Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 6, 2011, стр. 11-30.

О ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНАХ, ВОЗРАСТАЮЩИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Г. Г. КАЗАРЯН

Российско - Армянский (Славянский) Университет,
Ереванский Государственный Университет
E-mail: *haikghazaryan@mail.ru*

Аннотация. Доказывается,что многочлен (символ дифференциального оператора), многогранник Ньютона которого является прямоугольным параллелепипедом с вершиной в начале координат, будет почти гипоэллиптическим тогда и только тогда, когда он регулярен. Получены также алгебраические условия почти гипоэллиптичности для нергулярных многочленов, возрастающих на бесконечности. Для многочленов двух переменных полученные результаты окончательны.

MSC2010 number: 12E10.

Ключевые слова: почти гипоэллиптический многочлен; регулярный многочлен; гипоэллиптический оператор (многочлен); многогранник Ньютона.

1. Введение. Постановка задачи

Пусть R^n $n-$ мерное евклидово пространство, $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in R^n$, N_0^n- множество $n-$ мерных мультииндексов, т.е. множество точек $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ с целыми неотрицательными компонентами. Для $\xi \in R^n$ и $\alpha \in N_0^n$ положим $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \partial/\partial\xi_j$ $(j = 1, ..., n)$, $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2}$.

Для линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами $P(D) = \sum \gamma_\alpha D^\alpha$, где сумма распространяется по конечному набору мультииндексов $(P) = \{\alpha; \alpha \in N_0^n, \gamma_\alpha \neq 0\}$, через $P(\xi) = \sum \gamma_\alpha \xi^\alpha$ обозначим характеристический многочлен (полный символ), отвечающий этому оператору.

Определение 1.1. *Будем говорить, что многочлен $P(\xi)$ мощнее многочлена $Q(\xi)$ (запись $Q < P$), если с некоторой постоянной $C > 0$*

$$|Q(\xi)| \leq C[|P(\xi)| + 1] \quad \forall \xi \in R^n.$$

Определение 1.2. *Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется почти гипоэллиптическим, если $D^\nu P < P$ для любого $\nu \in N_0^n$.*

Понятие *почти гипоэллиптического* оператора (многочлена) является обобщением введенного Л. Хермандером в [1] понятия *гипоэллиптического* оператора (многочлена). Напомним, что гипоэллиптические многочлены характеризуются тем (см. [5], Теорема 11.1.3), что для любого $0 \neq \nu \in N_0^n$

$$D^\nu P(\xi)/P(\xi) \to 0 \quad \text{при} \quad |\xi| \to \infty,$$

а гипоэллиптические операторы тем, что все решения из класса распределений дифференциальных уравнений, отвечающих этим операторам являются бесконечно дифференцируемыми функциями (см. [2] – [4]).

Из этих определений следует, что гипоэллиптический многочлен является почти гипоэллиптическим. Обратное не верно, в чём можно убедится непосредственной проверкой на примере многочлена $P(\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_1^2\xi_2^2$ (см. также ниже, Лемму 2.1), которому соответствует оператор

$$P(D) = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}.$$

После появления работы [1] Л. Хермандера и особенно после публикации монографии [6] и статьи [7] того же автора, началось бурное развитие теории гипоэллиптических уравнений. В частности, разными авторами были найдены различные алгебраические условия гипоэллиптичности (см., например, [8] - [11]). Эти и многие неотмеченные работы относились к невырожденным (регулярным) (см. Определение 1.4 ниже) многочленам, близким по своему характеру к эллиптическим.

Далее были получены алгебраические условия гипоэллиптичности также и для вырожденных (нерегулярных) многочленов, сильно отличающихся от эллиптических (см., например, [12] - [15]).

Несмотря на то, что класс гипоэллиптических операторов содержит множество эллиптических операторов и выходит далеко за его пределы, естественным образом встал вопрос описания таких дифференциальных уравнений, которые будучи негипоэллиптическими, имеют “достаточное количество” бесконечно дифференцируемых решений. На этом пути были введены понятия частично гипоэллиптического оператора (см., например, [16] - [19]), глобально гипоэллиптического оператора (см., например, [20]) и почти гипоэллиптического оператора (см., например, [21] – [23]).

Приведем еще несколько определений и обозначений.

Пусть $\lambda \in R^n$. Многочлен $R(\xi) = R(\xi_1, \dots, \xi_n)$ называется $\lambda-$ однородным (обобщенно - однородным) $\lambda-$ порядка d, если для любого $t > 0$

$$R(t^\lambda \xi) = R(t^{\lambda_1}\xi_1, \dots, t^{\lambda_n}\xi_n) = t^d R(\xi) \quad \forall \xi \in R^n,$$

или, что то же самое, если многочлен R представляется в виде

$$R(\xi) = \sum_{(\lambda,\, \alpha)=d} r_\alpha \xi^\alpha.$$

Для $\lambda-$ однородного многочлена R обозначим

$$(1.1) \qquad R^{n,0} = \{\xi \in R^n, \xi_1\xi_2\cdots\xi_n \neq 0\} \quad \text{и} \quad \Sigma(\lambda, R) = \{\eta \in R^{n,0}, R(\eta) = 0\}.$$

Пусть $\eta \in \Sigma(R) = \Sigma(\lambda, R)$, положим

$$(1.2) \qquad \aleph(\eta, R) = \{\nu \in N_0^n, D^\nu R(\eta) \neq 0\},$$

$$(1.3) \qquad \Delta(\eta, R) = \min_{\nu \in \aleph(\eta, R)} (\lambda, \nu),$$

при этом будем считать, что $\Delta(\eta, R) = 0$, если $\eta \in R^{n,0} \backslash \Sigma(R)$.

Для набора мультииндексов $\aleph = \{\alpha^1, \cdots, \alpha^N\}$, наименьший выпуклый многогранник $\Re(\aleph)$ в $R^{n,\,0}$, содержащий все мультииндексы $\alpha^j \in \aleph$ $(j = 1, \cdots, N)$ называется многогранником Ньютона набора $\aleph$ (см. [8] или [27]).

Многогранник $\Re$ с вершинами из N_0^n называется полным, если $\Re$ имеет вершину в начале координат и дополнительную вершину на каждой оси координат.

Пусть $\Re-$ полный многогранник. Множество $\Gamma \subset \Re$ называется гранью многогранника $\Re$, если существует вектор $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ и число $d \geq 0$ такие, что $(\lambda, \alpha) = d$ для всех $\alpha \in \Gamma$ и $(\lambda, \alpha) < d$ при $\beta \in \Re \setminus \Gamma$. В этом случае вектор λ называется внешней нормалью ($\Re-$ нормалью) грани Γ. Множество (единичных) внешних нормалей грани Γ обозначим через $\Lambda(\Gamma)$. Грани размерности k многогранника $\Re$ обозначим через $\Re_i^k$ $(i = 1, \cdots, M_k^{'}, \, k = 0, 1, \cdots, n-1)$.

Грань $\Re_i^k$ $(1 \leq i \leq M_k^{'}, 0 \leq k \leq n-1)$ многогранника $\Re$ называется **главной**, если среди $\Re-$ нормалей этой грани существует нормаль, которая имеет хотя бы одну положительную координату. Если среди $\Re-$ нормалей $\Re_i^k$ существует вектор с неотрицательными (положительными) координатами, то грань $\Re_i^k$ называется **правильной (вполне правильной)**.

Многогранник $\Re$ называется **правильным (вполне правильным)**, если $\Re-$ полный и все $(n-1)-$ мерные некоординатные грани $\Re$ правильны (вполне правильны).

Многогранник $\Re = \Re(P)$ построенный на наборе мультииндексов (P) оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$) назовем **многогранником Ньютона** или **характеристическим многогранником** оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$).
Легко видеть (см. ниже, доказательство первой части Леммы 2.1), что многогранник Ньютона гипоэллиптического многочлена является вполне правильным, а многогранник Ньютона почти гипоэллиптического многочлена - правильным (см. [28], Лемма 1.1).

