Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 5, 2011, стр. 3-14.

КИНЕМАТИЧЕСКАЯ МЕРА ОТРЕЗКОВ СОДЕРЖАЩИХСЯ В ОБЛАСТИ

Н. Г. АГАРОНЯН, В. К. ОГАНЯН

Ереванский государственный университет [1]
E-mails: *narine78@ysu.am*; *victo@aua.am*

Аннотация. В статье получена формула для вычисления кинематической меры $K(\mathbf{D}, l)$ множества отрезков постоянной длины l целиком лежащих в ограниченной, выпуклой области $\mathbf{D}$ на евклидовой плоскости. Эта формула позволяет найти явный вид кинематической меры $K(\mathbf{D}, l)$ для тех областей $\mathbf{D}$, для которых известно распределение длины хорды. В частности, используя эту формулу, выводятся явные выражения для меры $K(\mathbf{D}, l)$ для круга, правильного треугольника, прямоугольника и правильного пятиугольника.

Ключевые слова: функция распределения длины хорды; множество отрезков; кинематическая мера; ограниченное выпуклое множество.

Mathematics Subject Classification 2010: 60D05; 52A22; 53C65

1. Введение

Пусть S - отрезок длины l и пусть $\mathbf{D}$ - ограниченная, выпуклая область на евклидовой плоскости $\mathbf{R}^2$, с площадью $\|\mathbf{D}\|$ и периметром $|\partial\mathbf{D}|$. Как хорошо известно [1], [3], задача нахождения кинематической меры $K(\mathbf{D}, l)$ отрезков постоянной длины l, содержащихся в $\mathbf{D}$, имеет непростое решение, существенно зависящее от формы области. Известны явные выражения для $K(\mathbf{D}, l)$ лишь в двух случаях [1], [2]. В первом случае $\mathbf{D}$ является кругом $\mathbf{C}_d$, и, при этом, очевидно $K(\mathbf{C}_d, l) = 0$, если $d \leq l$, а при $d \geq l$

$$K(\mathbf{C}_d, l) = \frac{\pi\, d^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{l}{d} - \frac{l}{d}\sqrt{1 - \frac{l^2}{d^2}}\right]. \tag{1.1}$$

[1]Работа выполнена при частичной поддержке государственного комитета по науке Республики Армения, Грант 11-1A-125

Во втором случае $\mathbf{D}$ - прямоугольник $\mathbf{R}_{a,b}$ со сторонами a, b, причем $K(\mathbf{R}_{a,b}, l) = 0$, если l не меньше длины $\sqrt{a^2+b^2}$ диагонали прямоугольника $\mathbf{R}_{a,b}$ [1, 2], а если $l \leq \min(a,b)$, то

$$K(\mathbf{R}_{a,b}, l) = \pi\, a\, b - 2\, l\, (a+b) + l^2. \tag{1.2}$$

В настоящей статье получена формула, позволяющая вычислять кинематическую меру $K(\mathbf{D}, l)$ множества отрезков постоянной длины l, полностью лежащих в $\mathbf{D}$, посредством функции распределения длины хорды области $\mathbf{D}$. Полученная формула позволяет находить явный вид кинематической меры $K(\mathbf{D}, l)$ для областей $\mathbf{D}$ с наперед известным распределением длины хорды. В частности, с использованием этой формулы выводятся явные выражения для кинематической меры $K(\mathbf{D}, l)$ для круга, правильного треугольника, прямоугольника и правильного пятиугольника.

2. Кинематическая мера

Пусть $S_1 = M\,S$ - образ отрезка S при евклидовом движении $M \in \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ - группа всех евклидовых движений на плоскости. Для локально компактной группы $\mathfrak{M}$ существует локально конечная мера Хаара, то есть, локально конечная мера Бореля, которая инвариантна как слева, так и справа и не является тождественным нулем. Отрезок S_1 можно определять двумя координатами (g, t), где $g \in \mathbb{G}$ ($\mathbb{G}$ – пространство всех прямых на плоскости) прямая, на которой лежит отрезок S_1, а t - одномерная координата центра отрезка S_1 на прямой g. В пространстве $\mathbb{G} \times \mathbf{R}$ определим меру $m(\cdot)$ по его элементу следующим образом:

$$m(dS_1) = dg\, dt,$$

где dg - локально конечная мера в пространстве $\mathbb{G}$, инвариантная относительно группы $\mathfrak{M}$, а dt - одномерная лебегова мера на g. Мера $m(\cdot)$ называется кинематической мерой на группе $\mathfrak{M}$ [1], [3].

