

Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 6, 2011, стр. 31-40.

СВЕРХТОЖДЕСТВА ДИСТРИБУТИВНОСТИ В ПОЛУГРУППАХ

Ю. М. МОВСИСЯН, Т. А. АКОПЯН

Ереванский государственный университет
E-mails: *yurimovsisyan@yahoo.com; hakobyantigran91@gmail.com*

Аннотация. В статье характеризуется класс полугрупп в которых существенно выполняется сверхтождество левой дистрибутивности. Доказывается, что класс всех полугрупп в которых существенно выполняется сверхтождество левой дистрибутивности является объединением трех конечно-базированных многообразий полугрупп, причем, явно выписываются базисные тождества всех многообразий.

MSC2010 number: 20M07, 08A05, 08A40, 03C05, 03C85.

Ключевые слова: полугруппа; сверхтождество дистрибутивности; существенная выполняемость; многообразие полугрупп.

1. ВВЕДЕНИЕ

Напомним, что сверхтождество [1] – формула второго порядка вида:

$$(1.1) \quad \forall X_1, \dots, X_m \forall x_1, \dots, x_n \quad (\omega_1 = \omega_2),$$

где ω_1, ω_2 – слова (термы) в алфавите функциональных переменных $X_1, \dots, X_m$ и предметных переменных $x_1, \dots, x_n$. Однако сверхтождество обычно пишется без кванторной приставки: $\omega_1 = \omega_2$. Будем говорить, что сверхтождество $\omega_1 = \omega_2$ выполняется в алгебре (Q, Σ) , если это равенство справедливо когда каждая функциональная переменная X_i заменяется любой операцией той же арности из Σ (предполагается возможность такой замены), а каждая предметная переменная x_j заменяется любым элементом из Q .

Многообразие V удовлетворяет данному сверхтождеству, если каждая алгебра этого многообразия удовлетворяет этому сверхтождеству. В этом случае данное сверхтождество называется сверхтождеством многообразия V .

Сверхтождество (1.1) называется нетривиальным, если $m > 1$, и – тривиальным, если $m = 1$. Число m называется функциональным рангом сверхтождества (1.1). Бинарную алгебру (Q, Σ) назовем нетривиальной, если $|\Sigma| > 1$.

Известна (см. [1] – [4]) классификация нетривиальных сверхтождеств ассоциативности и дистрибутивности в нетривиальных q -алгебрах и e -алгебрах.

Пусть $Q(\cdot)$ – полугруппа. Следующая функция называется бинарным полиномом (многочленом, термом) полугруппы $Q(\cdot)$:

$$f(x, y) = z_1^{\varepsilon_1} z_2^{\varepsilon_2} \dots z_n^{\varepsilon_n},$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \in \mathbb{N}$, $z_1, z_2, \dots, z_n \in \{x, y\}$ и $z_i \neq z_{i+1}$.

Аналогично определяются тернарные и n -арные полиномы (многочлены, термы) полугруппы $Q(\cdot)$. Совокупность всех бинарных полиномов полугруппы $Q(\cdot)$ обозначим через Q_{pol}^2 .

Будем говорить, что в полугруппе $Q(\cdot)$ полиномиально выполняется сверхтождество (1.1), если в бинарной алгебре (Q, Q_{pol}^2) выполняется это сверхтождество. В работе [5] доказывается, что класс всех полугрупп, в которых полиномиально выполняется тривиальное сверхтождество ассоциативности

$$(1.2) \quad X(x, X(y, z)) = X(X(x, y), z),$$

образует конечно-базированное многообразие (причем указывается базис содержащий около 1000 тождеств). Такие полугруппы называются сверхассоциативными. В работе [6] (см. также [7]) указывается базис тождеств этого многообразия содержащий 5 тождеств.

