

Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 5, 2011, стр. 53-64.

ОГРАНИЧЕННЫЕ ПРОЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ

А. И. ПЕТРОСЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *petrosyan@instmath.sci.am*

Аннотация. В статье рассматриваются ограниченные операторы, заданные в банаховых пространствах $L^\infty(B)$ и $L^1(B)$, где B – единичный шар в $\mathbb{C}^n$. Областью значений этих операторов являются, соответственно, пространства $A_\infty(\varphi)$ и $A^1(\psi)$ голоморфных функций, которые зависят от нормальной пары весовых функций $\{\varphi, \psi\}$.

MSC2010 number: 30H05, 46E15

Ключевые слова: банаховые пространства; аналитические функции; нормальная пара; проекторы.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются пространства $A_\infty(\varphi)$ и $A^1(\psi)$ функций, голоморфных в единичном шаре $B \subset \mathbb{C}^n$. Эти пространства зависят от пары весовых функций $\{\varphi, \psi\}$, и их естественным образом можно рассматривать как замкнутые подпространства соответственно $L^\infty(B)$ и $L^1(B)$.

Многие свойства весовых пространств голоморфных функций, такие, как их полнота, ограниченность функционала “значение в точке”, непрерывность q -растяжения и др. (см. предложения 2.1–2.4) справедливы для весьма общего класса весовых функций: достаточно, чтобы они были положительными, непрерывными и удовлетворяли (2.1). В то же время вопросы, связанные с ограниченностью операторов естественного проектирования требуют, чтобы скорость стремления к нулю функции φ была бы ограничена сверху и снизу степенными функциями. В связи с этим, следуя Шилдсу и Вильямсу [1], вводится понятие нормальной функции (определение 2.1) и понятие нормальной пары весовых функций (определение 2.2). Понятие нормальной пары оказалось удобным для формулировки

утверждений, связанных с оценками интегралов и для описания проекторов, заданных в весовых пространствах (лемма 3.4, теоремы 4.1 и 4.2).

В данной статье некоторые из результатов, полученных в [1] для случая единичного круга на плоскости, обобщаются на случай единичного шара в $\mathbb{C}^n$.

Ниже будем пользоваться следующими обозначениями:

$\langle z, w \rangle = \sum_{k=1}^n z_k \bar{w}_k$ – скалярное произведение для точек $z, w \in \mathbb{C}^n$, а $|z| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$ – соответствующая норма;

$B = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ – открытый единичный шар в $\mathbb{C}^n$;

$S = \partial B = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$ – его граница, являющаяся единичной сферой в $\mathbb{C}^n$;

$H(B)$ – множество всех функций, голоморфных в B ;

$d\nu$ – мера Лебега в $\mathbb{C}^n$, нормированная условием $\nu(B) = 1$,

$d\sigma$ – мера площади поверхности на S , нормированная условием $\sigma(S) = 1$;

для мультииндекса $m = (m_1, \dots, m_n)$ обозначим

$m! = m_1! \cdots m_n!$, $|m| = m_1 + \cdots + m_n$, $z^m = z_1^{m_1} \cdots z_n^{m_n}$.

2. ПРОСТРАНСТВА ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть функции $\varphi(r)$ и $\psi(r)$ положительны и непрерывны на $[0, 1)$ и

$$(2.1) \quad \lim_{r \rightarrow 1} \varphi(r) = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^1 \psi(r) dr < \infty.$$

Среди этих функций выделим так называемые нормальные функции и нормальные пары.

Определение 2.1. Положительная и непрерывная на $[0, 1)$ функция φ называется нормальной, если существуют три константы $0 < \epsilon < k$ и $0 \leq r_0 < 1$ такие, что

$$(2.2) \quad \begin{aligned} & \frac{\varphi(r)}{(1-r)^\epsilon} \text{ убывает при } r_0 \leq r < 1 \quad \text{и} \quad \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{\varphi(r)}{(1-r)^\epsilon} = 0, \\ & \frac{\varphi(r)}{(1-r)^k} \text{ возрастает при } r_0 \leq r < 1 \quad \text{и} \quad \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{\varphi(r)}{(1-r)^k} = \infty. \end{aligned}$$

Заметим, что ϵ и k определяются функцией φ неоднозначно.