3. Основной результат

В этом параграфе получена основная формула для вычисления кинематической меры $K(\mathbf{D}, l)$ в терминах функции распределения длины хорды для области $\mathbf{D}$.

Очевидно, что $K(\mathbf{D},l)=0$, если $l\geq \operatorname{diam}(\mathbf{D})$, где $\operatorname{diam}(\mathbf{D})$ - диаметр области $\mathbf{D}$, т.е.

$$\operatorname{diam}(\mathbf{D})=\max\{\rho(x,y):\, x,y\in\mathbf{D}\},$$

где $\rho(x,y)$ - расстояние между точками x и y. Поэтому всюду в данной статье рассматривается случай $l\leq \operatorname{diam}(\mathbf{D})$. Очевидно, в этом случае

$$K(\mathbf{D},l)=\iint_{\{(g,t):\, S_1(g,t)\subset\mathbf{D}\}} dg\,dt=\int_{[\mathbf{D}]}(\chi(g)-l)^+\,dg,$$

где $[\mathbf{D}]=\{g\in\mathbb{G}:\ g\cap\mathbf{D}\neq\emptyset\}$ - множество прямых, пересекающих область $\mathbf{D}$, $\chi(g)=g\cap\mathbf{D}$ - хорда в $\mathbf{D}$, а

$$x^+=\begin{cases}0, & \text{если}\quad x\leq 0\\ x, & \text{если}\quad x>0.\end{cases}$$

Следовательно

$$(3.1)\qquad \begin{aligned}K(\mathbf{D},l)&=\int_{\chi(g)>l}\chi(g)\,dg-l\int_{\chi(g)>l}dg\\ &=\pi\,\|\mathbf{D}\|-G(l)-l\,|\partial\mathbf{D}|\,[1-F_{\mathbf{D}}(l)],\end{aligned}$$

где

$$G(x)=\int_{\chi(g)\leq x}\chi(g)dg,$$

а $F_{\mathbf{D}}(\cdot)$ - функция распределения длины хорды для области $\mathbf{D}$, определяемая по формуле

$$F_{\mathbf{D}}(y)=\frac{1}{|\partial\mathbf{D}|}\int_{\chi(g)\leq y}dg.$$

Преобразуем формулу (3.1) для меры $K(\mathbf{D},l)$ к более удобному для применений виду. Для этого докажем следующую формулу:

$$(3.2)\qquad G(x)=|\partial\mathbf{D}|\int_0^x u\,f_{\mathbf{D}}(u)\,du,$$

где $f_{\mathbf{D}}(x)$ - плотность распределения длины хорды области $\mathbf{D}$, т.е. $f_{\mathbf{D}}(x)=F'_{\mathbf{D}}(x)$ - первая производная функции распределения (см. [10]). Далее, для вычисления производной функции $G(x)$ заметим, что

$$(3.3)\qquad \begin{aligned}\frac{G(x+\triangle x)-G(x)}{\triangle x}&=\frac{1}{\triangle x}\int_{x<\chi(g)\leq x+\triangle x}\chi(g)\,dg\\ &=(x+\theta\triangle x)\,|\partial\mathbf{D}|\,\frac{F_{\mathbf{D}}(x+\triangle x)-F_{\mathbf{D}}(x)}{\triangle x}.\end{aligned}$$

Затем, полагая, что функция распределения $F_{\mathbf{D}}(x)$ обладает плотностью $f_{\mathbf{D}}(x)$, устремим в формуле (3.3) $\triangle x$ к нулю, получим

$$G'(x) = |\partial \mathbf{D}|\, x\, f_{\mathbf{D}}(x),$$

откуда следует, что

$$G(x) = G(0) + |\partial \mathbf{D}| \int_0^x u f_{\mathbf{D}}(u)\, du = |\partial \mathbf{D}| \int_0^x u f_{\mathbf{D}}(u)\, du,$$

поскольку $G(0) = \int_{\chi(g)\le 0} \chi(g)\, dg = 0$.