Каждой главной грани $\Re_i^k$ $(i = 1, \cdots, M_k,\ k = 0, 1, \cdots, n-1)$ многогранника $\Re(P)$ сопоставим подмногочлен

$$P^{i,\,k}(\xi) = \sum_{\alpha \in \Re_i^k} \gamma_\alpha \xi^\alpha$$

многочлена $P(\xi)$. В [8] доказано, что многочлен $P^{i,\,k}(\xi)$, отвечающий грани $\Re_i^k$ многогранника Ньютона $\Re = \Re(P)$ является $\lambda-$ однородным для любого $\lambda \in \Lambda(\Re_i^k)$, т.е. существует число $d = d_{i,k} \geq 0$ такое, что

$$P^{i,k}(\xi) = \sum_{(\lambda,\alpha)=d} \gamma_\alpha \xi^\alpha,$$

при этом $d > 0$, если грань $\Re_i^k$ главная.

Определение 1.3. *(см.[8]) Грань $\Re_i^k$ $(1 \leq i \leq M_k, 0 \leq k \leq n-1)$ многогранника $\Re = \Re(P)$ называется регулярной (невырожденной), если $P^{i,\,k}(\xi) \neq 0$ при $\xi \in R^{n,0}$. Если $P^{i,k}(\eta^0) = 0$ для некоторой точки $\eta^0 \in R^{n,\,0}$, то грань $\Re_i^k$ назовём нерегулярной (вырожденной).*

Пусть $\Re_i^k$ некоторая главная грань многогранника Ньютона $\Re = \Re(P)$. Очевидно, что для любого ненулевого вектора $\lambda \in \Lambda(\Re_i^k)$ существует натуральное число $M = M(\lambda, \Re_i^k)$ и неотрицательные числа $d_j = d(\lambda, \Re_i^k)$ $(j = 0, 1, \cdots, M)$ такие, что многочлен P можно представить в виде суммы отличных от нуля $\lambda-$ однородных многочленов

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{M} P_j(\xi) = \sum_{j=0}^{M} P_{d_j}(\xi) = \sum_{j=0}^{M} \sum_{(\lambda,\alpha)=d_j} \gamma_\alpha \xi^\alpha, \tag{1.4}$$

где $d_0 > d_1 > \cdots > d_M \geq 0$ и $P_{d_0}(\xi) \equiv P^{i,k}(\xi)$ для любого $\lambda \in \Lambda(\Re_i^k)$.
Если главная грань $\Re_i^k$ нерегулярна, то согласно обозначениям (1.1) - (1.3) свяжем с обобщённо - однородным многочленом $P^{i,k}(\xi)$ (с гранью $\Re_i^k$) и вектором $\lambda \in \Lambda(\Re_i^k)$ множества $\Sigma(\lambda, P_j)$, $\aleph(\eta, \lambda, P_j)$ и числа $\Delta(\eta, \lambda, P_j)$ $(j = 0, 1, \cdots, M)$

для произвольной точки $\eta \in \Sigma(\lambda, P_j)$. Для мультииндекса $\nu \in N_0^n$, множества $\Sigma(\lambda, D^\nu P_j)$, $\aleph(\eta, \lambda, D^\nu P_j)$ и числа $\Delta(\eta, \lambda, D^\nu P_j)$ определяются аналогично, если иметь в виду, что (см. представление (1.4)) многочлен $D^\nu P$ представляется в виде

$$D^\nu P(\xi) = \sum_{\alpha \in (D^\nu P)} \gamma_{\alpha,\nu} \xi^\alpha = \sum_{j=0}^{M} D^\nu P_j(\xi). \tag{1.5}$$

В. П. Михайловым в [8] доказано, что для любого регулярного многочлена P с полным многогранником Ньютона $\Re(P)$ существует постоянная $C = C(P) > 0$ такая, что

$$\sum_{\alpha \in \Re(P)} |\, \xi^\alpha| \le C[\,|\, P(\xi)| + 1] \quad \forall \xi \in R^n. \tag{1.6}$$

Более того, справедливо в определенном смысле обратное утверждение:

Лемма 1.1. *Если многочлен P с полным многогранником Ньютона $\Re(P)$ удовлетворяет соотношению (1.6), то P регулярен.*

Доказательство. Пусть некоторая главная грань $\Re_i^k$ многогранника $\Re(P)$ нерегулярна. Докажем, что многочлен P не удовлетворяет соотношению (1.6) ни для какой постоянной C. Пусть $\lambda \in \Lambda(\Re_i^k)$, $\eta \in \Sigma(P^{i,k})$, $(\lambda, \alpha) = d_0$ уравнение $(n-1)-$мерной опорной к $\Re(P)$ гиперплоскости, проходящей через грань $\Re_i^k$ и $P^{i,k}$ – подмногочлен P, отвечающий этой грани. Тогда $P^{i,k}(\eta) = 0$ и для всех $s = 1, 2, \ldots$ имеем из (1.4)

$$P(\xi^s) \equiv P(s^\lambda \eta) = P^{i,k}(s^\lambda \eta) + \sum_{j=1}^{M} P_j(s^\lambda \eta) =$$

$$= s^{d_0} P^{i,k}(\eta) + \sum_{j=1}^{M} s^{d_j} P_j(\eta) = \sum_{j=1}^{M} s^{d_j} P_j(\eta),$$

причем $|(\xi^s)^\alpha| = s^{d_0} |\eta_1^{\alpha_1} \cdots \eta_n^{\alpha_n}|$. Так как для точек $\eta \in \Sigma(P^{i,\,k})$ $\;\eta_1^{\alpha_1} \cdots \eta_n^{\alpha_n} \neq 0$ и $d_j < d_0$ для всех $j = 1, \ldots M$, то из этих двух соотношений получаем, что при $s \to \infty$ $|P(\xi^s)| = o(s^{d_0})$, в то время как

$$|(\xi^s)^\alpha| / s^{d_0} = |\eta_1^{\alpha_1} \cdots \eta_n^{\alpha_n}| > 0 \;\; (s = 1, 2, \ldots).$$

Это показывает, что (1.6) не может иметь места. Лемма 1.1 доказана. □

Исходя из теоремы В. П. Михайлова и леммы 1.1 далее многочлен P назовем регулярным, если для него справедливо соотношение (1.6).

2. Регулярные почти гипоэллиптические многочлены

Следующее предложение позволяет нам далее рассматривать только многочлены с правильными многогранниками Ньютона.

Лемма 2.1. *Пусть $\Re = \Re(P)$ полный ($n-$ мерный) многогранник Ньютона регулярного многочлена $P(\xi) = P(\xi_1, \cdots, \xi_n)$. Тогда многочлен $P(\xi)$*

1) гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда $\Re-$ вполне правильный

2) почти гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда $\Re-$ правильный.

Доказательство. 1). Пусть $P-$ регулярный многочлен, а $\Re = \Re(P)$ вполне правильный многогранник. Докажем, что P гипоэллиптичен. Для этого достаточно доказать (см. [5], Теорема 11.1.1), что для любого $0 \neq \nu \in N_0^n$ при $|\xi| \to \infty$

$$|D^\nu P(\xi)|/|P(\xi)| \to 0. \tag{2.1}$$

Так как многогранник $\Re$ вполне правильный, то из простых геометрических соображений следует, что для любого $0 \neq \nu \in N_0^n$ точки $\alpha \in (D^\nu P)$ являются неглавными точками многогранника $\Re$. В работе [8] доказана, что для любой неглавной точки $\beta \in \Re$ при $|\xi| \to \infty$

$$|\xi^\beta|/\sum_{\alpha\in\Re}|\xi^\alpha| \to 0. \tag{2.2}$$

Поэтому для доказательства (2.1), достаточно воспользоваться соотношениями (1.6), (2.2) и фактом, что регулярный многочлен бесконечно возрастает при $|\xi| \to \infty$.