В работе [8] доказывается, что класс всех полугрупп, в которых полиномиально выполняется тривиальное сверхтождество правой (или левой) дистрибутивности, образует конечно-базированное многообразие полугрупп, определяемый тремя тождествами: $x^2 = x^3$, $xyz = yxzx$, $xyz = xzyz$. Такие полугруппы называются сверхдистрибутивными. А класс всех полугрупп, в которых полиномиально выполняется нетривиальное сверхтождество правой (или левой) дистрибутивности, образует конечно-базированное многообразие полугрупп, определяемых тремя тождествами: $x^2 = x$, $xyz = yxzx$, $xyz = xzyz$. Из этого описания, в частности, следует, что любая сверхдистрибутивная полугруппа является сверхассоциативной.

Через Q_{epol}^2 обозначим множество всех бинарных полиномов $f(x, y)$ полугруппы $Q(\cdot)$, каждая из которых существенно зависит от обоих аргументов x, y (см. определения 2.1 и 2.2 ниже).

Будем говорить, что в полугруппе $Q(\cdot)$ существенно выполняется сверхтождество (1.1), если в алгебре (Q, Q_{epol}^2) выполняется это сверхтождество. В работе

[9] доказывается, что класс всех полугрупп, в которых существенно выполняется тривиальное сверхтождество (1.2), образует многообразие, определяемый четырьмя тождествами (см. также [10, 11]).

В работе [12] доказывается, что в отличие от тривиального сверхтождества ассоциативности, класс всех полугрупп в которых существенно выполняется нетривиальное сверхтождество ассоциативности – конечное объединение конечно-базируемых многообразий полугрупп. Причем, явно выписываются базисные тождества всех многообразий.

Однако характеристика полугрупп, в которых существенно выполняется сверхтождество дистрибутивности, осталась открытой.

В настоящей работе описываются полугруппы, в которых существенно выполняется одно из следующих сверхтождеств левой дистрибутивности функционального ранга 1 или 2, а также одно из сверхтождеств левой дистрибутивности функционального ранга 3, 4 или 5:

$$(1.3) \quad X(x, X(y, z)) = X(X(x, y), X(x, z)),$$

$$(1.4) \quad X(x, X(y, z)) = X(X(x, y), Y(x, z)),$$

$$(1.5) \quad X(x, X(y, z)) = X(Y(x, y), X(x, z)),$$

$$(1.6) \quad X(x, X(y, z)) = X(Y(x, y), Y(x, z)),$$

$$(1.7) \quad X(x, X(y, z)) = Y(X(x, y), X(x, z)),$$

$$(1.8) \quad X(x, X(y, z)) = Y(X(x, y), Y(x, z)),$$

$$(1.9) \quad X(x, X(y, z)) = Y(Y(x, y), X(x, z)),$$

$$(1.10) \quad X(x, X(y, z)) = Y(Y(x, y), Y(x, z)),$$

$$(1.11) \quad X(x, Y(y, z)) = X(X(x, y), X(x, z)),$$

$$(1.12) \quad X(x, Y(y, z)) = X(X(x, y), Y(x, z)),$$

$$(1.13) \quad X(x, Y(y, z)) = X(Y(x, y), X(x, z)),$$

$$(1.14) \quad X(x, Y(y, z)) = X(Y(x, y), Y(x, z)),$$

$$(1.15) \quad X(x, Y(y, z)) = Y(X(x, y), X(x, z)),$$

$$(1.16) \quad X(x, Y(y, z)) = Y(X(x, y), Y(x, z)),$$

$$(1.17) \quad X(x, Y(y, z)) = Y(Y(x, y), X(x, z)),$$

$$(1.18) \quad X(x, Y(y, z)) = Y(Y(x, y), Y(x, z)).$$

2. СВЕРХТОЖДЕСТВА (1.3) и (1.15)

Определение 2.1. Будем говорить, что бинарный многочлен $F(x, y)$ в полугруппе $Q(\cdot)$ существенно зависит от предметной переменной x , если существуют такие $x_1, x_2, y \in Q$, что $F(x_1, y) \neq F(x_2, y)$.

Точно так же определяется существенная зависимость бинарного многочлена $F(x, y)$ от предметной переменной y .

