Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 6, 2011, стр. 41-48.

ОБ АБСОЛЮТНОЙ РАСХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ-ХААРА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К. Р. МУРАДЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *karenmuradyan1988@mail.ru*

Аннотация. В работе рассматриваются некоторые вопросы абсолютной расходимости почти всюду рядов Фурье по системе Хаара. Строится измеримое множество $E \subset [0,1]$, такое, что ряд Фурье-Хаара его характеристической функции абсолютно расходится почти всюду.

MSC2010 number: 42A20.

Ключевые слова: ряды Фурье-Хаара; абсолютная сходимость.

Хорошо известно, что ряды Фурье-Хаара функций из класса суммируемых по Лебегу функций $L^1(0,1)$ сходятся почти всюду. Многие работы посвящены вопросам безусловной сходимости почти всюду рядов Фурье-Хаара. Говорят, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ безусловно сходится почти всюду на множестве E, если при любой перестановке его членов этот ряд сходится п.в. на E. Е. М. Никишин и П. Л. Ульянов в [2] (см. также [1], стр.104) установили, что для безусловной сходимости любого ряда по системе Хаара

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$$

на некотором множестве $E \subset [0,1]$ необходимо и достаточно, чтобы этот ряд абсолютно сходился п.в. на множестве E. Поэтому многие вопросы безусловной сходимости рядов Хаара сводятся к вопросам их абсолютной сходимости. В работе [3] П. Л. Ульянов привел пример функции из класса $L^2(0,1)$, ряд Фурье-Хаара которой расходится п.в. на $(0,1)$ после некоторой перестановки его членов. Далее, А. М. Олевский [4], [5] распространил этот результат для общих полных ортонормированных систем, при этом установив, что эту исключительную функцию можно брать непрерывной. В настоящей работе мы рассматриваем вопрос безусловной или абсолютной расходимости рядов Фурье-Хаара для характеристических функций.

Напомним определение системы Хаара $\{\chi_n(x),\ n = 1, 2, \ldots\}$ (см. [1] часть 3.1). Двоичными интервалами назовем интервалы вида

$$\Delta_n = \Delta_k^i = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, 2^k, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где $n = 2^k + i$. Первая функция Хаара определяется $\chi_1(x) \equiv 1$. При $n \geq 2$ имеем

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 2^{k/2} & \text{при} \quad x \in \Delta_{k+1}^{2i-1}, \\ -2^{k/2} & \text{при} \quad x \in \Delta_{k+1}^{2i}, \\ 0 & \text{при} \quad x \notin \bar{\Delta}_k^i, \end{cases}$$

а в точках разрыва функция $\chi_n(x)$ определяется равенствами

$$\chi_n(x) = \frac{1}{2}(\chi_n(x+) + \chi_n(x-)), \quad x \in (0, 1),$$
$$\chi_n(0) = \chi_n(0+), \quad \chi_n(1) = \chi_n(1-).$$

Через $a_n(f)$ обозначим коэффициент Фурье-Хаара функции $f \in L^1(0, 1)$, т.е.

$$a_n(f) = \int_0^1 f(t)\chi_n(t)dt.$$

Обозначим через $\mathbb{I}_F(x)$ характерическую функцию множества $F \subset [0, 1]$. В настоящей работе доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $G \subset [0, 1]$, с $|G| < \varepsilon$, такое, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(\mathbb{I}_G)\chi_k(x)| = \infty \ \textit{п.в. на}\ [0, 1].$$

Теорема 2. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $E \subset [0, 1]$, с $|E| < \varepsilon$, такое, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(\mathbb{I}_E)\chi_k(x)| = \infty \ \textit{п.в. на}\ [0, 1] \setminus E.$$

Отметим, что в теореме 2 нельзя получить расходимость п.в. на $[0, 1]$ так как из открытости E следует безусловная сходимость в любой точке $x \in E$.
В дальнейшем, множество $E \subset (0, 1)$ назовем простым, если оно есть объединение конечного числа двоичных интервалов, а $\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел.
Доказательства теорем основаны на следующем утверждении.