Докажем, что многочлен P, многогранник которого не является вполне правильным, не может быть гипоэллиптическим (независимо от его регулярности). Заметим, что если многогранник $\Re$ не является вполне правильным, то это геометрически означает:

а) проекция какой - нибудь главной вершины $\Re$ на какую - нибудь координатную гиперплоскость выходит за пределы $\Re$ (если $\Re$ неправильный многогранник),

б) если $\Re$ правильный, то проекция какой - нибудь главной вершины $\Re$ совпадает с какой - нибудь главной вершиной $\Re$.

В случае а) пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ такая вершина $\Re$, что ее проекция $e^{'} = (0, \dots, 0, e_{k+1}, \dots, e_n)$ на координатную гиперплоскость $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$ $(k \leq n-1)$

выходит за пределы $\Re$. Проведем $(n-1)-$мерную гиперплоскость, проходящую через точку $e^{'}$ так, чтобы она не проходила через начало координат и не имела общей точки с $\Re$. Пусть $(\lambda, \alpha) = d$ уравнение этой гиперплоскости, при этом $\lambda-$ внешняя относительно $\Re$ нормаль этой гиперплоскости. Тогда $d > 0, (\lambda, e^{'}) = d$, $(\lambda, \alpha) < d$ для всех $\alpha \in \Re$.

Обозначим $\nu = (e_1, \ldots, e_k, 0, \ldots, 0)$. Представляя по вектору λ многочлены P и $D^\nu P = D_1^{e_1} \cdots D_k^{e_k} P$ соответственно в виде (1.4) и (1.5) и рассматривая их на последовательности $\xi^s = s^\lambda \eta$ $(s = 1, 2, \ldots)$, где точка η выбрана так, чтобы $D^\nu P(\eta) \neq 0$, получим, что при $s \to \infty$

$$D^\nu P(\xi) = D^\nu P(\eta) s^d; \;\; P(\xi^s) = o(s^d), \tag{2.3}$$

т.е. многочлен P не гипоеллиптичен.

В случае б), предполагая, что $e^{'}$ есть главная вершина $\Re$ (т.е. многогранник $\Re$ правильный, но не вполне правильный), то проводя через $e^{'}$ $(n-1)-$мерную опорную к $\Re$ гиперплоскость, не проходящую через начало координат и не имеющую других общих точек с $\Re$, кроме $e^{'}$ и повторяя рассуждения, проводимые выше, получим, что с некоторыми постоянными $C_1 > 0, C_2 > 0$

$$|D^\nu P(\xi^s)| \geq C_1 s^d, \quad |P(\xi^s)| \leq C_2 s^d \;\; (s = 1, 2, \ldots).$$

Это показывает, что P не гипоэллиптичен.

Второй пункт доказывается буквальным повторением доказательства первой части первого пункта, когда оценки соответствующих многочленов приводят к соотношениям (2.3) из которых следует, что $|D^\nu P(\xi^s)|/|P(\xi^s)| \to \infty$ при $|\xi^s| \to \infty$. Лемма 2.1 доказана. □

Теорема 2.1. *Пусть $\Re = \Re(P)$ – правильный многогранник Ньютона многочлена P. Пусть все вполне правильные грани $\Re$ регулярны. Многочлен P является почти гипоэллиптическим тогда и только тогда, когда P регулярен, т.е. когда все главные грани $\Re$ регулярны.*

Доказательство. Докажем, что в условиях теоремы почти гипоэллиптический многочлен не может иметь главных нерегулярных граней.

Так как все нульмерные грани регулярны, то начнем доказательство с одномерных граней. Пусть Γ одномерная главная (не вполне правильная) нерегулярная грань $\Re$. Докажем, что P не почти гипоэллиптичен.

Пусть $\lambda \in \Lambda(\Gamma)$ и $(\lambda, \alpha) = d_0$ уравнениие $(n-1)$-мерной опорной к $\Re$ гиперплоскости, содержащей Γ и не содержащей точек из $\Re \setminus \Gamma$. Так как Γ не вполне правильная грань, то λ имеет хотя бы одну неположительную координату. Пусть, для определенности, $\lambda_1 \leq 0$.

Положим $m_1 = \max\{\alpha_1, \alpha \in \Gamma\}$, $\Gamma_0 = \{\alpha \in \Gamma, \alpha_1 = m_1\}$ и покажем, что Γ_0 состоит из единственной точки и, следовательно, является нульмерной подгранью Γ, т.е. вершиной $\Re$. В самом деле, если Γ содержит две разные точки α^1 и α^2 такие, что $\alpha_1^1 = \alpha_1^2 = m_1$, то так как одномерная грань определяется своими двумя точками, это значит, что $\alpha_1 = m_1$ для всех точек $\alpha \in \Gamma$. Тогда Γ перпендекулярна оси $0\alpha_1$, т.е. $\lambda_1 > 0$, что противоречит нашему предположению.

Таким образом Γ_0 совпадает с какой - то главной вершиной $e = (m_1, e_2, \ldots e_n)$ многогранника $\Re$.

Представим по вектору λ многочлены P и $D_1^{m_1} P$ по формулам (1.4), (1.5) и рассмотрим поведение этих многочленов на последовательности $\xi^s = s^\lambda \eta = (s^{\lambda_1}\eta_1, \ldots, s^{\lambda_n}\eta_n)$ $(s = 1, 2, \ldots)$, где $\eta \in \Sigma(\Gamma)$. Имеем

$$P(\xi^s) = P_{d_0}(\eta) s^{d_0} + \sum_{j=1}^{M} P_{d_j}(\eta) s^{d_j} = \sum_{j=1}^{M} P_{d_j}(\eta) s^{d_j}, \tag{2.4}$$

$$D_1^{m_1} P(\xi^s) = D_1^{m_1}[\gamma_e (\xi^s)^e + \sum_{\alpha \in \Gamma,\, \alpha_1 < m_1} \gamma_\alpha (\xi^s)^\alpha] + \sum_{j=1}^{M} P_{d_j}(\xi^s) =$$

$$= \gamma_e (m_1!) \eta_2^{e_2} \cdots \eta_n^{e_n} s^{d_0 - \lambda_1 m_1} + \sum_{j=1}^{M} D_1^{m_1} P_{d_j}(\eta) s^{d_j - \lambda_1 m_1}.$$

Так как $\lambda_1 \leq 0$, то $d_0 - \lambda_1 m_1 > d_1 - \lambda_1 m_1 \geq 0$. Поэтому из этих соотношений получаем при $s \to \infty$

$$|P(\xi^s)| = o(s^{d_0}), \;\; |D_1^{m_1} P(\xi^s)| = \gamma_e (m_1!) |\eta_2^{e_2} \cdots \eta_n^{e_n}| s^{d_0 - \lambda_1 m_1} (1 + o(1)).$$

Так как $\eta \in R^{n,0}$, то $\eta_2^{e_2} \cdots \eta_n^{e_n} \neq 0$ и эти соотношения показывают, что многочлен P не является почти гипоэллиптическим.

Пусть теперь Γ – двумерная главная (не вполне правильная) нерегулярная грань $\Re$, $\lambda \in \Lambda(\Gamma)$ и пусть, например, $\lambda_1 \leq 0$. Введем обозначения m_1 и Γ_0 как выше и покажем, что в этом случае либо Γ_0 состоит из одной точки, т.е. является вершиной $\Re$, либо составляет одномерную подгрань грани $\Re$.

Покажем, что если Γ_0 содержит более одной точки, то все они лежат на одной прямой. В противном случае существуют три точки α^1, α^2 и α^3 из Γ, не лежащие на одной прямой такие, что $\alpha_1^j = m_1$ $(j = 1, 2, 3)$. Так как три такие точки однозначно определяют двумерную грань Γ, то это значит, что плоскость, проходящая через Γ перпендикулярна оси $0\alpha_1$ и, следовательно, $\lambda_1 > 0$.

