Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 6, 2011, стр. 3-10.

О ВНЕШНИХ НОРМАЛЬНЫХ АВТОМОРФИЗМАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП

В. С. АТАБЕКЯН, А. Л. ГЕВОРГЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *avarujan@ysu.am*

Аннотация. Доказано, что в отличие от свободных произведений групп для произвольного нечётного $n \geq 665$ существуют такие группы G_1 и G_2, n-периодическое произведение $G_1 \overset{n}{*} G_2$ которых обладает нормальным внешним автоморфизмом.

MSC2010 number: 20F05, 20F50, 20E06.

Ключевые слова: n-периодическое произведение групп; свободная бернсайдова группа; нормальный автоморфизм; внутренний автоморфизм.

1. Введение

В работе [1] для каждого нечетного $n \geq 665$ была построена новая операция умножения групп, названная *периодическим произведением данного периода* n или *n-периодическим произведением* (см. также [2]). Эти операции умножения обладают многими свойствами классических операций свободного и прямого произведений групп, в том числе и свойствами точности, ассоциативности и наследственности по подгруппам. Последнее свойство означает, что для любых подгрупп H_i сомножителей G_i n-периодического произведения $\prod_{i\in I}^n G_i$ семейства групп $\{G_i\}_{i\in I}$ вложения $H_i \to G_i$ продолжаются до вложения n-периодического произведения $\prod_{i\in I}^n H_i$ семейства групп $\{H_i\}_{i\in I}$ в n-периодическое произведение $\prod_{i\in I}^n G_i$, т.е. подгруппы сомножителей порождают в $\prod_{i\in I}^n G_i$ свое n-периодическое произведение.

Построенные операции периодического произведения групп решают проблему А. И. Мальцева о существовании в классе всех групп ассоциативной, точной и наследственной по подгруппам операции, отличной как от прямого произведения, так и свободного произведения (см. также [3], [4]).

В настоящей работе мы исследуем группы внешних автоморфизмов n-периодических произведений некоторых классических групп.

Определение 1.1. *Пусть G – произвольная группа, $\varphi \in Aut(G)$ – автоморфизм группы G и H - подгруппа группы G. Автоморфизм φ назовем* ***H-стабильным*** *автоморфизмом, если $\varphi(H) = H$. При этом H называется* ***φ-допустимой*** *подгруппой.*

Рассмотрим произвольное семейство $\mathscr{K}$ подгрупп группы G. Всевозможные H-стабильные автоморфизмы при $H \in \mathscr{K}$ составляют подгруппу группы $Aut(G)$. Она называется стабилизатором семейства $\mathscr{K}$ и обозначается

$$Aut_{\mathscr{K}}(G) \risingdotseq \{\varphi \in Aut(G) | \, \varphi(H) = H \text{ для всех } H \in \mathscr{K}\}.$$

Если ν_g – внутренный автоморфизм, порожденный элементом $g \in G$, т.е. для любого $x \in G$ имеет место $\nu_g(x) = g^{-1}xg$, то $\nu_g(H) = H$ для каждой нормальной подгруппы $H \lhd G$.

Пусть $\mathscr{N} = \mathscr{N}(G)$ – множество всех нормальных подгрупп группы G и $\mathscr{M} \subset \mathscr{N}$. Легко заметить, что тогда выполнены следующие вложения

$$Inn(G) \trianglelefteq Aut_{\mathscr{N}}(G) \leq Aut_{\mathscr{M}}(G) \leq Aut(G),$$

где $Inn(G)$ – группа всех внутренних автоморфизмов группы G.

Каждый автоморфизм из $Aut_{\mathscr{N}}(G)$ принято называть **нормальным** автоморфизмом. В частности, любой внутренний автоморфизм является нормальным автоморфизмом. Согласно определению, при данном нормальном автоморфизме $\varphi \in Aut(G)$ любая нормальная подгруппа группы G φ-допустима и наоборот. Ясно, что если N есть φ-допустимая нормальная подгруппа группы G, то автоморфизмом φ индуцируется некоторый автоморфизм фактор группы ${}^{G}/_{N}$.