Теперь преобразуем (3.2) интегрированием по частям:

$$G(x) = |\partial \mathbf{D}| \int_0^x u\, f_{\mathbf{D}}(u)\, du = -|\partial \mathbf{D}| \int_0^x u\, d[1 - F_{\mathbf{D}}(u)]$$
$$= -x\, |\partial \mathbf{D}|\, [1 - F_{\mathbf{D}}(x)] + |\partial \mathbf{D}| \int_0^x [1 - F_{\mathbf{D}}(u)]\, du.$$

Следовательно

$$G(x) = |\partial \mathbf{D}| \int_0^x [1 - F_{\mathbf{D}}(u)]\, du - x\, |\partial \mathbf{D}|\, [1 - F_{\mathbf{D}}(x)]. \tag{3.4}$$

Наконец, подставляя (3.4) в формулу (3.1) для $K(\mathbf{D}, l)$ получаем основной результат параграфа:

$$K(\mathbf{D}, l) = \pi\, \|\mathbf{D}\| - l\, |\partial \mathbf{D}| + |\partial \mathbf{D}| \int_0^l F_{\mathbf{D}}(u)\, du. \tag{3.5}$$

Следовательно, если известен явный вид функции $F_{\mathbf{D}}(u)$ при $0 \le u \le l$, то используя (3.5) можно вывести явное выражение для $K(\mathbf{D}, l)$. Эффективность этого подхода показана в следующих параграфах статьи.

4. Случай круга

В случае круга $\mathbf{D} = \mathbf{C}_d$ диаметра d функция распределения длины хорды имеет вид [8]

$$F_{\mathbf{C}_d}(y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad y \le 0, \\ 1 - \sqrt{1 - \frac{y^2}{d^2}}, & \text{если} \quad 0 < y \le d, \\ 1, & \text{если} \quad y > d. \end{cases} \tag{4.1}$$

Следовательно, подставляя (4.1) в (3.5), получаем

$$K(\mathbf{C}_d, l) = \frac{\pi\, d^2}{4} - \pi\, d \int_0^l \sqrt{1 - \frac{u^2}{d^2}}\, du. \tag{4.2}$$

Так как

$$\int_0^l \sqrt{1-\frac{u^2}{d^2}}\,du = \frac{d}{2}\arcsin\frac{l}{d}+\frac{l}{2}\sqrt{1-\frac{l^2}{d^2}}, \tag{4.3}$$

то подстановкой (4.3) в (4.2) получим кинематическую меру $K(\mathbf{C}_d, l)$ при $l \le d$, т.е. формулу (1.1).

5. Случай правильного треугольника

В случае правильного треугольника $\mathbf{\Delta}$ со стороной a функция распределения длины хорды имеет вид [4, 6, 8]

$$F_{\mathbf{\Delta}}(y)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad y\le 0,\\ \left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)\frac{y}{a}, & \text{если} \quad 0\le y\le \frac{\sqrt{3}a}{2},\\ \frac{y}{2a}-\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\frac{y}{a}+\frac{2y}{\sqrt{3}a}\arcsin\frac{a\sqrt{3}}{2y}+\frac{\sqrt{4y^2-3a^2}}{2y}, & \text{если} \quad \frac{a\sqrt{3}}{2}\le y\le a,\\ 1, & \text{если} \quad y\ge a. \end{cases} \tag{5.1}$$

Подставляя значения (5.1) функции $F_{\mathbf{\Delta}}(u)$ в (3.5), получаем следующие выражения:

5.1. **Случай** $0\le l\le \frac{a\sqrt{3}}{2}$**.**

$$K(\mathbf{\Delta}, l)=\frac{\pi\, a^2\sqrt{3}}{4}-3\,a\,l+l^2\left[\frac{3}{4}+\frac{\pi\sqrt{3}}{6}\right].$$

5.2. **Случай** $\frac{a\sqrt{3}}{2}\le l\le a$**.**

$$K(\mathbf{\Delta}, l)=\frac{5\,\pi\, a^2\sqrt{3}}{8}-3\,a\,l+\left(\frac{3}{4}-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right)l^2 + 2\sqrt{3}\int_{a\sqrt{3}/2}^{l} u\arcsin\frac{a\sqrt{3}}{2\,u}\,du+\frac{3\,a}{2}\int_{a\sqrt{3}/2}^{l}\frac{\sqrt{4u^2-3\,a^2}}{u}\,du.$$

Однако,

$$\int_{a\sqrt{3}/2}^{l} u\arcsin\frac{a\sqrt{3}}{2\,u}\,du=-\frac{3\,\pi\, a^2}{16}+\frac{l^2}{2}\arcsin\frac{a\sqrt{3}}{2\,l}+\frac{\sqrt{3}\,a}{8}\sqrt{4\,l^2-3\,a^2}$$