Так как, очевидно, все подграни главной грани являются главными, то Γ_0 либо нульмерная главная грань, т.е. вершина, либо одномерная главная грань $\Re$ и, в обоих случаях, подмногочлен P_{d_0}, отвечающий грани Γ и вектору λ, имеет вид

$$(2.5)\quad P_{d_0}(\xi)=\sum_{\alpha\in\Gamma,\alpha_1=m_1}\gamma_\alpha\xi^\alpha+\sum_{\alpha\in\Gamma,\alpha_1<m_1}\gamma_\alpha\xi^\alpha=\xi_1^{m_1}q(\xi_2,\dots,\xi_n)+\sum_{\alpha\in\Gamma,\alpha_1<m_1}\gamma_\alpha\xi^\alpha,$$

при этом в нульмерном случае $q(\eta_2,\dots,\eta_n)\neq 0$ для $\eta\in R^{n,0}$ по определению вершины. Если Γ_0 – одномерная вполне правильная грань, то $q(\eta_2,\dots,\eta_n)\neq 0$ по предположению теоремы. Если Γ_0 – одномерная главная, но не вполне правильная грань, то $q(\eta_2,\dots,\eta_n)\neq 0$ по уже доказанной части теоремы.
Рассматривая многочлены P и $D_1^{m_1}P$ на последовательности $\xi^s = s^\lambda\eta$ $(s = 1, 2, \dots)$ с некоторой точкой $\eta\in\Sigma(\Gamma)$, для многочлена P получим представление (2.4), а для многочлена $D_1^{m_1}P$ согласно (2.5), представление

$$(2.6)\qquad D_1^{m_1}P(\xi^s)=(m_1!)q(\eta_2,\dots,\eta_n)s^{d_0-\lambda_1 m_1}+\sum_{j=1}^{M}D_1^{m_1}P_{d_j}(\eta)s^{d_j-\lambda_1 m_1}.$$

Так как $q(\eta_2,\dots,\eta_n)\neq 0$, то, рассуждая как выше, из (2.4), (2.6) получим, что многочлен P не является почти гипоэллиптическим.

Если $n\geq 4$, то продолжая аналогичные рассуждения для трёхмерных и т.д. $(n-1)$-мерных граней, получим, что многочлен P регулярен. При этом отметим, что, например, для трехмерных граней множество Γ_0 может быть нульмерной, одномерной или двумерной гранью $\Re$.

Почти гипоэллиптичность регулярного многочлена с правильным многогранником Ньютона следует из Леммы 2.1. Теорема 2.1 доказана. $\square$

Следствие 2.1. *При $n = 2$ для почти гипоэллиптического многочлена нерегулярными могут быть только вполне правильные грани его многогранника Ньютона.*

Одним из основных результатов настоящей статьи является

Следствие 2.2. *Многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$, многогранник Ньютона которого $n-$мерный прямоугольный параллелепипед с вершиной в начале координат, является почти гипоэллиптическим тогда и только тогда, когда он регулярен.*

Первое следствие очевидно, потому, что подгранями одномерной грани являются только нульмерные грани. Второе следствие получается из геометрически очевидного факта, что вполне правильными гранями для прямоугольного параллелепипеда также являются только нульмерные грани.

Следствие 2.3. *Если Γ некоторая $l-$мерная $(0 < l \leq n-1)$ правильная, но не вполне правильная грань правильного многогранника $\Re$ почти гипоэллиптического многочлена P, все $k-$ мерные главные подграни которой регулярны при $k < l$, то грань Γ регулярна.*

3. Нерегулярные почти гипоэллиптические многочлены возрастающие на бесконечности

В этом параграфе для одного класса многочленов с вещественными коэффициентами мы получим условия при которых нерегулярный многочлен является почти гипоэллиптическим. Для описания класса изучаемых многочленов введем ряд дополнительных обозначений и понятий.

Через I_n обозначим множество многочленов $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$ таких, что $|P(\xi)| \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$. В [25] найдены необходимые и достаточные условия при которых многочлен двух переменных принадлежит I_2.

Очевидно, любой регулярный или гипоэллиптический многочлен n переменных принадлежит I_n. Однако существуют почти гипоэллиптические многочлены n переменных, не принадлежащие I_n. Такие многочлены нами изучены в [28], [29]. Здесь мы рассматриваем нерегулярные многочлены из I_n, при этом сосредоточимся на случае, когда правильный многогранник Ньютона $\Re = \Re(P)$ многочлена P имеет единственную, притом вполне правильную $(n-1)$- мерную, нерегулярную грань, а все остальные главные грани $\Re$ регулярны. Отметим, что рассмотрение только $(n-1)-$ мерной нерегулярной грани мотивируется тем, что для двумерных многочленов это единственно возможный случай, а рассмотрение только вполне правильной грани мотивировано Теоремой 2.1 (см. также Следствие 2.1).

Если $P \in I_n$, то, очевидно, за счет добавления константы к P и умножения на константу, можно добиться того, что $P(\xi) > 0$ для любого $\xi \in R^n$. Поэтому далее будем считать, что если $P \in I_n$, то $P(\xi) > 0 \ \ \forall \xi \in R^n$. Следующее утверждение было доказано в [28].

Лемма 3.1. *Пусть $\Re = \Re(P)$ – полный многогранник Ньютона многочлена $P \in I_n$ и $\Re_i^k$ $(i = 1, \dots, M_k, k = 0, 1, \dots, n-1)$ – главные грани $\Re$.*

a) Тогда $P^{i,k}(\xi) \geq 0$ для любого $\xi \in R^n$ $(i = 1, \dots, M_k,\ k = 0, 1, \dots, n-1)$;

b) Пусть пара (i, k), $(1 \leq i \leq M_k, 0 \leq k \leq n-1)$, вектор $\lambda \in \Lambda(\Re_i^k)$ и точка $\eta \in \Sigma(P^{i,k})$ фиксировани, при этом (см. представление (1.4)) $P_j(\eta) = 0$ $(j = 0, 1, \dots, l-1)$, $P_l(\eta) \neq 0$ $(1 \leq l \leq M, l = l(\eta))$. Тогда $P_l(\eta) > 0$.

Пусть $\Re_i^k$ – некоторая нерегулярная грань $\Re(P)$, $\lambda \in \Lambda(\Re_i^k)$, $\eta \in \Sigma(P^{i,k})$ и число $l = l(\eta)$ определяется как в пункте b) леммы 3.1. Согласно обозначениям (1.1) - (1.3) введем множества $\aleph(\eta, \lambda, P_j)$ и числа $\Delta(\eta, \lambda, P_j)$ $(j = 0, 1, \dots, l-1)$. В добавление к Лемме 3.1 докажем следующее предложение.

Лемма 3.2. *Пусть $\Re_i^k$ – некоторая главная нерегулярная грань правильного многогранника Ньютона почти гипоэллиптического многочлена P, а $\lambda \in \Lambda(\Re_i^k)$ и $\eta \in \Sigma(P^{i,k})$ – произвольные точки. Тогда*

$$d_j(\lambda) - \Delta(\eta, \lambda, P_j) \leq d_l \ \ (j = 0, 1, \dots, l-1). \tag{3.1}$$

Доказательство. Допустим противное, что для некоторых значений j $(0 \leq j \leq l-1)$ неравенство (3.1) нарушается, при этом через j_0 обозначим наименьшее из таких j. Итак, получаем

$$d_j(\lambda) - \Delta(\eta, \lambda, P_j) \leq d_l (j = 0, 1, \dots, j_0 - 1), d_{j_0}(\lambda) - \Delta(\eta, \lambda, P_{j_0}) > d_l. \tag{3.2}$$

Пусть мультииндекс $\beta \in N_0^n$ выбран так, что $D^\beta P_{j_0}(\eta) \neq 0$ и $(\lambda, \beta) = \Delta(\eta, \lambda, P_{j_0})$. Рассмотрим значения многочленов P и $D^\beta P$ на последовательности $\xi^s = s^\lambda \eta$ $(s = 1, 2, \dots)$.