А. Любоцкий в [5] и А. Лю в [6] доказали, что каждый нормальный автоморфизм нециклической абсолютно свободной группы F является внутренним, т.е. имеет место равенство $Inn(F) = Aut_{\mathscr{N}}(F)$. Соответствующее равенство было доказано в разные годы для различных интересных классов групп (см. [7] – [14]). В частности, А. Минасян и Д. Осин в [14] показали, что если G – нециклическая относительно гиперболическая группа без нетривиальных конечных нормальных подгрупп, то $Inn(G) = Aut_{\mathscr{N}}(G)$.

М. В. Нещадим в [15], усиливая результаты работ [5] и [6], доказал, что каждый нормальный автоморфизм свободного произведения нетривиальных групп – внутренний.

Мы покажем, что результат работы [15] невозможно распространить на n-периодические произведения. Точнее, мы докажем, что для любого нечетного $n \geq 665$ существуют такие группы G_1 и G_2, n-периодическое произведение которых обладает внешним нормальным автоморфизмом.

В случае двух множителей для обозначения n-периодического произведения будем употреблять запись $G_1 \overset{n}{*} G_2$.

2. Внешние нормальные автоморфизмы

Теорема 2.1. *Пусть G произвольная группа без инволюций, обладающая автоморфизмом порядка 2. Тогда если для некоторого нечетного числа $n \geq 665$ группа G совпадает со своей подгруппой G^n, то n-периодическое произведение $G \overset{n}{*} G$ обладает внешним нормальным автоморфизмом.*

Доказательство. Пусть автоморфизмом ψ группы G имеет порядок 2. Это означает, что для любого элемента $x \in G$ выполнено равенство $\psi^2(x) = x$. По условию теоремы, существует нечетное число $n \geq 665$ такое, что выполняется равенство $G = G^n$, где G^n есть подгруппа, порожденная всеми n-ми степенями группы G.

Рассмотрим пересекающиеся по единичной подгруппе две изоморфные копии G_1 и G_2 группы G и через $\psi_1 : G_1 \to G_1$ и $\psi_2 : G_2 \to G_2$ обозначим соответствующие автморфизмы порядка 2 этих групп. Построим n-периодическое произведение $G_1 \overset{n}{*} G_2$. Поскольку n-периодическое произведение в классе всех групп является точной операцией, то автоморфизмы $\psi_i : G_i \to G_i$, $i = 1, 2$, мултипликативным образом расширяются до автоморфизма $\Psi : G_1 \overset{n}{*} G_2 \to G_1 \overset{n}{*} G_2$ группы $G_1 \overset{n}{*} G_2$. Покажем, что группа $G_1 \overset{n}{*} G_2$ является простой группой (напомним, что нетривиальная группа называется простой, если она имеет в точности две нормальные подгруппы). Для этого воспользуемся следующим критерием простоты, доказанным в работах [16] и [2].

Лемма 2.1. (см. [2], Критерий простоты.) *Пусть дано произвольное число $n \geq 665$ и семейство нетривиальных групп $\{G_i\}_{i \in I}$, где либо $|I| > 2$, либо $|G_i| > 2$ при некотором i. Для того, чтобы n-периодическое произведение $\prod_{i \in I}^{n} G_i$ периода n было простой группой, необходимо и достаточно, чтобы каждая группа G_i совпадала со своей подгруппой, порожденной всеми n-ми степенями.*

По условию теоремы имеют место равенства $G_i = G_i^n$, где G_i^n есть подгруппа, порожденная всеми n-ми степенями группы G_i, $i = 1, 2$. Кроме того, так как G_1

обладает автоморфизмом порядка 2, то $|G_1| > 2$. Поэтому, согласно лемме 2.1, группа $G_1 \overset{n}{*} G_2$ является простой группой.

Очевидно, каждый автоморфизм простой группы является нормальным автоморфизмом. Докажем, что Ψ является внешним автоморфизмом, т.е. не является внутренним автоморфизмом.