Определение 2.2. Скажем, что пара функций $\{\varphi, \psi\}$ составляет нормальную пару, если φ нормальна и существует такое число α (индекс пары), что

$$(2.3) \quad \varphi(r)\psi(r) = (1 - r^2)^\alpha, \quad 0 \leq r < 1, \quad \text{и} \quad \int_0^1 \psi(r) dr < \infty.$$

Лемма 2.1. Если функция φ нормальна, то существует такая функция ψ , что $\{\varphi, \psi\}$ является нормальной парой.

Доказательство см. в [1]. Отметим, что если $\alpha > k$, то функция ψ также нормальна с соответствующими степенями $\alpha - k$ и $\alpha - \epsilon$.

Пусть φ и ψ удовлетворяют (2.1). Продолжим эти функции в B , положив $\varphi(z) = \varphi(|z|)$ и $\psi(z) = \psi(|z|)$ и определим пространства голоморфных функций:

$$A_\infty(\varphi) = \left\{ f \in H(B) : \|f\|_\varphi = \sup_{z \in B} |f(z)|\varphi(z) < \infty \right\};$$

$$A^1(\psi) = \left\{ f \in H(B) : \|f\|_\psi = \int_B |f(z)|\psi(z) d\nu(z) < \infty \right\}.$$

Эти пространства в указанных нормах являются линейными нормированными пространствами. Исследуем их свойства подробнее.

При фиксированном $z \in B$ отображение $f \mapsto f(z)$ является линейным функционалом «значение в точке» в $A^1(\psi)$. Как следует из следующего предложения, этот функционал непрерывен.

Предложение 2.1. Для всякой функции $f \in A^1(\psi)$ и любой точки $z \in B$

$$|f(z)| \leq \frac{2^{2n}}{(1 - |z|)^{2n-1}} \left(2n \int_{(1+|z|)/2}^1 r^{2n-1} \psi(r) dr \right)^{-1} \|f\|_\psi.$$

Доказательство. Следующая оценка для ядра Пуассона очевидна:

$$(2.4) \quad P(z, \zeta) = \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^{2n}} \leq \frac{1 + |z|}{(1 - |z|)^{2n-1}} \leq \frac{2}{(1 - |z|)^{2n-1}}.$$

Пусть $z \in B$ и $|z| < R < 1$. В силу субгармоничности функции $|f(Rz)|$ в окрестности шара $\overline{B}$ и (2.4) имеем

$$(2.5) \quad |f(Rz)| \leq \int_S |f(R\zeta)| P(z, \zeta) d\sigma(\zeta) \leq \frac{2}{(1 - |z|)^{2n-1}} \int_S |f(R\zeta)| d\sigma(\zeta).$$

Среднее интегральное $M(R) = \int_S |f(R\zeta)| d\sigma(\zeta)$ является неубывающей величиной от R . Поэтому

$$\begin{aligned} & 2n \int_R^1 r^{2n-1} \psi(r) dr \int_S |f(R\zeta)| d\sigma(\zeta) \leq \\ & \leq 2n \int_R^1 \int_S |f(t\zeta)| r^{2n-1} \psi(r) dr d\sigma(\zeta) = \\ (2.6) \quad & = \int_{R < |z| < 1} |f(z)| \psi(r) d\nu(z) \leq \|f\|_\psi. \end{aligned}$$

Из (2.5) и (2.6) следует

$$|f(Rz)| \leq \frac{2}{(1-|z|)^{2n-1}} \left(2n \int_R^1 r^{2n-1} \psi(r) dr \right)^{-1} \|f\|_\psi.$$

Сделав замену переменной $Rz \mapsto z$, получим

$$|f(z)| \leq \frac{2}{(R-|z|)^{2n-1}} \left(2n \int_R^1 r^{2n-1} \psi(r) dr \right)^{-1} \|f\|_\psi.$$

Взяв $R = (1 + |z|)/2$, получим наше утверждение. $\square$

Предложение 2.2. *Пространства $A^1(\psi)$ и $A_\infty(\varphi)$ являются банаховыми.*

