,i+1}(z)| d\varphi \\ &\leq Kr \int_{\Delta_l^{\nu,i}} \frac{|w'_{\nu,i+1}(z)|}{1 + |w_{\nu,i+1}(z)|^2} d\varphi \leq KL(r, w_{\nu,i+1}). \end{aligned}$$

Для оценивания интеграла $I_2(r)$ нетрудно видеть, что при $z \in \Delta_{\rho,l}^{\nu,i}$ имеем $|w_{\nu,i+1}(z)| > 1$ и $|w_{\nu,i+1}(z) - b_{i+1}^{(\nu)}| > 1$. Учитывая эти неравенства, получим

$$\left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \left(\frac{w_{\nu,i+1}(z) - b_{i+1}^{(\nu)}}{w_{\nu,i+1}(z)} \right) \right| = r \left| \frac{\partial}{\partial r} \ln \left(\frac{w_{\nu,i+1}(z) - b_{i+1}^{(\nu)}}{w_{\nu,i+1}(z)} \right) \right| \leq Kr \frac{|w'_{\nu,i+1}(z)|}{1 + |w_{\nu,i+1}(z)|^2}.$$

Следовательно

$$(2.6) \quad I_2(r) \leq KL(r, w_{\nu,i+1}).$$

Оценим интеграл $I_3(r)$.

$$I_3(r) = \int_{\Delta_{\rho,l}^{\nu,i}} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg w_{\nu,i+1}(z) \right| d\varphi \leq r \int_{\Delta_{\rho,l}^{\nu,i}} \left| \frac{w'_{\nu,i+1}(z)}{w_{\nu,i+1}(z)} \right| d\varphi$$

и

$$\left| \frac{w'_{\nu,i+1}(z)}{w_{\nu,i+1}(z)} \right| \leq K \left| \frac{w'_{\nu,i+1}(z)}{w_{\nu,i+1}(z) - b_{i+1}^{(\nu)}} \right|, \quad z \in \Delta_{\rho,l}^{\nu,i}.$$

Следовательно,

$$(2.7) \quad I_3(r) \leq Kr \int_{\Delta_{\rho,l}^{\nu,i}} \left| \frac{w'_{\nu,i+1}(z)}{w_{\nu,i+1}(z) - b_{i+1}^{(\nu)}} \right| d\varphi.$$

Учитывая неравенства (2.3) – (2.7), получим

$$\begin{aligned} \int_{\Delta^*(r, b_i^{(\nu)})} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w_{\nu, i}(z) - b_i^{(\nu)}) \right| d\varphi &\leq \int_{\Delta^*(r, b_{i+1}^{(\nu)})} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w_{\nu, i+1}(z) - b_{i+1}^{(\nu)}) \right| d\varphi \\ &+ K_1 r \int_{\Delta_{\rho, i}^{\nu, i}} \left| \frac{w'_{\nu, i+1}(z)}{w_{\nu, i+1}(z) - b_{i+1}^{(\nu)}} \right| d\varphi + K_2 L(r, w_{\nu, i}) + K_3 L(r, w_{\nu, i+1}). \end{aligned}$$

Последовательно применяя это неравенство при $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ и учитывая, что $w_{\nu, 0}(z) - b_0^{(\nu)} = w(z) - P_\nu(z)$, $\Delta^*(r, b_0^{(\nu)}) = \Delta(r, P_\nu)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Delta(r, P_\nu)} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w(z) - P_\nu(z)) \right| d\varphi &\leq \int_{\Delta^*(r, b_n^{(\nu)})} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w_{\nu, n}(z) - b_n^{(\nu)}) \right| d\varphi \\ &+ K_1 \sum_{i=0}^{n-1} r \int_{\Delta_{\rho, i}^{\nu, i}} \left| \frac{w'_{\nu, i+1}(z)}{w_{\nu, i+1}(z) - b_{i+1}^{(\nu)}} \right| d\varphi + \sum_{i=0}^n L(r, w_{\nu, i}). \end{aligned}$$

Отсюда применяя неравенство (2.2) для первого интеграла правой части этого неравенства и учитывая, что $w_{\nu, n}(z) = w^{(n)}(z)$, $\Delta^*(r, b_n^{(\nu)}) = \Delta(r, b_n^{(\nu)}, w^{(n)})$, $\nu = 1, 2, \dots, q$, получим

$$\begin{aligned} (2.8) \quad \int_{\Delta(r, P_\nu)} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w(z) - P_\nu(z)) \right| d\varphi &\leq \int_{\Delta_\rho(r, b_n^{(\nu)}, w^{(n)})} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \frac{\partial}{\partial \varphi} w^{(n)}(z) \right| d\varphi \\ &+ K_1 \sum_{i=0}^{n-1} r \int_{\Delta_{\rho, i}^{\nu, i}} \left| \frac{w'_{\nu, i+1}(z)}{w_{\nu, i+1}(z) - b_{i+1}^{(\nu)}} \right| d\varphi + \sum_{i=0}^n L(r, w_{\nu, i}). \end{aligned}$$