Лемма 1. *Пусть* $0 < \varepsilon < 1$, $m \in \mathbb{N}$, *а* F *есть простое множество. Тогда существуют простое множество* E, *и число* $n \in \mathbb{N}$ *такие, что*

$$E \cap F = \varnothing, \quad |E| < \varepsilon,$$

$$|\{x \in [0,1] \setminus F : \sum_{p=m}^{n} |a_p(\mathbb{I}_E)\chi_p(x)| < \frac{1}{\varepsilon}\}| < \varepsilon$$

$$\mathbb{I}_E(x) = \sum_{p=1}^{n} a_p(\mathbb{I}_E)\chi_p(x).$$

Доказательство. Как уже отмечалось выше, существует функция $f \in L^\infty$ такая, что

$$\sum_{p=1}^{\infty} |a_p(f)\chi_p(x)| = \infty \text{ п.в. .} \tag{1}$$

При этом, очевидно, можно предполагать, что $\|f\|_\infty \leq 1$ и $f(x) \geq 0$.
Обозначим

$$g(x) = f(x)\mathbb{I}_{(F)^c}(x).$$

Из определения системы Хаара следует, что

$$a_n(g) = a_n(f) \text{ при } \Delta_n \subset F^c.$$

Отсюда и из (1) ясно, что

$$\sum_{p=1}^{\infty} |a_p(g)\chi_p(x)| = \infty \text{ п.в. на } F^c. \tag{2}$$

Из структуры множества F можно заключить, что F является объединением конечного числа двоичных открытых интервалов длины $\nu = 2^{-q}$ и при этом можно предполагать, что $q > m$. Далее используя (2) можем найти число $n = 2^k$ ($k \in \mathbb{N}$), такое, что

$$|\{x \in [0,1] \setminus F : \sum_{p=\nu}^{n} |a_p(g)\chi_p(x)| < \frac{1}{\varepsilon^2}\}| < \varepsilon \tag{3}$$

Для данного интервала $\Delta = (a,b)$ рассмотрим функцию

$$\varphi_\Delta(x) = \mathbb{I}_{(a,c)}(x),$$

где

$$c = a + \varepsilon \int_a^b g(x)dx.$$

Имея в виду, что $0 \le g(x) \le 1$, получим

$$c \in (a,b), \quad c - a < \varepsilon(b-a), \tag{4}$$

$$\int_a^b \varphi_\Delta(x)dx = \varepsilon \int_a^b g(x)dx. \tag{5}$$

Обозначим

$$\tilde{g}(x) = \sum_{i:\Delta^i_{k+1} \subset F^c} \varphi_{\Delta^i_{k+1}}(x). \tag{6}$$

Очевидно

$$\tilde{g}(x) = \mathbb{I}_E(x) \text{ и } |E| < \varepsilon|F^c| < \varepsilon, \tag{7}$$

где $E \subset F^c$ есть некоторое множество являющееся объединением конечного числа интервалов. Так как функции Хаара $\chi_p(x)$, $p = 1, 2, \ldots, n = 2^k$ постоянны на интервалах Δ^j_{k+1}, то, с учетом (5) и (6), получим

$$a_p(\tilde{g}) = a_p(\mathbb{I}_E) = \varepsilon a_p(g), \quad p = \nu, \nu+1, \ldots, n.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{p=\nu}^{n} |a_p(\mathbb{I}_E)\chi_p(x)| = \varepsilon \sum_{p=\nu}^{n} |a_p(g)\chi_p(x)|$$

Комбинируя последнее с (3), легко получить

$$|\{x \in [0,1] \setminus F : \sum_{p=\nu}^{n} |a_p(\mathbb{I}_E)\chi_p(x)| < \frac{1}{\varepsilon}\}| < \varepsilon. \tag{8}$$

Имеем, что E есть конечное объединение некоторых интервалов. Из соображений непрерывности легко усмотреть, что можно изменить множество E так, чтобы концы его составляющих интервалов стали двоично рациональными и сохранились неравенства (7) и (8). Можно предполагать таковым является множество E и учитывая это , имеем, что $\mathbb{I}_E(x) = S_q(\mathbb{I}_E, x)$ при некотором $q \in \mathbb{N}$. Без ограничения общности можем считать, что $n = q$, т.е. имеем

$$\mathbb{I}_E(x) = S_n(\mathbb{I}_E, x).$$

Очевидно, что E удовлетворяет условиям леммы. $\square$

Доказательство теоремы 1. Используя лемму при $F = \varnothing$, найдем простое множество E_1 и число $n_1 \in \mathbb{N}$ такие, что

$$|E_1| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|\left\{x : \sum_{i=1}^{n_1} |a_i(\mathbb{I}_{E_1})\chi_i(x)| < \frac{2}{\varepsilon}\right\}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Учитывая, что E_1 состоит из двоичных интервалов, имеем, что