Доказательство. Очевидно, эти пространства являются линейными нормированными, поэтому достаточно доказать их полноту. Сначала докажем полноту $A^1(\psi)$. Пусть последовательность f_j фундаментальна в $A^1(\psi)$ и пусть K — компактное подмножество B . Из предложения 2.1 следует, что существует константа $C = C(K)$ такая, что

$$\max_{z \in K} |f(z)| \leq C \|f\|_\psi$$

для всех $f \in A^1(\psi)$. Следовательно,

$$|f_j(z) - f_k(z)| \leq C \|f_j - f_k\|_\psi$$

для любых $z \in K$ и j, k . Поскольку f_j фундаментальна в $A^1(\psi)$, то отсюда следует, что на компактных подмножествах B последовательность f_j равномерно сходится к некоторой функции h , голоморфной в B . Из теоремы Фату следует, что $h \in A^1(\psi)$.

Случай $A_\infty(\varphi)$ проще. Пусть $f_j \in A_\infty(\varphi)$. На компактном подмножестве K шара функция $\varphi(z)$ ограничена от нуля, поэтому

$$|f_j(z) - f_k(z)| \leq C \varphi(z) |f_j(z) - f_k(z)| = C \|f_j - f_k\|_\varphi, \quad z \in K.$$

Если последовательность f_j фундаментальна в $A_\infty(\varphi)$, то отсюда следует, что на компактных подмножествах B последовательность f_j равномерно сходится к некоторой функции h , голоморфной в B . Нетрудно видеть, что f_j сходится к h и в норме $A_\infty(\varphi)$. $\square$

В следующем предложении утверждается непрерывность ϱ -растяжения в пространстве $A^1(\psi)$.

Предложение 2.3. Пусть $f \in A^1(\psi)$ и $f_\varrho(z) = f(\varrho z)$. Тогда

$$\|f_\varrho - f\|_\psi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varrho \rightarrow 1^-.$$

Доказательство. Используя выражение для элемента нормированного объема $d\nu$ в полярных координатах

$$(2.7) \quad d\nu(z) = 2n r^{2n-1} dr d\sigma(\zeta), \quad z = r\zeta, \quad \text{где } \zeta \in S,$$

(см., [3, Lemma 1.8]), для любого числа $\delta \in (0, 1)$ будем иметь

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \|f_\varrho - f\|_\psi &\leq \int_{|z| < \delta} |f(\varrho z) - f(z)| \psi(z) d\nu(z) + \\ &+ 2n \int_\delta^1 \left\{ \int_S (|f(\varrho r\zeta)| + |f(r\zeta)|) d\sigma(\zeta) \right\} r^{2n-1} \psi(r) dr. \end{aligned}$$

Ввиду того, что функция $|f(w)|^p$ субгармонична, ее среднее по сфере

$$m(\varrho) = \int_S |f(\varrho r\zeta)|^p d\sigma(\zeta)$$

является неубывающей величиной от ϱ : $m(\varrho) \leq m(1)$. Отсюда и из (2.8)

$$\|f_\varrho - f\|_\psi \leq \int_{|z| < \delta} |f(\varrho z) - f(z)| \psi(z) d\nu(z) + 2 \int_{\delta \leq |z| < 1} |f(z)| \psi(z) d\nu(z),$$

откуда видно, что выбрав число δ , а затем ϱ достаточно близкими к 1, правую часть этого неравенства можно сделать сколь угодно малой. $\square$

Отметим, что в случае $n = 1$ утверждения предложений 2.2 и 2.3 доказаны в [1]. Как известно, функции, голоморфные в окрестности $\overline{B}$, равномерно на $\overline{B}$ приближаются полиномами от z (например, отрезками ряда Тейлора), поэтому из предложения 2.3 получаем следующее

Следствие 2.1. Голоморфные полиномы плотны в $A^1(\psi)$.

Нетрудно заметить, что предложение 2.3 и его следствие для пространства $A_\infty(\varphi)$ неверны. Они справедливы в следующем слабом варианте.

Предложение 2.4. Пусть $f \in A_\infty(\varphi)$. Тогда

- (i) f_ϱ слабо* сходится к f при $\varrho \rightarrow 1^-$.
- (ii) Голоморфные полиномы слабо* плотны в $A_\infty(\varphi)$.