Определение 2.2. Назовем бинарный многочлен $F(x, y)$ существенным, если этот многочлен существенно зависит от предметных переменных x и y .

Определение 2.3. Два сверхтождества назовем эквивалентными, если в любой полугруппе $Q(\cdot)$, эти сверхтождества либо одновременно существенно выполняются, либо ни одно из них существенно не выполняется.

Будем говорить, что сверхтождество (h_2) вытекает из сверхтождества (h_1) (и обозначим $(h_1) \rightarrow (h_2)$), если во всех полугруппах, где существенно выполняется сверхтождество (h_1) существенно выполняется так же и сверхтождество (h_2) .

По определению, выражение x^0 будем считать пустым.

Рассмотрим следующее множество тождеств:

$$(2.1) \quad \begin{cases} xyz = yxz, \\ xyx = xzyx; \end{cases}$$

Лемма 2.1. В полугруппе $Q(\cdot)$ с тождествами (2.1), любой существенный многочлен $X(x, y)$ равен одному из многочленов множества

$$P = \{xy, yx, x^2y, yx^2, xyx, yxy\}.$$

Доказательство. Любой существенный многочлен $X(x, y)$ может быть представлен в одном из следующих видов:

$$\begin{aligned} X(x, y) &= x^{\alpha_1} y^{\beta_1} x^{\alpha_2} y^{\beta_2} \dots x^{\alpha_n} y^{\beta_n}, \\ X(x, y) &= y^{\beta_1} x^{\alpha_1} y^{\beta_2} x^{\alpha_2} \dots y^{\beta_n} x^{\alpha_n}, \\ X(x, y) &= x^{\alpha_1} y^{\beta_1} x^{\alpha_2} y^{\beta_2} \dots x^{\alpha_n} y^{\beta_n} x^{\alpha_{n+1}}, \\ X(x, y) &= y^{\beta_1} x^{\alpha_1} y^{\beta_2} x^{\alpha_2} \dots y^{\beta_n} x^{\alpha_n} y^{\beta_{n+1}}, \end{aligned}$$

где $n, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}$, а $i = 1, 2, \dots, n$. Докажем следующую формулу:

$$(2.2) \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{N}, \quad \exists e, f \in \mathbb{N} \quad (x^a y^b x^c y^d = x^e y^f).$$

Так как

$$\begin{aligned} x^a y^b x^c y^d &= x^{a-1} (x (y^b x^{c-1}) x y^d) = x^{a-1} (x (y^b x^{c-1}) y^d) = \\ &= x^a y^b x^{c-1} y^d = \dots = x^a y^b y^d = x^a y^{b+d}, \end{aligned}$$

то заключаем, что значения $e = a$ и $f = b + d$ удовлетворяют (2.2). Из (2.2) ясно, что любой существенный многочлен $X(x, y)$ можно представить в одном из следующих видов:

$$X(x, y) = x^a y^b, \quad X(x, y) = y^a x^b, \quad X(x, y) = x^a y^b x^c, \quad X(x, y) = y^a x^b y^c,$$

где $a, b, c \in \mathbb{N}$. Докажем также, что

$$(2.3) \quad \forall a, b \in \mathbb{N}, \quad \exists c \in \mathbb{N} \quad (x^a y^b = x^c y).$$

Если $b = 1$, то $c = a$. Если $b \geq 2$, то имеем:

$$\begin{aligned} x^a y^b &= (x^a y^2) y^{b-2} = (x^a y y) y^{b-2} = \\ &= (x^a y x^a y) y^{b-2} = (x^a x^a y) y^{b-2} = x^{2a} y^{b-1} = \dots = x^c y. \end{aligned}$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} \forall a, b, c \in \mathbb{N}, \exists d, e \in \mathbb{N} \quad (x^a y^b x^c &= x^a y^d x = x^e y x), \\ \forall a, b, c \in \mathbb{N}, \exists d, e \in \mathbb{N} \quad (y^a x^b y^c &= y^a x^d y = y^e x y). \end{aligned}$$

Таким образом, любой существенный многочлен $X(x, y)$ можно представлять в одном из следующих видов

$$X(x, y) = x^a y, \quad X(x, y) = y^a x, \quad X(x, y) = x^a y x,$$

где $a \in \mathbb{N}$. Имеем

$$x^3 y = x x x y = x x y = x^2 y \quad \text{и} \quad x^2 y x = x x y x = x y x.$$

Следовательно, если $a \geq 2$, то $x^a y x = x^{a-2} x^2 y x = x^{a-2} x y x = x^{a-1} y x = \dots = x y x$.