Так как $d_j(\lambda) > d_{j_0}(\lambda)$ $(j = 0, 1, \dots, j_0 - 1)$, то из (3.2) следует, что $\Delta(\eta, \lambda, P_{j_0}) < \Delta(\eta, \lambda, P_j)$ $(j = 0, 1, \dots, j_0 - 1)$. Тогда $P_j(\eta) = D^\beta P_j(\eta) = 0$ $(j = 0, 1, \dots, j_0 - 1)$, $D^\beta P_{j_0}(\eta) \neq 0$ и, согласно представлениям (1.4), (1.5) и неравенству (3.2) имеем

$$P(\xi^s) = P_l(\eta) s^{d_l} + o(s^{d_l}) \quad \text{при} \quad s \to \infty.$$

Для многочлена $D^\beta P$ и для всех $s \in N$ имеем

$$D^\beta P(\xi^s) = s^{d_{j_0}(\lambda)-\Delta(\eta,\lambda,P_{j_0})} D^\beta P_{j_0}(\eta) + \sum_{j=j_0+1}^{M} s^{d_j(\lambda)-\Delta(\eta,\lambda,P_{j_0})} D^\beta P_j(\eta).$$

Так как $d_j(\lambda) < d_{j_0}(\lambda)$ $(j = j_0+1, \ldots, M)$, то получаем

$$|D^\beta P(\xi^s)| = |D^\beta P_{j_{2pt0}}(\eta)| s^{d_{j_0}(\lambda)-\Delta(\eta,\lambda,P_{j_0})}(1+o(1)) \quad \text{при} \quad s \to \infty.$$

Так как $D^\beta P_{j_0}(\eta) \neq 0$, эти соотношения вместе с (3.2) противоречат почти гипоэллиптичности многочлена P. Лемма 3.2 доказана. $\square$

Обобщенно - однородный многочлен $R(\xi)$ назовем многочленом с изолированными характеристиками, если для каждой точки $\eta \in \Sigma(R)$ существуют окрестность $U(\eta)$, гладкие обобщенно - однородные функции $q(\xi) = q(\xi, \eta)$, $r(\xi) = r(\xi, \eta)$ и натуральное число $m = m(\eta)$ такие, что $q(\eta) = 0$, $r(\eta) \neq 0$, $grad q(\eta) \neq 0$ и

$$R(\xi) = [q(\xi)]^m \; r(\xi), \quad \xi \in U(\eta).$$

Замечание 3.1. *Из леммы 2.1 работы [12] следует, что при $n = 2$ любой обобщенно - однородный многочлен $R(\xi_1, \xi_2)$ является многочленом с изолированными характеристиками. При этом, если R_1 и R_2 два обобщенно - однородных многочлена двух переменных таких, что $R_1(\eta) = R_2(\eta) = 0$ для некоторой точки $\eta \in R^{n,0}$ и*

$$R_i(\xi) = [q_i(\xi)]^{m_i} r_i(\xi), \quad \xi \in U_i(\eta), \quad i = 1, 2$$

их представления, то $q_1(\xi) \equiv q_2(\xi)$, $U_1(\eta) = U_2(\eta)$ и $D_j q_1(\eta) \neq 0$ $j = 1, 2$.

Ниже (в теореме 3.1) будем считать, что если Γ – $(n-1)$-мерная, вполне правильная нерегулярная грань многогранника $\Re(P)$ многочлена P, μ – внешняя нормаль этой грани и $\eta \in \Sigma(\Gamma)$, то (см. (1.4)) μ-однородные многочлены P_j $(j = 0, 1, \ldots, l-1,\ l = l(\eta))$ имеют изолированные характеристики и (см. Замечание 3.1)

$$P_j(\xi) = [q(\xi)]^{m_j} r_j(\xi) \geq 0, \quad \xi \in U(\eta),\ j = 0, 1, \cdots, l-1, \tag{3.3}$$

где $q(\eta) = 0$, $r_j(\eta) \neq 0$ $(j = 0, 1, \ldots, l-1)$ и, если предполагать, что $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_n$, то $D_n q(\eta) \neq 0$. Тогда имеет место

Теорема 3.1. *Пусть все главные грани правильного многогранника Ньютона $\Re = \Re(P)$ многочлена $P \in I_n$ регулярны, кроме одной $(n-1)-$мерной вполне* *правильной грани* $\Gamma = \Re_{i_0}^{n-1}$, *которая нерегулярна, притом многочлены* P_j, $j = 0, 1, \ldots, l-1, l = l(\eta)$ *удовлетворяют условиям (3.3). Тогда многочлен* P *почти гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда для всех* $\eta \in \Sigma(\Gamma)$

$$d_j - \Delta(\eta, P_j) \leq d_l(\eta) \quad (j = 0, 1, \ldots, l-1). \tag{3.4}$$

Доказательство. Небходимость условий (3.4) вытекает из леммы 3.2. Докажем достаточность этих условий.

Мы применяем метод доказательства В. П. Михайлова [8], примененный для регулярных многочленов, модифицированный и приспособленный к нерегулярным многочленам (см., например [12], Теорема 2, или [28] Теорема 2.1).

Допустим обратное, существует мультииндекс ν^0 и последовательность $\{\xi^s\}$ такие, что $|\xi^s| \to \infty$ при $s \to \infty$ и $|D^{\nu^0} P(\xi^s)|/|P(\xi^s)| \to \infty$. При этом достаточно считать (см. [28], Теорема 1.1), что $|\nu^0| = 1$. Пусть, для определенности, $\nu^0 = (1, 0, \ldots, 0)$ и

$$|D_1 P(\xi^s)|/|P(\xi^s)| \to \infty \quad \text{при} \quad s \to \infty. \tag{3.5}$$

Не умаляя общности можно считать, что $\xi_i^s > 0 \quad (i = 1, \ldots, n; s = 1, 2, \ldots)$. Положим

$$\rho_s = exp\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(ln\xi_j^s)^2}, \quad \lambda_i^s = \frac{\ln \xi_i^s}{\ln \rho_s}, \quad s = 1, 2, \ldots. \tag{3.6}$$

Тогда $\xi^s = \rho_s^{\lambda^s}$ ($\xi_i^s = \rho_s^{\lambda_i^s}$; $i = 1, \ldots, n$) и $|\lambda^s| = 1$ ($s = 1, 2, \ldots$). Так как из последовательности $\{\lambda^s\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность, то без потери общности можно считать, что $\lambda^s \to \lambda$ при $s \to \infty$, где $|\lambda| = 1$.

Из выпуклости многогранника $\Re$ следует, что λ является нормалью к одной и только одной грани $\Re_{i_1}^{k_1}$ многогранника $\Re$. Обозначим λ через $e^{1,1}$ и выберем $n-$мерные векторы $e^{1,2}, \ldots, e^{1,n}$ так, чтобы система $(e^{1,1}, e^{1,2}, \ldots, e^{1,n})$ составляла ортонормированный базис в R^n. Тогда $\lambda^s = \Sigma_{j=1}^n \kappa_{1,j}^s e^{1,j}$ и поскольку $\lambda^s \to e^{1,1}$ при $s \to \infty$, то $\kappa_{1,1}^s \to 1$, $\kappa_{1,j}^s = o(1)$, $j = 2, \ldots, n$.