Доказательство. (i) Нужно доказать, что для любой функции $g \in L^1(B)$ имеет место равенство

$$\lim_{\varrho \rightarrow 1^-} \int_B \varphi(w) f_\varrho(w) g(w) d\nu(w) = \int_B \varphi(w) f(w) g(w) d\nu(w).$$

Это следует из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, поскольку $f_\varrho(w) \rightarrow f(w)$ поточечно при $\varrho \rightarrow 1^-$ и $w \in B$ и, кроме того, $|(\varphi f_\varrho g)(w)| \leq \|f\|_\varphi |g(w)|$.

(ii) Для любого $\varrho \in (0, 1)$ частичные суммы ряда Тейлора функции $f_\varrho(z)$ сходятся к ней равномерно на $\overline{B}$. Из этого факта, с учетом доказанного выше пункта (i) следует утверждение (ii). $\square$

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Всюду ниже предполагается, что $\{\varphi, \psi\}$ составляют нормальную пару.

Лемма 3.1. Для любого числа $c > 0$ справедлива оценка

$$\int_S \frac{d\sigma(\zeta)}{|1 - \langle \zeta, z \rangle|^{n+c}} = O((1 - |z|)^{-c}) \quad \text{при } |z| \rightarrow 1^-.$$

Доказательство см. в [3, Глава 1, §3].

Лемма 3.2. Для $\gamma > -1$ и $m > 1 + \gamma$ имеем

$$\int_0^1 (1 - \rho r)^{-m} (1 - r)^\gamma dr \leq C(1 - \rho)^{1+\gamma-m}, \quad 0 < \rho < 1,$$

где константа $C = C(m, \gamma)$ от ρ не зависит.

Доказательство см. в [1].

Следующая лемма является некоторой модификацией леммы 8 из [1] и мы приведем ее доказательство. Отметим, что константа c , встречающаяся ниже в разных местах, необязательно одна и та же.

Лемма 3.3. Пусть $\{\varphi, \psi\}$ — нормальная пара, $\alpha + \beta - k > -1$ и $m \geq 1 + \alpha + \beta$.

Тогда

$$\int_0^1 (1 - \rho r)^{-m} (1 - r)^\beta \psi(r) dr \leq c \frac{1}{\varphi(\rho)} (1 - \rho)^{1+\alpha+\beta-m}, \quad 0 \leq \rho < 1.$$

Доказательство. В обозначениях (2.2) и (2.3) имеем

$$\int_0^1 (1 - \rho r)^{-m} (1 - r)^\beta \psi(r) dr = \int_0^{r_0} + \int_{r_0}^1 = I_1 + I_2.$$

Первый интеграл при $0 \leq \rho < 1$ ограничен. При $\rho > r_0$ для второго интеграла имеем

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{r_0}^1 (1 - \rho r)^{-m} (1 - r)^\beta (1 - r^2)^\alpha \frac{1}{\varphi(r)} dr = \int_{r_0}^\rho + \int_\rho^1 \leq \\ &\leq c \int_{r_0}^\rho (1 - \rho r)^{-m} (1 - r)^{\alpha+\beta-\varepsilon} \frac{(1 - r)^\varepsilon}{\varphi(r)} dr + \\ &+ c \int_\rho^1 (1 - \rho r)^{-m} (1 - r)^{\alpha+\beta-k} \frac{(1 - r)^k}{\varphi(r)} dr \leq \\ &\leq c \frac{(1 - \rho)^\varepsilon}{\varphi(\rho)} \int_{r_0}^\rho (1 - \rho r)^{-m} (1 - r)^{\alpha+\beta-\varepsilon} dr + \\ &+ c \frac{(1 - \rho)^k}{\varphi(\rho)} \int_\rho^1 (1 - \rho r)^{-m} (1 - r)^{\alpha+\beta-k} dr. \end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 3.2 следует требуемое утверждение, так как $\alpha + \beta - \varepsilon > \alpha + \beta - k > -1$ и $m > 1 + \alpha + \beta - \varepsilon > 1 + \alpha + \beta - k$. $\square$

Следующая лемма является основной.