Таким образом, $y^a x y = y x y$, $a \in \mathbb{N}$. Отсюда, при $a \geq 3$, имеем

$$x^a y = x^{a-3} x^3 y = x^{a-3} x^2 y = x^{a-1} y = \dots = x^2 y,$$

т.е. $x^a y = x^2 y$, если $a \geq 2$. Аналогично, $y^a x = y^2 x = y y x = y x y x = y x^2$, если $a \geq 2$. Следовательно, любой существенный многочлен $X(x, y)$ может быть представлен в одном из следующих видов:

$$\begin{aligned} X(x, y) &= x y, \quad X(x, y) = x^2 y, \\ X(x, y) &= y x, \quad X(x, y) = y x^2, \\ X(x, y) &= x y x, \quad X(x, y) = y x y. \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

Определение 2.4. Будем говорить, что переменная x , y или z участвует в тернарном многочлене $X(x, y, z)$ полугруппы $Q(\cdot)$, если в этом многочлене она участвует с ненулевой степенью.

Например, если $Y(x, y)$, $Z(z, y)$, $U(x, y)$ суть существенные многочлены полугруппы $Q(\cdot)$, то переменные x , y , z участвуют в следующих многочленах:

$$\begin{aligned} X(x, y, z) &= Y(x, Z(y, z)), \\ X(x, y, z) &= Y(Z(x, y), U(x, z)). \end{aligned}$$

Рассмотрим следующее множество тождеств:

$$(2.4) \quad \begin{cases} xyz = xzy, \\ xyz = yxz, \\ xyz = x^2yz. \end{cases}$$

Лемма 2.2. В полугруппе $Q(\cdot)$ с тождествами (2.4), любой тернарный многочлен $X(x, y, z)$, в котором участвуют все переменные x , y , z , равен многочлену xyz и, следовательно, определяется единственным образом.

Доказательство. В полугруппе $Q(\cdot)$, который удовлетворяет системе тождеств (2.4), любой многочлен $X(x, y, z)$, в котором участвуют переменные x , y , z , можно представить в следующем виде

$$X(x, y, z) = x^a y^b z^c, \quad \text{где } a, b, c \in \mathbb{N}.$$

Если $a \geq 2$, то $x^a y^b z^c = x^{a-2} (x^2 y^b z^c) = x^{a-2} (xy^b z^c) = x^{a-1} y^b z^c = \dots = xy^b z^c$, т.е. $x^a y^b z^c = xy^b z^c$. Следовательно, $xy^b z^c = xyz^c = xyz$. Лемма доказана. $\square$

Теорема 2.1. Пусть $i = 3$ или $i = 15$. В полугруппе $Q(\cdot)$ существенно выполняется сверхтождество (1.i) тогда и только тогда, когда эта полугруппа удовлетворяет (2.1) или одному из следующих тождеств:

$$(2.5) \quad xy = x^2, \quad xy = y^2.$$

Доказательство. Докажем теорему только для сверхтождества (1.3), т.е. когда $i = 3$. Аналогично доказывается теорема для сверхтождества (1.15). Докажем необходимость. Рассмотрим случай, когда многочлен xy несущественный. В этом случае $xy = x^2$ или $xy = y^2$ и выполняется одно из тождеств (2.5). Пусть многочлен xy существенный. Тогда и многочлен yx будет существенным.

Принимая в (1.3) $X(x, y) = xy$, будем иметь $xyz = yxz$.