Доказывая от противного, предположим, что Ψ – внутренний автоморфизм. Это означает, что некоторый внутренний автоморфизм ν_g совпадает с Ψ. Таким образом, для любого $x \in G_1 \overset{n}{*} G_2$ имеет место равенство $\Psi(x) = \nu_g(x) = g^{-1}xg$. Если $x \in G_i$, то $\Psi(x) = \psi_i(x)$, поскольку автоморфизм Ψ является продолжением автоморфизмов ψ_i, $i = 1, 2$. Тем самым, имеем $\nu_g(x) = \psi_i(x)$ для любого элемента $x \in G_i$, $i = 1, 2$. По условию теоремы автоморфизмы ψ_i имеют порядок 2, т.е. $\psi_i^2 = 1_{G_i}$, $i = 1, 2$. Значит, для любого $x \in G_i$ имеем $\nu_g^2(x) = g^{-2}xg^2 = 1_{G_i}(x) = x$. Отсюда вытекает, что элемент $g^2 \in G_1 \overset{n}{*} G_2$ принадлежит централизатору каждой из групп G_i, $i = 1, 2$. Из этого непосредственно следует, что g^2 принадлежит централизатору всей групппы $G_1 \overset{n}{*} G_2$, поскольку периодическое произведение порождается своими множителями. Следовательно, автоморфизм Ψ тоже имеет порядок 2.

Далее нам понадобится следующее утверждение, доказанное в работе [16].

Лемма 2.2. (см. [16], теорема 7) *Пусть F есть периодическое произведение семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$. Если неединичный элемент x группы F сопряжен некоторому элементу y одной из подгрупп G_i группы F, то всякий перестановочный с x элемент группы F принадлежит той же сопряженной G_i подгруппе HG_iH^{-1} которой принадлежит x.*

Если предположить, что элемент x принадлежит множителю G_1 произведения $G \overset{n}{*} G$, то из равенства $g^{-2}xg^2 = x$, согласно утверждению леммы 2.2, получаем, что элемент g^2 принадлежит этому же множителю G_1. Аналогичным образом убедимся, что элемент g^2 также принадлежит множителю G_2. Поскольку единственным общим элементом подгрупп G_1 и G_2 группы $G_1 \overset{n}{*} G_2$ является единичный элемент, то $g^2 = 1$. Таким образом, элемент g является инволюцией. Поэтому элемент g не сопряжен никакому элементу подгрупп G_i, $i = 1, 2$, поскольку элемент группы, сопряженный инволюции, сам является инволюцией, в то время как, согласно условию теоремы, в группах G_i, $i = 1, 2$ не содержатся инволюции. По той же причине элемент g не равен произведению двух инволюций.

Теперь воспользуемся следующим свойством периодических произведений групп.

Лемма 2.3. (см. [2, теорема 2]) *Если элемент x группы $\prod_{i\in I}^n G_i$ не сопряжен в группе $\prod_{i\in I}^n G_i$ никакому элементу подгрупп G_i и не равен в F произведению двух инволюций, то в $\prod_{i\in I}^n G_i$ выполнено соотношение $x^n = 1$.*

В силу леммы 2.3 в группе $\prod_{i\in I}^n G_i$ выполнено соотношение $g^n = 1$. Сопоставляя последнее равенство с равенством $g^2 = 1$, получаем, что $g = 1$, поскольку n – нечетное число. Условие $g = 1$ означает, что автоморфизм Ψ – тривиальный, что противоречит доказанному выше утверждению, что Ψ является автоморфизмом порядка 2. Полученное противоречие доказывает, что Ψ – внешний автоморфизм. Теорема доказана. □

Следует подчеркнуть, что согласно основному результату работы [17] (см. также [18], [19]), для любого нечётного числа $n \geq 1003$ каждый нормальный автоморфизм свободной периодической группы $B(m, n)$ ранга $m > 1$ (конечного или бесконечного) является внутренним автоморфизмом, т.е.