Лемма 3.4. Если $\alpha + \beta - k > -1$ и $m \geq 1 + \alpha + \beta$, то

$$I = \int_B \frac{(1 - |w|^2)^\beta}{|1 - \langle w, z \rangle|^{n+m}} \psi(w) d\nu(w) \leq c \frac{1}{\varphi(z)} (1 - |z|)^{1+\alpha+\beta-m}, \quad z \in B.$$

Доказательство. Пусть $w = r\zeta$, где $r = |w|$, $\zeta \in S$. Пользуясь формулой (2.7), будем иметь

$$I = 2n \int_0^1 (1 - r^2)^\beta \psi(r) r^{2n-1} \left(\int_S \frac{d\sigma(\zeta)}{|1 - \langle \zeta, rz \rangle|^{n+m}} \right) dr.$$

Согласно лемме 3.1, внутренний интеграл имеет порядок $O((1 - r|z|)^{-m})$. Обозначив $|z| = \rho$, получим

$$I \leq c \int_0^1 (1 - \rho r)^{-m} (1 - r)^\beta \psi(r) dr.$$

Далее, ввиду леммы 3.3,

$$I \leq c \frac{1}{\varphi(\rho)} (1 - \rho)^{1+\alpha+\beta-m} = c \frac{1}{\varphi(z)} (1 - |z|)^{1+\alpha+\beta-m}.$$

□

4. ПРОЕКТОРЫ

Рассмотрим отображения

$$T_\infty: A_\infty(\varphi) \mapsto L^\infty(B), \quad T_1: A_1(\psi) \mapsto L^1(B),$$

определяемые равенствами $T_\infty f = \varphi f$, $T_1 g = \psi g$. Очевидно, они являются изометриями. Для их областей значений мы используем следующие обозначения:

$$TA^1 = T_1 A^1(\psi), \quad TA_\infty = T_\infty A_\infty(\varphi).$$

Для $\alpha > -1$ и $1 \leq p < \infty$ через A_α^p обозначим множество голоморфных функций пространства $L_\alpha^p = L^p(B, (1 - |z|^2)^\alpha d\nu(z))$, т.е. $A_\alpha^p = L_\alpha^p \cap H(B)$, а через

$$K_\alpha(z, w) = \frac{\gamma_\alpha}{(1 - \langle w, z \rangle)^{n+1+\alpha}},$$

воспроизводящее ядро гильбертова пространства A_α^2 . Здесь

$$\gamma_\alpha = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n + 1)\Gamma(\alpha + 1)}.$$

Теорема 4.1. (i) *Оператор P , определяемый равенством*

$$(Ph)(z) = \int_B K_\alpha(z, w) h(w) \psi(w) d\nu(w), \quad h \in L^\infty(B), \quad z \in B,$$

является ограниченным оператором, отображающим $L^\infty(B)$ на $A_\infty(\varphi)$; оператор $T_\infty P$ является ограниченным проектором из $L^\infty(B)$ на его подпространство TA_∞ .

(ii) *Оператор Q , определяемый равенством*

$$(Qf)(z) = \int_B K_\alpha(z, w) f(w) \varphi(w) d\nu(w), \quad f \in L^1(B), \quad z \in B,$$

является ограниченным оператором, отображающим $L^1(B)$ на $A^1(\psi)$; оператор $T_1 Q$ является ограниченным проектором из $L^1(B)$ на его подпространство TA^1 .

Доказательство. (i) Применяя лемму 3.4, получим

$$|(Ph)(z)| \leq \gamma_\alpha \|h\|_\infty \int_B \frac{\psi(w) d\nu(w)}{|1 - \langle w, z \rangle|^{n+1+\alpha}} \leq c \|h\|_\infty \frac{1}{\varphi(z)},$$

откуда следует, что P является ограниченным оператором, отображающим $L^\infty(B)$ в $A_\infty(\varphi)$. Покажем, что это отображение сюръективно. Пусть $h \in A_\infty(\varphi)$. Имеем

$$\begin{aligned} (P(\varphi h))(z) &= \int_B K_\alpha(z, w) \varphi(w) h(w) \psi(w) d\nu(w) = \\ (4.1) \quad &= \int_B K_\alpha(z, w) h(w) (1 - |w|^2)^\alpha d\nu(w). \end{aligned}$$