$$\mathbb{I}_{E_1}(x) = S_{n_1}(\mathbb{I}_{E_1}, x).$$

Обозначим $G_1 = E_1$. Очевидно, что существует положительное число $\varepsilon_1 < \varepsilon/2$ такое, что для любого множества A с условием

$$|G_1 \bigtriangleup A| < \varepsilon_1,$$

имеем

$$|\{x : \sum_{i=1}^{n_1} |a_i(\mathbb{I}_A)\chi_i(x)| < \frac{2}{\varepsilon}\}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Еще раз применив лемму, найдем простое E_2 и число $n_2 > n_1$ такие, что

$$|E_2| < \frac{\varepsilon_1}{2}, \tag{9}$$

$$|\{x : \sum_{i=n_1+1}^{n_2} |a_i(\mathbb{I}_{E_2})\chi_i(x)| < \frac{2}{\varepsilon_1}\}| < \frac{\varepsilon_1}{2}, \tag{10}$$

$$\mathbb{I}_{E_2}(x) = S_{n_2}(\mathbb{I}_{E_2}, x).$$

Обозначим $G_2 = G_1 \bigtriangleup E_2$. Если $n > n_1$, то выполняется одно из соотношений $\Delta_n \subset G_1$ или $\Delta_n \cap G_1 = \varnothing$. Если $\Delta_n \subset G_1$, то имеем

$$\begin{aligned} a_n(\mathbb{I}_{G_2}) &= \int_{\Delta_n} (\mathbb{I}_{G_1}(x) - \mathbb{I}_{E_2}(x))\chi_n(x)dx \\ &= \int_{\Delta_n} (\mathbb{I}_{G_1}(x))\chi_n(x)dx - \int_{\Delta_n} (\mathbb{I}_{E_2}(x))\chi_n(x)dx = \\ &= -\int_{\Delta_n} (\mathbb{I}_{E_2}(x))\chi_n(x)dx = -a_n(\mathbb{I}_{E_2}). \end{aligned}$$

Если же $\Delta_n \cap G_1 = \varnothing$, то очевидно, что

$$a_n(\mathbb{I}_{G_2}) = a_n(\mathbb{I}_{E_2}).$$

Отсюда имеем $|a_n(\mathbb{I}_{G_2})| = |a_n(\mathbb{I}_{E_2})|$, при $n_1 < n \leq n_2$, и следовательно имеет место (10), если заменить множество E_2 на G_2. Очевидно, что существует ε_2,

$0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1/2$, такое, что для любого множества A, для которого $|G_2 \vartriangle A| < \varepsilon_2$, имеем:

$$|\{x : \sum_{i=n_1+1}^{n_2} |a_i(\mathbb{I}_A)\chi_i(x)| < \frac{2}{\varepsilon_1}\}| < \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Продолжив этот процесс по индукции, мы получим простые множества E_k, G_k, $k = 1, 2, \ldots$, числа $n_k \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon_k > 0$ такие, что

$$G_k = G_{k-1} \vartriangle E_k, \tag{11}$$

$$\varepsilon_k < \frac{\varepsilon_{k-1}}{2}, \tag{12}$$

$$|E_k| < \frac{\varepsilon_{k-1}}{2}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

и при этом для любого множества A, удовлетворяющее условию $|G_k \vartriangle A| < \varepsilon_k$, имеет место неравенство

$$|\{x : \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} |a_i(\mathbb{I}_A)\chi_i(x)| < \frac{2}{\varepsilon_{k-1}}\}| < \frac{\varepsilon_{k-1}}{2}.$$

Обозначим

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i \geq k} G_i.$$

Из (11) легко следует, что

$$G \vartriangle G_k \subset \bigcup_{i=k+1}^{\infty} E_i.$$

Отсюда имеем

$$|G \vartriangle G_k| \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} |E_i| < \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{i-1}}{2} \leq \varepsilon_k.$$

Далее, обозначим

$$A_k = \{x : \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} |a_i(\mathbb{I}_G)\chi_i(x)| < \frac{2}{\varepsilon_{k-1}}\}, \qquad A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i \geq k} (A_i)^c.$$

С учетом (13), имеем

$$|A_k| < \frac{\varepsilon_{k-1}}{2} < \frac{\varepsilon}{2^k},$$

и следовательно $|A| = 1$. С другой стороны из определения множества A ясно, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i(\mathbb{I}_G)\chi_i(x)| = \infty, \quad x \in A.$$