Принимая в (1.3) $X(x, y) = yx$, будем иметь $zyx = zxyx$, т.е. $xyz = xzyz$. Необходимость доказана.

Докажем достаточность.

А) Если выполнено одно из тождеств (2.5), то не существуют существенных многочленов.

Б) Пусть в полугруппе $Q(\cdot)$ выполняется система тождеств (2.1). Согласно лемме 2.1 любой существенный многочлен $X(x, y)$ принадлежит следующему множеству:

$$P = \{xy, yx, x^2y, yx^2, xyx, yxy\}.$$

Рассмотрим эти случаи в отдельности:

- (1) При $X(x, y) = xy$ имеем: $xyz = yxz$.
- (2) При $X(x, y) = yx$ имеем: $zyx = zxyx$.
- (3) При $X(x, y) = x^2y$ получим справедливое тождество: $x^2y^2z = x^2yx^2yx^2z$, т.к.

$$x^2yx^2yx^2z = x^2y(x^2yx^2z) = x^2yx^2yz = x^2y^2z.$$

- (4) При $X(x, y) = yx^2$ получаем тождество: $zy^2x^2 = zx^2yx^2yx^2$, т.к.
 $zx^2yx^2yx^2 = zx^2(yx^2yx^2) = zx^2y^2x^2 = zy^2x^2$.

- (5) При $X(x, y) = xyx$ получаем тождество: $xyzyx = yuxxzxxyx$, т.к.
 $xyxxzxxyx = xy(x^2zx^2y)x = yux^2zyx = (yuxx)zyx = yuxzyx = yuzyx$.

- (6) При $X(x, y) = yxy$ получаем тождество: $zyzxyz = zxzyxyzx$, т.к.
 $zyzxyz = zyxyz = zyxxz$,
 $zxzyxyzx = zxxyxz = zxxyxz = zxxyxz = zyxxz$.

3. СВЕРХТОЖДЕСТВА (1.4)-(1.14), (1.16)-(1.18)

Теорема 3.1. Пусть $i = 4, \dots, 14, 16, 17, 18$. В полугруппе $Q(\cdot)$ существенно выполняется сверхтождество (1.i) тогда и только тогда, когда эта полугруппа удовлетворяет (2.4) или одному из тождеств (2.5).

Доказательство. Будем доказывать теорему для сверхтождества (1.4), т.е. когда $i = 4$. Аналогично рассматриваются и остальные случаи.

Докажем необходимость. Рассмотрим случай, когда многочлен xy несущественный. В этом случае $xy = x^2$ или $xy = y^2$ и выполняется одно из тождеств (2.5). Пусть многочлен xy существенный. Тогда и многочлен yx будет существенным.

Принимая в (1.4) $X(x, y) = xy$ и $Y(x, y) = xy$, будем иметь $xyz = xyxz$. Принимая в (1.4) $X(x, y) = yx$ и $Y(x, y) = yx$, будем иметь $zyx = zxux$, т.е. $xyz = xzyz$. Принимая в (1.4) $X(x, y) = xy$ и $Y(x, y) = yx$, будем иметь $xyz = xyzx = xyzyx = xzyx = xzy$. Принимая в (1.4) $X(x, y) = yx$ и $Y(x, y) = xy$, будем иметь $zyx = xzyx$, т.е. $xyz = zxuz = zuxz = yxz$. Следовательно, $xyz = x(yxz) = xxuz = x^2yz$. Необходимость доказана.

Докажем достаточность.

А) Если одно из тождеств (2.5) имеет место, то не существует существенных многочленов.

Б) Допустим, что в полугруппе $Q(\cdot)$ выполняется система тождеств (2.4). Согласно Лемме 2.2, любой тернарный многочлен $X(x, y, z)$ в котором принимают участие переменные x, y и z равен многочлену xyz . Следовательно,

$$X(x, X(y, z)) = xyz = X(X(x, y), Y(x, z)).$$

Теорема доказана. $\square$

4. СВЕРХТОЖДЕСТВА ДИСТРИБУТИВНОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО РАНГА 3, 4 ИЛИ 5 В ПОЛУГРУППАХ

Многочлены (а так же и функциональные переменные) будем обозначать буквами $X, Y, Z, \dots$.