Если для достаточно больших s базис $(e^{1,1}, e^{1,2}, \ldots, e^{1,n})$ удовлетворяет условию $\Sigma_{j=2}^n \kappa_{1,j}^s e^{1,j} = 0$, то обозначим его через $e^1, \ldots, e^n$. В противном случае можно предположить,что $\Sigma_{j=2}^n \kappa_{1,j}^s e^{1,j} \neq 0$, для всех $s \in N$ и что

$$[\Sigma_{j=2}^n \kappa_{1,j}^s e^{1,j}]/|\Sigma_{j=2}^n \kappa_{1,j}^s e^{1,j}| \to e^{2,2}; \;\; |e^{2,2}| = 1 \quad \text{при} \quad s \to \infty. \tag{3.7}$$

Выберем $n-$мерные векторы $e^{2,3},\dots,e^{2,n}$ так, чтобы система $(e^{2,2},e^{2,3},\dots,e^{2,n})$ составляла ортонормированный базис в $(n-1)-$ мерном пространстве, порожденном базисом $(e^{1,2},\dots,e^{1,n})$. Тогда при $n\geq 3$

$$\lambda^s=\kappa^s_{1,1}e^{1,1}+\kappa^s_{2,2}e^{2,2}+\sum_{j=3}^{n}\kappa^s_{2,j}e^{2,j}\ \ (s=1,2,\dots),$$

при этом $\kappa^s_{1,1}\to 1$, $\kappa^s_{2,2}=o(\kappa^s_{1,1})$, $\kappa^s_{2,j}=o(\kappa^s_{2,2})$, $(j=3,\dots,n)$ при $s\to\infty$.
Продолжая этот процесс, получим ортонормированный базис $(e^1,\dots,e^n)$ такой, что $\lambda^s=\Sigma_{j=1}^{n}\kappa^s_je^j$ $(s=1,2,\dots)$, при этом $\kappa^s_1\to 1$, $\kappa^s_j=o(\kappa^s_{j-1})$, $(j=2,\dots,n)$ при $s\to\infty$.
Очевидно, существуют натуральные числа $m\leq n$ и s_0 такие, что $\lambda^s_j\neq 0$ $(j=1,\cdots,m)$, $\lambda^s_j=0$ $(j=m+1,\dots,n;\ s=s_0,s_0+1,\dots)$. За счет выбора подпоследовательности можно считать, что $s_0=1$ и $\lambda^s_i>0$ $(j=1,\dots,m)$ для всех $s\in N$. Свяжем теперь построенный базис с многогранником $\Re$. Выберем грани $\Re^{k_1}_{i_1},\dots,\Re^{k_m}_{i_m}$ следующим образом: пусть грань $\Re^{k_j}_{i_j}$ лежит в опорной к $\Re$ гиперплоскости с нормалью e^j, $(j=1,\dots,m)$, при этом грань $\Re^{k_j}_{i_j}$, $(j=2,\dots,m)$ либо совпадает с $\Re^{k_{j-1}}_{i_{j-1}}$, либо является ее подгранью. Тогда $k_1\geq k_2\geq\ldots\geq k_m$ и (см. обозначения (3.6))

$$\xi^s=\rho_s^{\sum\limits_{j=1}^{n}\kappa^s_je^j}\qquad (s=1,2,\dots), \tag{3.8}$$

при этом $\rho_s\to\infty$ при $s\to\infty$ и для некоторого r $(1\leq r\leq m)$

$$\rho_s^{\kappa^s_j}\to\infty\ (j=1,\cdots,r),\ \ \rho_s^{\kappa^s_{r+1}}\to b\geq 1,\ \ (s=1,2,\dots). \tag{3.9}$$

Для $r=m=n$ положим $\kappa^s_{n+1}=0$ $(s=1,2,\dots)$.
Сравним поведение многочленов P и D_1P на последовательности $\{\xi^s\}$ при $s\to\ \infty$.

Из e^j- однородности подмногочлена P^{i_j,k_j} имеем при $s\to\infty$, с некоторым мультииндексом α, принадлежащим всем граням $\Re^{k_j}_{i_j}$ $(j=1,\dots,m)$

$$P(\xi^s)=\rho_s^{(\alpha,\ \kappa^s_1e^1)}[P^{i_1,k_1}(\rho_s^{\sum\limits_{j=2}^{n+1}\kappa^s_je^j})+o(\rho_s^{-\varepsilon_1\kappa^s_1})]=$$

$$=\rho_s^{(\alpha,\ \kappa^s_1e^1+\kappa^s_2e^2)}[P^{i_2,k_2}(\rho_s^{\sum\limits_{j=3}^{n+1}\kappa^s_je^j})+o(\rho_s^{-\varepsilon_2\kappa^s_2})]=$$

$$=\cdots=\rho_s^{(\alpha,\ \sum\limits_{j=1}^{r}\kappa^s_je^j)}[P^{i_r,k_r}(\rho_s^{\sum\limits_{j=r+1}^{n+1}\kappa^s_je^j})+o(\rho_s^{-\varepsilon_r\kappa^s_r})], \tag{3.10}$$

где $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ – положительные числа, а e^{n+1} – произвольный единичный вектор, если $r = m = n$, при этом из определения чисел $\{\kappa_j^s\}$ следует (см. (3.8), (3.9)), что

$$\rho_s^{\sum\limits_{j=r+1}^{n+1} \kappa_j^s e^j} \to b^{e^{r+1}} \equiv \eta \in R^{n,0} \quad \text{при} \quad s \to \infty.$$

Если $(\alpha, e^1) = 0$, то грань $\Re_{i_1}^{k_1}$ проходит через начало координат N_0^n и, следовательно, неглавная. Этот случай (не связанный с регулярностью многочлена P) рассматривается как соответствующий случай в доказательстве Теоремы 2 работы [12]. Повторять его здесь не будем.

Пусть $(\alpha, e^1) > 0$, тогда $(\alpha, \Sigma_{j=1}^r \kappa_j^s e^j) > 0$ для всех достаточно больших s. Если $P^{i_r,k_r}(\eta) \neq 0$, то из (3.10) имеем при $s \to \infty$

$$|P(\xi^s)| = \rho_s^{\kappa_1^s(e^1,\alpha)} |P^{i_r,k_r}(\eta)|(1 + o(1)). \tag{3.10'}$$

Если $e_1^1 < 0$, то из простых геометрических соображений следует, что грань $\Re_{i_1}^{k_1}$ и, следовательно, все ее подграни правильного многогранника $\Re$ лежат на гиперплоскости $\alpha_1 = 0$, т.е. многочлен $P^{i_r,k_r}(\xi)$ не зависит от ξ_1. Тогда $D_1 P^{i_1,k_r}(\xi) = 0$ для всех $\xi \in R^n$ и, в частности, $D_1 P^{i_r,k_r}(\eta) = 0$. Рассуждая как и при доказательстве формулы (3.10′) имеем

$$|D_1 P(\xi^s)| \leq C_1 \ \rho_s^{\kappa_1^s[(e^1,\alpha) - \varepsilon]} \quad (s = 1, 2, \ldots),$$

где $C_1 > 0$ и $\varepsilon > 0$ суть постоянные. Если $e_1^1 \geq 0$, то рассуждая так же, получим с некоторой постоянной $C_2 > 0$

$$|D_1 P(\xi^s)| \leq C_1 \ \rho_s^{\kappa_1^s(e^1,\alpha) - e_1^1} \quad (s = 1, 2, \ldots).$$

Последние три соотношения вместе противоречат (3.5).

Пусть теперь $P^{i_r,k_r}(\eta) = 0$. Тогда грань $\Re_{i_r}^{k_r}$ совпадает с $(n-1)-$мерной нерегулярной гранью Γ, при этом $r = m = 1, \ \ k_r = k_1 = n - 1, \ \ e^1 = \mu, \ \ \eta \in \Sigma(\Gamma)$. По вектору $\mu = e^1$ и точке $\eta \in \Sigma(\Gamma)$ представим многочлены P и $D_1 P$ в виде (см. формулы (1.4), (1.5))

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{l-1} P_j(\xi) + P_l(\xi) + Q(\xi), \tag{3.11}$$

$$D_1 P(\xi) = \sum_{j=0}^{l-1} D_1 P_j(\xi) + D_1 P_l(\xi) + D_1 Q(\xi), \tag{3.12}$$

где номер $l = l(\eta)$ для точки η определяется как в пункте b) Леммы 3.1, P_j есть e^1 однородный многочлен порядка d_j $(j = 0, 1, \ldots, l)$, $d_0 > d_1 > \ldots > d_{l-1} > d_l$. Сначала докажем, что для каждого $j = 0, 1, \ldots, l$ существует постоянная $C_j > 0$ такая, что

$$|D_1 P_j(\xi^s)| \leq C_j [|P_j(\xi^s)| + |P_l(\xi^s)|] \quad (s = 1, 2, \ldots). \tag{3.13}$$