$$Inn(B(m, n)) = Aut_{\mathcal{N}}(B(m, n)).$$

По определению, свободная периодическая (или свободная бернсайдова) группа $B(m, n)$ периода n и ранга m имеет следующее задание

$$B(m, n) = \langle a_1, a_2, ..., a_m \mid X^n = 1\rangle,$$

где X пробегает множество всех слов в алфавите $\{a_1^{\pm 1}, a_2^{\pm 1}, \ldots, a_m^{\pm 1}\}$. Согласно теореме 5 работы [16], если все G_i суть свободные периодические группы показателя n, то n-периодическое произведение $\prod_{i\in I}^n G_i$ также есть свободная периодическая группа показателя n, ранг которой равен сумме рангов сомножителей G_i. Таким образом, в терминах n-периодических произведений указанный результат работы [17] можно переформулировать следующим образом: *для любого нечётного числа $n \geq 1003$ каждый нормальный автоморфизм n-периодического произведения $B(m_1, n) \overset{n}{*} B(m_2, n)$ свободных периодических групп $B(m_1, n)$ и $B(m_2, n)$ рангов m_1, $m_2 \geq 1$ является внутренним автоморфизмом.*

В связи с этим отметим, что из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 2.1. *Для любого нечётного числа $n \geq 665$ и для любого взаимно простого с n нечетного числа k n-периодическое произведение $B(m,k) \overset{n}{*} B(m,k)$ обладает нормальным автоморфизмом, который не является внутренним.*

Доказательство. Рассмотрим n-периодическое произведение $B(m,k) \overset{n}{*} B(m,k)$, где k и n – нечетные числа, $n \geq 665$ и $(k,n) = 1$. Так как период k группы $B(m,k)$ – нечетное число, то в $B(m,k)$ не содержатся инволюции. Из условия взаимной простаты чисел k и n вытекает, что $B(m,k) = B(m,k)^n$. Укажем автоморфизм порядка 2 группы $B(m,k)$. Таковым является, например, автоморфизм $\alpha : B(m,k) \to B(m,k)$, заданный на свободных порождающих $a_1, ..., a_m$ группы $B(m,k)$ формулами $\forall a_i(\alpha(a_i) = a_i^{-1})$. Таким образом, все условия теоремы 2.1 выполнены и, поэтому, группа $B(m,k) \overset{n}{*} B(m,k)$ обладает нормальным внешним автоморфизмом. $\square$

На самом деле, нетрудно заметить, что рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 2.1, позволяют получить следующий более общий результат.

Следствие 2.2. *Пусть G_1 и G_1 – произвольные группы, обладающие автоморфизмами порядка $k > 1$ и порядок каждого элемента групп G_1, G_2 взаимно прост как с k, так и с n, где $n \geq 665$ некоторое нечетное число. Тогда если $G_i = G_i^n$, $i = 1, 2$, то n-периодическое произведение $G_1 \overset{n}{*} G_2$ обладает внешним нормальным автоморфизмом.*

Доказательство. Повторив начало доказательства теоремы 2.1, построим автоморфизм $\Psi : G_1 \overset{n}{*} G_2 \to G_1 \overset{n}{*} G_2$ как продолжение автоморфизмов $\psi_i : G_i \to G_i$ порядка k групп G_i, $i = 1, 2$. Так как порядки всех элементов групп G_i взаимно просты с n, то имеет место равенство $G = G^n$. Предположив, что автоморфизм Ψ является внутренним, как и в теореме 2.1, найдем элемент g удовлетворяющий соотношениям $g^k = 1$ и $\Psi(x) = gxg^{-1}$ для всех $x \in G$. Элемент g не сопряжен никакому элементу подгрупп G_i, $i = 1, 2$, поскольку порядки элементов групп G_i, $i = 1, 2$, взаимно просты с k согласно условию теоремы. Элемент g также не равняется произведению двух инволюций, поскольку все произведения двух инволюций группы $G_1 \overset{n}{*} G_2$ (если такие существуют) имеют бесконечный порядок. Значит, в силу леммы 2.3, имеет место соотношение $g^n = 1$. Так как $(k, n) = 1$, то для некоторых целых чисел u и v имеет место равенство $ku + nv = 1$. Тогда имеем

$g = g^{ku+nv} = 1$, и, тем самым, Ψ – тривиальный автоморфизм. Это противоречит тому, что автоморфизм Ψ имеет порядок $k > 1$. $\square$

Следствие 2.3. *Для любого нечётного числа $n \geq 665$ и для любых взаимно простых с n нечетных чисел k_1, k_2 n-периодическое произведение $B(m_1, k_1)\overset{n}{*}B(m_2, k_2)$ обладает нормальным автоморфизмом, который не является внутренним.*

В заключение отметим представляющий интерес следующий вопрос:
Верно ли, что каждый нормальный автоморфизм n-периодического произведения нетривиальных групп периода n является внутренним?