Из (2.2) следует, что $\varphi(z) \geq c(1 - |z|^2)^k$. Поэтому

$$\begin{aligned} |h(z)|(1 - |z|^2)^\alpha &= |f(z)|(1 - |z|^2)^k (1 - |z|^2)^{\alpha-k} \leq \\ &\leq c_1 |h(z)| \varphi(z) (1 - |z|^2)^{\alpha-k} \leq c_2 (1 - |z|^2)^{\alpha-k}. \end{aligned}$$

Поскольку $\alpha - k > -1$, то отсюда следует, что $h \in A_\alpha^1$. Как известно (см. [2] или [3]), для функций $h \in A_\alpha^1$ последний интеграл в (4.1) равен $h(z)$. Таким образом, для любого $h \in A_\infty(\varphi)$ имеем $(P(\varphi h))(z) = h(z)$, т. е. оператор PT_∞ является тождественным на $A_\infty(\varphi)$. Это означает, что P является сюръективным отображением, следовательно, $T_\infty P$ является проектором из $L^\infty(B)$ на его подпространство TA_∞ .

(ii) Снова используя лемму 3.4, будем иметь

$$\begin{aligned} \|Qf\|_\psi &= \int_B |(Qf)(z)| \psi(z) d\nu(z) \leq \\ &\leq \gamma_\alpha \int_B \left(\int_B \frac{|f(w)| \varphi(w) d\nu(w)}{|1 - \langle w, z \rangle|^{n+1+\alpha}} \right) \psi(z) d\nu(z) = \\ &= \gamma_\alpha \int_B \left(\int_B \frac{\psi(z) d\nu(z)}{|1 - \langle w, z \rangle|^{n+1+\alpha}} \right) |f(w)| \varphi(w) d\nu(w) \leq \\ &\leq c \int_B \frac{1}{\varphi(w)} |f(w)| \varphi(w) d\nu(w) = c \|f\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Таким образом, Q является ограниченным оператором, отображающим $L^1(B)$ в $A^1(\psi)$. Покажем, что множество значений оператора Q совпадает с $A^1(\psi)$. Пусть

$g \in A^1(\psi)$. Имеем

$$\begin{aligned} (Q(\psi g))(z) &= \int_B K_\alpha(z, w) \psi(w) g(w) \varphi(w) d\nu(w) = \\ (4.2) \quad &= \int_B K_\alpha(z, w) g(w) (1 - |w|^2)^\alpha d\nu(w). \end{aligned}$$

Из (2.1) следует ограниченность $\varphi(z)$ сверху. Поэтому

$$\psi(z) = \frac{(1 - |z|^2)^\alpha}{\varphi(z)} \geq c(1 - |z|^2)^\alpha.$$

Отсюда следует, что $A^1(\psi) \subset A_\alpha^1$. Поэтому, как и выше в пункте (i), последний интеграл в (4.2) равен $g(z)$. Таким образом, для любого $g \in A^1(\psi)$ имеем $(Q(\psi g))(z) = g(z)$, т. е. оператор QT_1 является тождественным на $A^1(\psi)$. Тем самым доказано, что Q является сюръективным отображением, следовательно, T_1Q является проектором из $L^1(B)$ на его подпространство TA^1 . $\square$

Лемма 4.1. Пусть $\mathfrak{L}(K_\alpha(\cdot, w))$ — линейная оболочка множества функций $\{K_\alpha(\cdot, w), w \in B\}$. Тогда

- (i) $\mathfrak{L}(K_\alpha(\cdot, w))$ плотна в $A^1(\psi)$;
- (ii) $\mathfrak{L}(K_\alpha(\cdot, w))$ слабо* плотна в $A_\infty(\varphi)$.