Пологая $\rho = \min \left\{ \min_{i \neq j} \frac{b_n^{(i)} - b_n^{(j)}}{2}, 1 \right\}$, очевидно получаем

$$\Delta_\rho(r, b_n^{(i)}, w^{(n)}) \cap \Delta_\rho(r, b_n^{(j)}, w^{(n)}) = \Phi, \quad i \neq j.$$

Учитывая это и суммируя по ν ($\nu = 1, 2, \dots, q$) неравенство (2.8), получим утверждение леммы 2.1. $\square$

Лемма 2.2. Пусть $w(z)$ – мероморфная в $\mathbb{C}$ -функция. Тогда имеет место неравенство ($z = re^{i\varphi}$)

$$(2.9) \quad \int_0^\pi \int_{\Delta(r, w, w')} \left| \frac{w''(re^{i\varphi})}{w'(re^{i\varphi})} \right| r dr d\varphi \leq K(c) \left\{ RT^{1/2}(cR, w) + T(cR, w) \right\}, \quad R > R_0,$$

где $\Delta(r, w, w') = \Delta(r, 0, w) \setminus \Delta(r, 0, w')$, $c = \text{const} > 1$.

Доказательство. Так как при $z \in \Delta(r, w, w')$, $|w(z)| < 1$ и $|w'(z)| > 1$, то нетрудно видеть, что

$$\left| \frac{w''(z)}{w'(z)} \right| \leq \frac{|w''(z)|}{1 + |w'(z)|^2} + 2 \frac{|w''(z)|}{1 + |w'(z)|^2} \frac{|w'(z)|}{1 + |w(z)|^2}.$$

Отсюда используя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\int_0^\pi \int_{\Delta(r,w,w')} \left| \frac{w''(z)}{w'(z)} \right| r dr d\varphi \leq K A^{1/2}(R, w') \left\{ R + A^{1/2}(R, w) \right\}.$$

Учитывая очевидное соотношение

$$(2.10) \quad A(r, w) < \frac{T(cr, w)}{\ln c}, \quad c > 1,$$

имеем

$$\int_0^\pi \int_{\Delta(r,w,w')} \left| \frac{w''(z)}{w'(z)} \right| r dr d\varphi \leq K T^{1/2}(cR, w') \left\{ R + T^{1/2}(cR, w) \right\}.$$

Используя теперь известное неравенство (см. [4], теорема 2.3, Гл. III)

$$(2.11) \quad T(r, w^{(l)}) \leq (l+1)T(r, w) + Q(r, w),$$

где $Q(r, w) = o[T(r_1, w)]$, $r_1 > r$, $r \rightarrow \infty$, получим

$$\int_0^\pi \int_{\Delta(r,w,w')} \left| \frac{w''(z)}{w'(z)} \right| r dr d\varphi \leq K \left\{ T^{1/2}(cR, w)R + T(cR, w) \right\}, \quad R > R_0.$$

Лемма доказана. $\square$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство теоремы 1.1. Интегрируя по r неравенство (2.1) леммы 2.1 получим

$$(3.1) \quad \begin{aligned} & \int_{E_\alpha(R)} \left[\sum_{\nu=1}^q \int_{\Delta(r, P_\nu)} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w(z) - P_\nu(z)) \right| d\varphi \right. \\ & \quad \left. - \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \frac{\partial}{\partial \varphi} w^{(n)}(z) \right| d\varphi \right] dr \\ & \leq K_1 \sum_{\nu=1}^q \sum_{i=0}^{n-1} \int_{E_\alpha(R)} \int_{\Delta_{\rho,i}^{\nu,i}} \left| \frac{w^{(i+2)}(z) - P_\nu^{(i+2)}}{w^{(i+1)}(z) - P_\nu^{(i+1)}} \right| r dr d\varphi \\ & \quad + K_2 \sum_{\nu=1}^q \sum_{i=0}^n \int_{E_\alpha(R)} L\left(r, w^{(i)} - P_\nu^{(i)} + i! a_i^{(\nu)}\right) dr. \end{aligned}$$

Используя лемму 2.2, неравенство (2.11) и

$$(3.2) \quad \left(\sum_{\nu} c_\nu \right)^\gamma \leq \sum_{\nu} c_\nu^\gamma, \quad 0 < \gamma < 1, \quad c_\nu \geq 0,$$

имеем

$$(3.3) \quad \int_{E_\alpha(R)} \int_{\Delta_{\rho,i}^{\nu,i}} \left| \frac{w^{(i+2)}(z) - P_\nu^{(i+2)}}{w^{(i+1)}(z) - P_\nu^{(i+1)}} \right| r dr d\varphi \leq K \left\{ T^{1/2}(cR, w)R + T(cR, w) \right\}.$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\int_{E_\alpha(R)} L \left(r, w^{(i)} - P_\nu^{(i)} + i!a_i^{(\nu)} \right) dr \leq KRA^{1/2} \left(\alpha R, w^{(i)} - P_\nu^{(i)} + i!a_i^{(\nu)} \right).$$