и

$$\int_{a\sqrt{3}/2}^{l}\frac{\sqrt{4u^2-3\,a^2}}{u}\,du=\sqrt{4\,l^2-3\,a^2}-a\sqrt{3}\arccos\frac{a\sqrt{3}}{2\,l}.$$

Тем самым

$$K(\mathbf{\Delta}, l) = \left(\frac{3}{4} - \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right) l^2 - 3al + \frac{9\,a}{4}\sqrt{4\,l^2 - 3\,a^2}$$
$$+ \left(l^2\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}\,a^2}{2}\right) \arcsin\frac{a\sqrt{3}}{2\,l} - \frac{\sqrt{3}\,\pi\,a^2}{2}.$$

Таким образом, в случае правильного треугольника кинематическая мера $K(\mathbf{\Delta}, l)$ имеет вид

$$K(\mathbf{\Delta}, l) = \begin{cases} \frac{\pi\,a^2\sqrt{3}}{4} - 3\,a\,l + l^2\left[\frac{3}{4} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6}\right] & \text{при} \quad 0 \le l \le \frac{a\sqrt{3}}{2}, \\ \left(\frac{3}{4} - \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right) l^2 - 3al + \frac{9\,a}{4}\sqrt{4\,l^2 - 3\,a^2} & \\ + \left(l^2\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}\,a^2}{2}\right) \arcsin\frac{a\sqrt{3}}{2\,l} - \frac{\sqrt{3}\,\pi\,a^2}{2} & \text{при} \quad \frac{a\sqrt{3}}{2} \le l \le a. \end{cases}$$

При этом, нетрудно проверить, что

$$\lim_{l\uparrow\frac{a\sqrt{3}}{2}} K(\mathbf{\Delta}, l) = \lim_{l\downarrow\frac{a\sqrt{3}}{2}} K(\mathbf{\Delta}, l) = \frac{a^2}{16}\left(6\,\pi\sqrt{3} - 24\sqrt{3} + 9\right)$$

и

$$K(\mathbf{\Delta}, a) = 0.$$

6. Случай прямоугольника

В случае прямоугольника $\mathbf{R}_{a,b}$ со сторонами $a \le b$ мера $K(\mathbf{R}_{a,b}, l)$ различного вида в следующих трех случаях:

1) $0 \le l \le a$,
2) $a \le l \le b$,
3) $b \le l \le \sqrt{a^2 + b^2}$.

Для нахождения вида меры $K(\mathbf{R}_{a,b}, l)$ в этих случаях, отметим, что, как хорошо известно [5], [6], [8], [9], функция распределения длины хорды для прямоугольника имеет вид

$$F_{\mathbf{R}_{a,b}}(y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad y \le 0, \\ \frac{y}{a+b}, & \text{если} \quad 0 \le y \le a, \\ \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}\,\frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{y}, & \text{если} \quad a \le y \le b, \\ 1 - \frac{y}{a+b} + \left(\frac{a\sqrt{y^2-b^2}}{(a+b)y} + \frac{b\sqrt{y^2-a^2}}{(a+b)y}\right), & \text{если} \quad b \le y \le \sqrt{a^2+b^2}, \\ 1, & \text{если} \quad y \ge \sqrt{a^2+b^2}. \end{cases} \tag{6.1}$$

Подставляя значения (6.1) функции $F_{\mathbf{R}_{a,b}}(y)$ в (3.5), получаем следующие формулы.

6.1. **Случай** $0 \le l \le a$.

$$K(\mathbf{R}_{a,b}, l) = \pi\, a\, b - 2\,(a+b)\, l + 2\,(a+b) \int_0^l u\, \frac{1}{a+b}\, du$$
$$= \pi\, a\, b - 2\,(a+b)\, l + l^2,$$

что совпадает с формулой (1.2) (см. также [1]).