Из неравенств $|G \vartriangle G_1| < \varepsilon_1$, $|G_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\varepsilon_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ следует, что $|G| < \varepsilon$, и теорема доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2. Используя лемму при $F = \varnothing$, найдем простое множество E_1 и число $n_1 \in \mathbb{N}$ такие, что $|E_1| < \frac{\varepsilon}{2}$,

$$\left|\left\{x : \sum_{i=1}^{n_1} |a_i(\mathbb{I}_{E_1})\chi_i(x)| < \frac{2}{\varepsilon}\right\}\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \mathbb{I}_{E_1}(x) = S_{n_1}(\mathbb{I}_{E_1}, x).$$

Еще раз применив лемму, при $F = E_1$ найдем простое E_2 и число $n_2 > n_1$ такие, что

$$E_2 \cap E_1 = \varnothing, \qquad |E_2| < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad |\{x : \sum_{i=n_1+1}^{n_2} |a_i(\mathbb{I}_{E_2})\chi_i(x)| < \frac{4}{\varepsilon}\}| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Можем взять E_2 такое, что

$$\sum_{i=1}^{n_1} |a_i(\mathbb{I}_{E_2})\chi_i(x)| < \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{I}_{E_2}(x) = S_{n_2}(\mathbb{I}_{E_2}, x).$$

Продолжив этот процесс по индукции, мы получим простые множества E_k, $k = 1, 2, \ldots$, числа $n_k \in \mathbb{N}$ такие, что

$$E_k \cap (\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i) = \varnothing, |E_k| < \frac{\varepsilon}{2^k}, \tag{14}$$

$$|\{x \in [0,1] \setminus (\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i) : \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} |a_i(\mathbb{I}_{E_k})\chi_i(x)| < \frac{2^k}{\varepsilon}\}| \leq \frac{\varepsilon}{2^k}, \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{n_{k-1}} |a_i(\mathbb{I}_{E_k})\chi_i(x)| < \frac{1}{2^{k-1}}, \tag{16}$$

$$\mathbb{I}_{E_k}(x) = S_{n_k}(\mathbb{I}_{E_k}, x). \tag{17}$$

Обозначим

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$$

Из (14) легко следует, что

$$|E| = \sum_{i=1}^{\infty} |E_i| < \varepsilon.$$

Далее, обозначим

$$A_k = \{x \in [0,1] \setminus (\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i) : \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} |a_i(\mathbb{I}_{E_k})\chi_i(x)| < \frac{2^k}{\varepsilon}\}.$$

Возьмем $x \notin A_k$ тогда с учетом (15),(16) и (17), получим

$$\sum_{i=n_{k-1}}^{n_k} |a_i(\mathbb{I}_E)\chi_i(x)| = \sum_{i=n_{k-1}}^{n_k} |a_i(\mathbb{I}_{\bigcup_{q=1}^{\infty} E_q})\chi_i(x)| \geq$$

$$\geq \sum_{i=n_{k-1}}^{n_k} |a_i(\mathbb{I}_{E_k})\chi_i(x)| - \sum_{q=k+1}^{\infty} \sum_{i=n_{k-1}}^{n_k} |a_i(\mathbb{I}_{E_q})\chi_i(x)| \geq \frac{2^k}{\varepsilon} - 1.$$

Из (15) следует, что

$$|A_k| \leq \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Учитывая,что $\lim_{k\to\infty} |A_k| = 0$, теорема доказана. □

В заключение автор выражает благодарность Г. А. Карагуляну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Abstract. The paper studies some questions related to almost everywhere, absolute divergence of the series in Haar system. It is constructed a measurable set $E \subset [0, 1]$ such that the Fourier-Haar series of the characteristic function of the set E absolutely diverges almost everywhere.

Список литературы

[1] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Москва, Наука (1984).
[2] Е. М. Никишин, П. Л. Ульянов, "Об абсолютной и безусловной сходимости", Успехи матем. наук, **22**, no. 3, 240 – 242 (1967).
[3] П. Л. Ульянов, "Расходящиеся ряды Фурье класса $L^p (p \geq 2)$", Докл. АН СССР, **137**, no. 4, 768 – 789 (1961).
[4] А. М. Олевский, "Расходящиеся ряды Фурье непрерывных функций", Докл. АН СССР, **141**, no. 1, 28 – 31 (1961).
[5] А. М. Олевский, "Расходящиеся ряды Фурье", Изв. АН СССР. Сер. матем., **27**, no. 3, 343 – 666 (1963).

Поступила 9 марта 2011