Доказательство. Утверждение (i) равносильно тому, что $\mathfrak{L}(K_\alpha(\cdot, w)\psi)$ плотна в $TA^1(\psi)$, а это означает, что всякий линейный непрерывный функционал на $TA^1(\psi)$, аннулирующий $\mathfrak{L}(K_\alpha(\cdot, w)\psi)$, является нулевым. Таким образом, с учетом теоремы Хана-Банаха, достаточно доказать, что если $h \in L^\infty(B)$ и

$$(4.3) \quad \int_B K_\alpha(z, w) \psi(z) h(\bar{z}) d\nu(z) = 0$$

для всех $w \in B$, то h аннулирует все пространство TA^1 . Пользуясь очевидным разложением

$$\frac{1}{(1 - \langle w, z \rangle)^{n+1+\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1+k+\alpha)}{\Gamma(n+1+\alpha)\Gamma(k+1)} \langle w, z \rangle^k$$

и формулой полинома Ньютона, получим

$$\begin{aligned} K_\alpha(\bar{z}, w) &= \gamma_\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1+k+\alpha)}{\Gamma(n+1+\alpha)\Gamma(k+1)} \sum_{|m|=k} \frac{k!}{m!} w^m z^m = \\ (4.4) \quad &= \sum_{|m|=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+|m|+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)m!} w^m z^m. \end{aligned}$$

Из (4.3) и (4.4) следует

$$\sum_{|m|=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+|m|+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)m!} w^m \int_B z^m \psi(z) h(\bar{z}) d\nu(z) = 0$$

для всех $w \in B$. Поэтому для всех мультииндексов m

$$\int_B z^m \psi(z) h(\bar{z}) d\nu(z) = 0,$$

откуда следует, что h аннулирует все голоморфные полиномы. Согласно следствию к предложению 2.3, h аннулирует все пространство TA^1 .

Аналогично доказывается пункт (ii), причем в этом случае применяется предложение 2.4(ii). $\square$

Ниже используется обозначение

$$(h_1, h_2) = \int_B h_1(\bar{z}) h_2(z) d\nu(z), \quad h_1 \in L^\infty(B), \quad h_2 \in L^1(B).$$

Теорема 4.2. *Справедливы следующие разложения в прямую сумму:*

$$(i) \quad L^\infty(B) = TA_\infty \oplus (TA^1)^\perp,$$

$$(ii) \quad L^1(B) = TA^1 \oplus (TA_\infty)^\perp,$$

$$\text{где } (TA^1)^\perp = \{f \in L^\infty(B) : (f, \psi g) = 0, \text{ для всех } g \in A^1\},$$

$$(TA_\infty)^\perp = \{g \in L^1(B) : (\varphi f, g) = 0, \text{ для всех } f \in A_\infty\}.$$

Доказательство. (i) Согласно теореме 4.1, оператор $T_\infty P$ является ограниченным проектором из $L^\infty(B)$ на TA_∞ . Поэтому достаточно доказать, что ядром этого проектора служит $(TA^1)^\perp$. Из определения $T_\infty P$ следует, что функция $f \in L^\infty(B)$ принадлежит ядру оператора $T_\infty P$ тогда и только тогда, если

$$(4.5) \quad \int_B f(z) \psi(z) K_\alpha(z, w) d\nu(z) = 0 \text{ для всех } w \in B.$$

Согласно лемме 4.1 конечные линейные комбинации функций $\{K_\alpha(\cdot, w), w \in B\}$ плотны в пространстве $A^1(\psi)$. Поэтому (4.5) равносильно тому, что $(f, \psi g) = 0$ для всех $g \in A^1$, т. е. $f \in (TA^1)^\perp$.

Аналогично доказывается (ii). $\square$

Abstract. The paper studies some bounded operators in the Banach spaces $L^\infty(B)$ and $L^1(B)$ over the unit ball B of $\mathbb{C}^n$, the range of which are the corresponding

А. И. ПЕТРОСЯН

holomorphic subspaces $A_\infty(\varphi)$ and $A^1(\psi)$ depending on a normal pair of weight-functions $\{\varphi, \psi\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A.L. Shields, D.L. Williams, “Bounded projections, duality, and multipliers in spaces of analytic functions”, Trans. Amer. Math. Soc., **162**, 287 – 302 (1971).
- [2] W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, New York (1987).
- [3] K. Zhu, Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball, Graduate Texts in Mathematics **226**, Springer-Verlag, New York (2005).

Поступила 2 декабря 2010