Представим по точке $\eta \in \Sigma(\Gamma)$ многочлены P_j $(j = 0, 1, \ldots, l-1)$ в виде (3.3), предварительно полагая

$$\eta^s = \rho_s^{\sum_{j=2}^{n+1} \kappa_j^s e^j}; \; \xi^s = \rho_s^{\kappa_1^s e^1} \eta^s \quad (s = 1, 2, \ldots).$$

Имеем для всех достаточно больших s, для которых $\eta^s \in U(\eta)$

$$P_j(\xi^s) = \rho_s^{\kappa_1^s d_j} P_j(\eta^s) = \rho_s^{\kappa_1^s d_j} [q(\eta^s)]^{m_j} r_j(\eta^s) \quad (j = 0, 1, \cdots, l-1),$$

$$P_l(\xi^s) = \rho_s^{\kappa_1^s d_l} P_l(\eta^s).$$

Для многочленов $D_1 P_j$ $(j = 0, 1, \ldots, l)$ соответственно

$$D_1 P_j(\xi^s) = \rho_s^{\kappa_1^s (d_j - \mu_1)} \{m_j [q(\eta^s)]^{m_j - 1} D_1 q(\eta^s) + [q(\eta^s)]^{m_j} D_1 r_j(\eta^s)\},$$

$$D_1 P_l(\xi^s) = \rho_s^{\kappa_1^s (d_l - \mu_1)} D_1 P_l(\eta^s),$$

где $\kappa_1^s \to 1$ при $s \to \infty$.

Так как $\eta^s \to \eta$, $q(\eta^s) \to q(\eta) = 0$ при $s \to \infty$ и $r_j(\eta) \neq 0$, $P_l(\eta) \neq 0$, то из последних четырех представлений имеем с положительными постоянными a_1, a_2 и с теми же s

$$|P_j(\xi^s)| \geq a_1 \, \rho_s^{\kappa_1^s d_j} |\, q(\eta^s)|^{m_j} \quad (j = 0, 1, \ldots, l-1), \tag{3.14}$$

$$|P_l(\xi^s)| \geq a_1 \, \rho_s^{\kappa_1^s d_l}, \tag{3.15}$$

$$|D_1 P_j(\xi^s)| \leq a_2 \, \rho_s^{\kappa_1^s (d_j - \mu_1)} |\, q(\eta^s)|^{m_j - 1} \quad (j = 0, 1, \ldots, l-1), \tag{3.16}$$

$$|D_1 P_l(\xi^s)| \leq a_2 \, \rho_s^{\kappa_1^s (d_l - \mu_1)}. \tag{3.17}$$

Если $m_{j_0} = 1$ для некоторого $j_0 : 0 \leq j_0 \leq l - 1$, то вследствие того, что по предположению теоремы $D_n q(\eta) \neq 0$ получаем, что $\Delta(\eta, P_{j_0}) = \mu_n$. Тогда условие (3.4) теоремы для многочлена P_{j_0} примет вид $d_{j_0} - \mu_n \leq d_l$ и так как $d_{j_0} - \mu_1 \leq d_{j_0} - \mu_n$, то неравенство (3.13) для многочлена P_{j_0} следует из неравенств (3.15) и (3.17).

Поэтому далее будем считать, что $m_j > 1$ $(j = 0, 1, \dots, l-1)$. Рассуждая как и выше, в этом случае получим, что $\Delta(\eta, P_j) = m_j \mu_n \le m_j \mu_j$ и из условий (3.4) следует, что $d_j - m_j \mu_1 \le d_j - m_j \mu_n \le d_l$ $(j = 0, 1, \dots, l-1)$.
Применяя Лемму 1.3 работы [28] для $x_s = \rho_s^{\kappa_1^s d_j}$, $y_s = |q(\eta^s)|$, $a = \kappa_1^s (d_j - \mu_1)$, $b = m_j - 1$, $c = \kappa_1^s d_j$, $d = m_j$, $e = \kappa_1^s d_l$ $(j = 0, 1, \dots, l-1; s = 1, 2, \dots)$ из соотношений (3 .14) - (3. 16) получаем неравенство (3.13). Следует только отметит, что $x_s \ge 1$ и $y_s \in [0, 1]$ для достаточно больших s, что позволяет применить упомянутую лемму для таких $\{x_s, y_s\}$.
Из определения многочлена Q следует, что при $s \to \infty$

$$|Q(\xi^s)| = o\,(\rho_s{}^{\kappa_1^s d_l}), \quad |D_1 Q(\xi^s)| = o\,(\rho_s{}^{\kappa_1^s (d_l - \mu_1)}). \tag{3.18}$$

Так как $P_j(\xi^s) \ge 0$, $(j = 0, 1, \dots, l)$ для достаточно больших s, то соотношения (3.13) – (3.18) вместе противоречат (3.5). Теорема 3.1 доказана. □

Далее мы получим критерий почти гипоэллиптичности для многочленов $P \in I_n$ без ограничений (3.3) об изолированных характеристиках соответствующих обобщённо - однородных многочленов и об их неотрицательности. При этом отметим, что условие неотрицательности подходящих многочленов является существенным для почти гипоэллиптичности нерегулярных многочленов, что следует из следующего примера.

Пример 3.1. Пусть $n = 2$ и

$$P^{\pm}(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^6 \pm (\xi_1 - \xi_2)^2 \xi_2^2 + \xi_2^2 + 1\cdot$$

Здесь $\Re(P^{\pm})$– вполне правильный треугольник с единственной вполне правильной одномерной стороной $\Re_1^1 = \{(6, 0) - (0, 6)\}$, которая нерегулярна, при этом (см. представление (1.4)) $\Lambda(\Re_1^1) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $P_0^{\pm}(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^6$, $P_1^{\pm}(\xi) = \pm(\xi_1 - \xi_2)^2 \xi_2^2$, $P_2^{\pm}(\xi) = \xi_2^2$, $\Sigma(P_0^{\pm}) = \Sigma(P_1^{\pm}) = \{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})\}$, $d_0^{\pm} = 6$, $d_1^{\pm} = 4$, $d_2^{\pm} = 2$, $l = 2$.
Очевидно, условия (3.3), (3.4) теоремы 3.1 для многочлена P^+ выполняются и P^+ почти гипоэллиптичен. Условие (3.4) для многочлена P^- также выполняется, в то время, как нарушается часть условия (3.3) о неотрицательности. Покажем, что многочлен P^- не является почти гипоэллиптическим, более того $P^- \notin I_2$.

Пусть $\xi_1^s = s+1, \xi_2^s = s$, тогда $P^-(\xi^s) = 2$, $(s = 1, 2, \ldots)$, т.е. $P^- \notin I_2$. Так как $D_1^2 P^-(\xi^s) = 24 + 2s^2$, $P^-(\xi^s) = 2$, $(s = 1, 2, \cdots)$ и $|\xi^s| \to \infty$ при $s \to \infty$, то многочлен P^- не является почти гипоэллиптическим.

Следующее предложение дает критерий почти гипоэллиптичности в отмеченном случае.

Теорема 3.2. *Пусть все главные грани правильного многогранника Ньютона $\Re = \Re(P)$ многочлена $P \in I_n$ регулярны, за исключением одной (n - 1) - мерной грани Γ, μ – внешняя нормаль Γ и многочлен P представлен в виде (1.4). Пусть для точки $\eta \in \Sigma(\Gamma)$ число $l = l(\eta)$ определяется как в пункте b) Леммы 3.1. Предположим, что $D^\alpha P_j < P_0$ $(j = 1, \ldots, l-1)$ для каждой точки $\eta \in \Sigma(\Gamma)$ и для всех $\alpha \in N_0^n$.*

Тогда P почти гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда для всех $\eta \in \Sigma(\Gamma)$ выполняются условия (3.4).

Доказательство. Допуская обратное и повторяя рассуждения, проводимые в доказательстве Теоремы 3.1, получим противоречие, когда $P^{i_r,k_r}(\eta) \neq 0$. Если $P^{i_r,k_r}(\eta) = 0$, то грань $\Re_{i_r}^{k_r}$ совпадает с нерегулярной гранью Γ.