Отсюда учитывая неравенства (2.10), (2.11) и (3.2) имеем

$$(3.4) \quad \int_{E_\alpha(R)} L \left(r, w^{(i)} - P_\nu^{(i)} + i!a_i^{(\nu)} \right) dr \leq KRT^{1/2}(cR, w), \quad R > R_0.$$

Из неравенства (3.1), (3.3), (3.4) получим

$$(3.5) \quad \int_{E_\alpha(R)} \left[\sum_{\nu=1}^q \int_{\Delta(r, P_\nu)} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w(z) - P_\nu(z)) \right| d\varphi - \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \frac{\partial}{\partial \varphi} w^{(n)}(z) \right| d\varphi \right] dr \leq K \left\{ R^{1/2}(cR, w) + T(cR, w) \right\}, \quad R > R_0.$$

Отсюда следует утверждение теоремы 1.1. $\square$

Доказательство следствия 1.1. Используя теорему о среднем значении в некоторой точке $R^* \in (\alpha^2 R, \alpha R)$ из неравенства (3.5) получим

$$(3.6) \quad \sum_{\nu=1}^q \int_{\Delta(R^*, P_\nu)} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w(R^* e^{i\varphi}) - P_\nu(R^* e^{i\varphi})) \right| d\varphi \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \frac{\partial}{\partial \varphi} w^{(n)}(R^* e^{i\varphi}) \right| d\varphi + K \left\{ T^{1/2}(cR, w) + \frac{1}{R} T(cR, w) \right\}.$$

Выберем множество $R_n = R_n(\alpha, c)$ значений R , зависящих только от α и c , для которых выполняется неравенство

$$T(cR, w) = T\left(\frac{c}{\alpha^2} \alpha^2 R, w\right) \leq \left(\frac{c}{\alpha^2}\right)^{\lambda+1} T(\alpha^2 R, w) \leq K(c, \alpha, \lambda) T(R^*, w).$$

Возможность такого выбора обеспечивается леммой 1.3.1. из работы [5]. С таким R_n из неравенства (3.6) имеем ($R^* = R_n \rightarrow \infty$)

$$\sum_{\nu=1}^q \int_{\Delta(R^*, P_\nu)} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w(R^* e^{i\varphi}) - P_\nu(R^* e^{i\varphi})) \right| d\varphi \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \frac{\partial}{\partial \varphi} w^{(n)}(R^* e^{i\varphi}) \right| d\varphi + o(T(R^*, w)).$$

Следствие доказано. $\square$

Доказательство теоремы 1.2. Нетрудно видеть, что

$$\nu^+(r, P_k) - \nu^-(r, P_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta(r, P_k)} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w(z) - P_k(z)) \right| d\varphi, \quad z = re^{i\varphi}.$$

Отсюда и из неравенства (3.5) получим

$$\begin{aligned} & \int_{E_\alpha(R)} \left\{ \sum_{k=1}^q [\nu^+(r, P_k) - \nu^-(r, P_k)] \right\} dr \\ & \leq \int_{E_\alpha(R)} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \frac{\partial}{\partial \varphi} w^{(n)}(z) \right| d\varphi dr \\ & \quad + K \left\{ T^{1/2}(cR, w)R + T(cR, w) \right\} \\ & \leq \int_{E_\alpha(R)} \int_0^{2\pi} \left| \frac{w^{(n2)}(z)}{w^{(n+1)}(z)} \right| r dr d\varphi + K \left\{ T^{1/2}(cR, w)R + T(cR, w) \right\}. \end{aligned}$$

Используя лемму 2 работы [6] и неравенство (2.11) имеем

$$\int_{E_\alpha(R)} \left\{ \sum_{k=1}^q [\nu^+(r, P_k) - \nu^-(r, P_k)] \right\} dr \leq KRT(cR, w), \quad R > R_0.$$

Теорема доказана. $\square$

Следствие 1.2 доказывается аналогично доказательству следствия 1.1.

Автор выражает благодарность Г. А. Барсегяну за ценные обсуждения результатов.

Abstract. The paper studies the rotation of the image of the sphere $|z| = r$ under mappings by functions of the form $w(z) - p(z)$, where $w(z)$ is an entire meromorphic function, while $p(z)$ is a polynomial. In terms of rotations, some analogs of the Nevanlinna Second Fundamental Theorem are established.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Неванlinna, Однозначные Аналитические Функции, ОГИЗ (1941).
- [2] Г. А. Барсегян, “О геометрической структуре образа круга при отображениях мероморфными функциями”, Матем. сб., **106**, no. 1, 35 – 43 (1978).
- [3] Г. А. Барсегян, “Дефектные значения и структуры поверхностей наложения”, Изв. АН Арм. ССР, сер. Матем., XII, no. 1, 46 – 53 (1977).
- [4] А. А. Гольдберг, И. В. Островский, Распределение Значений Мероморфных Функций, М., Наука (1970).
- [5] В. П. Петренко, Рост Мероморфных Функций, Харьков: Выш. Школа (1978).
- [6] Г. А. Барсегян, “О геометрии мероморфных функций”, Матем. сб., **144** (156), no. 2, 179 – 226 (1981).

Поступила 3 ноября 2010