Теорема 4.1. Пусть дано сверхтождество левой дистрибутивности, функциональный ранг которого больше 2. В полугруппе $Q(\cdot)$ существенно выполняется это сверхтождество тогда и только тогда, когда полугруппа $Q(\cdot)$ удовлетворяет (2.4) или одному из тождеств (2.5).

Доказательство. Необходимость. Рассматриваемое сверхтождество имеет следующий вид:

$$X(x, X_1(y, z)) = X_2(X_3(x, y), X_4(x, z)),$$

где $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \{X, Y, Z, \dots\}$. Поскольку ранг рассматриваемого сверхтождества не меньше 3, то в нем участвуют по крайней мере 3 разных многочлена: X, Y, Z .

Если в этом сверхтождестве имеется точно один многочлен Y , то тогда взяв остальные многочлены равными многочлену X , получим одно из сверхтождеств (1.4)-(1.14), (1.16)-(1.18). Если же в этом сверхтождестве имеются 2 или больше

многочленов Y , то тогда, взяв остальные многочлены (за исключением многочлена X) равными многочлену Y , опять получим одно из сверхтождеств (1.4)-(1.14), (1.16)-(1.18). Необходимость доказана.

Доказательство достаточности аналогично доказательству достаточности предыдущей теоремы. Теорема доказана. $\square$

Следствие 4.1. *Любое сверхтождество левой дистрибутивности эквивалентно сверхтождеству (1.3) ранга 1 или сверхтождеству (1.4) ранга 2, причем (1.4) $\rightarrow$ (1.3).*

В заключение отметим, что аналогичные результаты справедливы и для сверхтождеств правой дистрибутивности.

Abstract. The paper gives a description of the class of semigroups in which the hyperidentity of left distributivity is essentially valid. It is proved that the class of all semigroups, in which this hyperidentity is essentially valid, is a union of three finitely based semigroup varieties, and the basic identities of all varieties are given in explicit forms.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. М. Мовсисян, Введение в теорию алгебр со сверхтождествами, Изд-во Ереванского госуниверситета (1986).
- [2] Ю. М. Мовсисян, Сверхтождества и сверхмногообразия в алгебрах, Изд-во Ереванского госуниверситета (1990).
- [3] Ю. М. Мовсисян, “Сверхтождества в алгебрах и многообразиях”, Успехи мат. Наук, **53** (1(319)), 61-114 (1998).
- [4] Yu. M. Movsisyan, “Hyperidentities and hypervarieties”, Scientiae Mathematicae Japonicae, **54**, no. 3, 595 – 640 (2001).
- [5] K. Deneck, J. Koppitz, “Hyperassociative varieties of semigroups”, Semigroup Forum, **49**, 41-49 (1994).
- [6] L. Polak, “On hyperassociativity”, Algebra Universalis, **36**, 363 – 378 (1996).
- [7] L. Polak, “All Solid Varieties of Semigroups”, Journal of Algebra **219**, 421 – 436 (1999).
- [8] Yu. M. Movsisyan, I. R. Simonyan, “Hyperidentities of Distributivity in Varieties of Semigroups”, Computer Science and Information Technologies, Proceedings of the Conference, Yerevan, 24-26 (1999)
- [9] G. Paseman, “A small basis for Hyperassociativity, preprint, Berkeley (1993).
- [10] K. Denecke and Sh.L.Wismath, Hyperidentities and Clones, Gordon and Breach Science Publishers (2000).
- [11] J. Koppitz and K. Denecke, M-Solid Varieties of Algebras, Springer (2006).
- [12] Ю. М. Мовсисян, Т. А. Акопян, “Петривальные сверхтождества ассоциативности в полугруппах”, Известия НАН Армении, серия Математика, **46** no. 3, 65 – 78 (2011).

Поступила 19 января 2011