Представим P и $D_1 P$ соответственно в виде (3.11), (3.12) и рассмотрим два возможных случая, когда последовательность $\{P_0(\xi^s)\}$ ограничена и не ограничена. Пусть $\{P_0(\xi^s)\}$ ограничена. Тогда по условию теоремы $\{P_j(\xi^s)\}$ также ограничена для всех $j = 1, \ldots, l-1$. Так как $P_l(\eta^s) \to P_l(\eta) \neq 0$ при $s \to \infty$, то с некоторой постоянной $a_3 > 0$ имеем

$$|P_l(\xi^s)| = {\rho_s}^{\kappa_1^s d_l} |P_l(\eta^s)| \geq a_3\, {\rho_s}^{\kappa_1^s d_l} \quad (s = 1, 2, \ldots).$$

Для многочленов Q и $D_1 Q$ и в этом случае справедливы соотношения (3.18). Если ещё иметь в виду, что $P \in I_n$, т.е. (см. Лемму 3.1) , что $P_0(\xi^s) \geq 0$, $P_l(\xi^s) \geq 0$, то с некоторой постоянной $a_4 > 0$ имеем

$$|P(\xi^s)| \geq a_4\, {\rho_s}^{\kappa_1^s d_l} \quad (s = 1, 2, \ldots).$$

По условиям теоремы $D_1 P_j < P_0$ $j = 1, \cdots, l-1$, поэтому, рассуждая аналогично, получим с некоторой постоянной $a_5 > 0$

$$|D_1 P(\xi^s)| \leq a_5\, {\rho_s}^{\kappa_1^s d_l} \quad (s = 1, 2, \ldots).$$

Эти два соотношения вместе противоречат (3.5).

Если $\{P_0(\xi^s)\}$ не ограничена, то, за счет выбора подпоследовательности можно считать, что $P_0(\xi^s) \to \infty$ при $s \to \infty$. Так как $P_j < P_0$, $D_1 P_j < P_0$ $(j = 1, \cdots, l-1)$, то из Леммы 1 работы [26] следует, что в этом случае $[\,|P_j(\xi^s)| + |D_1 P_j(\xi^s)|\,]/P_0(\xi^s) \to \infty$ при $s \to \infty$.

Аналогичные рассуждения в этом случае приводят к соотношениям

$$|P(\xi^s)| \geq a_6[P_0(\xi^s) + {\rho_s}^{\kappa_1^s d_l}], \ |D_1 P(\xi^s)| \leq a_7[P_0(\xi^s) + {\rho_s}^{\kappa_1^s d_l}]$$

для всех $s = 1, 2, \cdots$ с положительными постоянными a_6 и a_7, что противоречит (3.5). Теорема 3.2 доказана. □

Abstract. It is proved that a polynomial (the symbol of a differential operator), the Newton polygon of which is a rectangular parallelepiped with a vertex at the origin, is almost hypoelliptic if and only if it is regular. Also some algebraic conditions of almost hypoellipticity are obtained for nonregular polynomials increasing at infinity. The results are unimprovable for polynomials of two variables.

Список литературы

[1] L. Hörmander, " On the theory of general partial differential operators". Acta Math. 94, 161 - 248, 1955

[2] L. Schwartz, " Theorie des distributions". Hermann, Paris, v.1, 1957, v.2,1959

[3] И. М. Гельфанд ,Г.Г.Шилов, "Обобщенные функции", т.1, Москва, Физматгиз. 1958.

[4] H. Bremerman, "Distributions, Complex Variables and Fourier Transforms". Berkley, 1965.

[5] L. Hörmander, "The Analysis of linear Partial Differential Operators". v.2. Springer - Verlag.1983.

[6] L. Hörmander, "Linear Partial Differential Operators". Springer -Verlag, Berlin - Heidenberg ,1963

[7] L. Hörmander, "Hypoelliptic differential operators". Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 11, 477 - 492, 1961.

[8] В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов". Труды МИАН СССР, т. 91, стр. 59 - 81, 1961.

[9] B. Malgrange, "Sur une classe d'operateurs differentiels hypoelliptiques". Bull. Soc. Math. France, v. 85, no. 3, 283 - 306, 1957.

[10] L. Cattabriga, "Su une classe di polinomi ipoellittici". Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. v. 36, 285 - 309, 1966.

[11] Л. Р. Волевич ,С.Г. Гиндикин, "Об одном классе гипоэллиптических операторов". Мат. Сборник, т.75, но. 3, стр. 400 - 416, 1968.

[12] Г.Г. Казарян, "Об одном семействе гипоэллиптических полиномов". Изв. АН Арм. ССР, Мат. т.9, но. 3, стр. 189 - 211, 1974.

[13] Г.Г. Казарян, "Сравнение мощности многочленов и их гипоэллиптичность". Труды МИАН СССР, т. 150, стр. 143 - 159, 1979.

[14] В.Н. Маргарян, "Добавление младших членов, сохраняющих гипоэллиптичность оператора". Изв. АН Арм. ССР, Мат.т.15,но.6,стр. 443 - 460, 1980.

[15] О.Р. Габриелян, "О степени превалирования вырождающихся многочленов и об их гипоэллиптичности". Изв.НАН Армении, Мат., т.38, но.6, 63 - 82, 2003.

[16] Я. С. Бугров, "Теоремы вложения для некоторых функциональных классов". Труды МИАН СССР, т. 77, стр. 45 - 64, 1965.
[17] L. Gårding ,B. Malgrange, "Operateurs differentiels partillement hypoelliptiques". Rend. Acad. Sci. (Paris) v. 247, n. 23, p. 2083 - 2085, 1958
[18] L. Ehrenpreis, "Solutions of some problems of division 4". Amer. J. Math., v82, 522 - 588, 1960.
[19] E.A. Горин, "Об асимптотических свойствах многочленов от нескольких переменных". УМН, т. 16, но. 1, стр. 91 - 118, 1961.
[20] V.I. Burenkov, "Conditional hypoellipticity and Fourier multipliers in weighted L_p- spaces with an exponential weight". Proc of the summer school " Function Spaces, Differential Operators, Nonlinear Analysis" hold in Fridrichroda in 1993. B.G. Teubner, Stutgart - Leipzig, 133, p.p. 256 - 265, 1993.
[21] G. G. Kazaryan, "On almost hypoelliptic polynomials". Doklady Ross. Acad. Nauk. v. 398, n. 6, p.p 701 - 703, 2004.
[22] Г.Г. Казарян , В. Н.Маргарян, "Об одном классе почти гипоэллиптических операторов". Изв.НАН Армении. Мат. т.41,н.6, стр.39-56,2006.
[23] В. Н. Маргарян , Г.Г.Казарян, "О гладкости решений одного класса почти гипоэллиптических уравнений". Изв.НАН Армении. Мат. т.43,н.3, стр.39-64,2008.
[24] H.G. Ghazaryan , V.N.Margaryan, "On infinite differentiability of solutions of nonhomogeneous almost hypoelliptic equations". Eurasian Mathematical Journal, v.1,no.1, p.p. 54 - 72, 2010.
[25] Г.Г. Казарян , В. Н.Маргарян, "Поведение на бесконечности неэллиптических многочленов". Изв.НАН Армении. Мат. т.39,н.3, стр.21 - 38,2004.
[26] Г.Г. Казарян , В. Н.Маргарян, "Критерии гипоэллиптичности в терминах мощности и силы операторов". Труды МИАН СССР, т. 150, стр. 128 - 142, 1979.
[27] S. Gindikin , L.Volevich, "The method of Newtons Polyhedron in the Theory of Partial Differential Equations". Kluwer, 1992.
[28] Г.Г. Казарян, "Об оценках производных многочленов многих переменных". Изв.НАН Армении. Мат. т.34,н.3, стр.46 - 65,1999.
[29] Г.Г. Казарян, "Почти гипоэллиптические многочлены, не возрастающие на бесконечности". Изв.НАН Армении. Мат. т.36,н.2, стр.15 - 26,2001.

Поступила 8 марта 2011