Abstract. The paper proves that, as opposed to free product of groups, for any odd $n \geq 665$ there are some groups G_1 and G_2 with n-periodic product $G_1 \overset{n}{*} G_2$ possessing a normal outer automorphism.

Список литературы

[1] С. И. Адян, “Периодическое произведение групп”, Теория чисел, математический анализ и их приложения, Тр. МИАН , **142**, Наука, М., 3 – 21 (1976).
[2] С. И. Адян “Еще раз о периодических произведениях групп и проблеме А. И. Мальцева”, Матем. заметки, **88**, no. 6, 803 – 810 (2010).
[3] А. Ю. Ольшанский, “Проблема А. И. Мальцева об операциях над группами”, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **14**, 225 – 249 (1989).
[4] S. V. Ivanov, “On periodic products of groups”, Internat. J. Algebra Comput., **5**, no. 1, 7 – 17 (1995).
[5] A. Lubotzky, “Normal automorphisms of free groups”, J. Algebra, **63**, no. 2, 494 – 498 (1980).
[6] A. S.-T. Lue, “Normal automorphisms of free groups”, J. Algebra, **64**, no. 1, 52 – 53 (1980).
[7] M. Jarden, “Normal automorphisms of free profinite groups”, J. Algebra, **62**, no. 1, 118–123 (1980).
[8] M. Jarden, J. Ritter, “Normal automorphisms of absolute Galois groups of $\mathfrak{p}$-adic fields”, Duke Mathematical Journal, **47**, no. 1, 47 – 56 (1980).
[9] В. А. Романьков, “Нормальные автоморфизмы дискретных групп”, Сибирск. Мат. Ж., **24**, no. 4, 138 – 149 (1983).
[10] Ч. К. Гупта, Н. С. Романовский, “Нормальные автоморфизмы свободной в многообразии $\mathcal{N}_2\mathcal{A}$ про-p-группы”, Алгебра и логика, **35**, no. 3, 249 – 267 (1996).
[11] Н. С. Романовский, “Нормальные автоморфизмы свободных разрешимых про-p-групп”, Алгебра и логика, **36**, no. 4, 441 – 453 (1997).
[12] G. Endimioni, “Pointwise inner automorphisms in a free nilpotent group”, Q. J. Math., **53**, no. 4, 397 – 402, (2002).
[13] O. Bogopolski, E. Kudryavtseva, H. Zieschang, “Simple curves on surfaces and an analog of a theorem of Magnus for surface groups”, Math. Z., **247**, no. 3, 595 – 609 (2004).
[14] A. Minasyan, D. Osin, “Normal automorphisms of relatively hyperbolic groups”, Trans. Amer. Math. Soc., **362**, no. 11, 6079 – 6103 (2010).
[15] М. В. Нещадим, “Свободное произведение групп не имеет внешних нормальних автоморфизмов”, Алгебра и логика, **35**, no. 5, 562 – 566 (1996).
[16] С. И. Адян, “О простоте периодических произведений групп”, Докл. АН СССР, **241**, no. 4, 745 – 748 (1978).
[17] В. С. Атабекян, “Нормальные автоморфизмы свободных бернсайдовых групп”, Изв. РАН. Сер. матем., **75**, no. 2, 3 – 18 (2011).

[18] E. A. Cherepanov, "Normal automorphisms of free Burnside groups of large odd exponents", Internat. J. Algebra Comput, **16**, no. 5, 839 – 847 (2006).

[19] В. С. Атабекян, "Не φ-допустимые нормальные подгруппы свободных бернсайдовых групп", Изв.НАН Армении. Математика, **45**, no. 2, 21 – 36 (2010).

Поступила 11 марта 2011