6.2. **Случай** $a \le l \le b$. Вновь пользуясь формулой (3.5) и выражением для $F_{\mathbf{R}_{a,b}}(y)$, из (6.1) получим

$$K(\mathbf{R}_{a,b}, l) = \pi\, a\, b - 2\,(a+b)\, l$$
$$+ 2\,(a+b) \left[\int_0^a u\, \frac{1}{a+b}\, du + \frac{a}{a+b}\,(l-a) + \frac{b}{a+b} \int_a^l \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}\, du \right]$$
$$= \pi\, a\, b - a^2 - 2\, b\, l - 2\, a\, b\, \arccos \frac{a}{l} + 2\, b\, \sqrt{l^2-a^2},$$

так как

$$\int_a^l \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}\, du = \sqrt{l^2-a^2} - a\, \arccos \frac{a}{l}. \tag{6.2}$$

6.3. **Случай** $b \le l \le \sqrt{a^2+b^2}$. Пользуясь формулой (3.5) и выражением для $F_{\mathbf{R}_{a,b}}(y)$, применяя (6.2) из (6.1) получим

$$K(\mathbf{R}_{a,b}, l) = \pi\, a\, b - 2\,(a+b)\, l + 2\,(a+b) \left[\int_0^a u\, \frac{1}{a+b}\, du + \frac{a}{a+b}\,(b-a) \right.$$
$$\left. + \frac{b}{a+b} \int_a^l \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}\, du + (l-b) - \int_0^a u\, \frac{1}{a+b}\, du + \frac{a}{a+b} \int_b^l \frac{\sqrt{u^2-b^2}}{u}\, du \right]$$
$$= \pi\, a\, b - a^2 - b^2 - 2\, a\, b \left[\arccos \frac{a}{l} + \arccos \frac{b}{l} \right] - l^2 + 2\, b\, \sqrt{l^2-a^2} + 2\, a\, \sqrt{l^2-b^2}.$$

Следовательно, в случае прямоугольника кинематическая мера $K(\mathbf{R}_{a,b}, l)$ имеет вид (см. [2])

$$K(\mathbf{R}_{a,b}, l) = \begin{cases} \pi\, a\, b - 2\,(a+b)\, l + l^2, & \text{если} \quad 0 \le l \le a, \\ \pi\, a\, b - a^2 - 2\, b\, l - & \\ -2\, a\, b\, \arccos \frac{a}{l} + 2\, b\, \sqrt{l^2-a^2}, & \text{если} \quad a \le l \le b, \\ \pi\, a\, b - a^2 - b^2 - l^2 - & \\ -2\, a\, b\, \left[\arccos \frac{a}{l} + \arccos \frac{b}{l} \right] & \\ +2\, b\, \sqrt{l^2-a^2} + 2\, a\, \sqrt{l^2-b^2}, & \text{если} \quad b \le l \le \sqrt{a^2+b^2}. \end{cases}$$

При этом, нетрудно проверить, что

$$\lim_{l\uparrow a} K(\mathbf{R}_{a,b},l)=\lim_{l\downarrow a} K(\mathbf{R}_{a,b},l)=\pi\,a\,b-a^2-2\,a\,b,$$
$$\lim_{l\uparrow b} K(\mathbf{R}_{a,b},l)=\lim_{l\downarrow b} K(\mathbf{R}_{a,b},l)=\pi\,a\,b-a^2-2\,b^2-2\,a\,b\,\arccos\frac{a}{b}+2\,b\sqrt{b^2-a^2}$$

и

$$K(\mathbf{R}_{a,b},\sqrt{a^2+b^2})=0.$$

7. Случай правильного пятиугольника

В случае правильного пятиугольника $\mathbf{P}_a$ со стороной a вид меры $K(\mathbf{P}_a,l)$ различен в следующих случаях.

1) $0\le l\le a$,
2) $a\le l\le \frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$,
3) $\frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}\le l\le \frac{(\sqrt{5}+1)\,a}{2}$.

При этом, нетрудно проверить, что площадь $\mathbf{P}_a$ равна

$$S(\mathbf{P}_a)=\frac{\sqrt{5}\,a^2}{4}\sqrt{5+2\sqrt{5}},$$

и, как хорошо известно [6, 9], функция распределения длины хорды для правильного пятиугольника имеет вид

$$F_{\mathbf{P}_a}(y)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad y\le 0,\\[4pt]
\frac{y}{a}\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi(\sqrt{5}-1)}{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right), & \text{если}\quad 0\le y\le a,\\[4pt]
1+\frac{\pi\,(5+3\sqrt{5})\,y}{5a\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \\
-\frac{2\,(\sqrt{5}+1)\,y}{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\arcsin\frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4y} & \\
-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cos\left(\arcsin\frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4y}\right), & \text{если}\quad a\le y\le \frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}},\\[4pt]
1+\frac{\pi\,(5+3\sqrt{5})\,y}{5a\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \\
-\frac{2\,(\sqrt{5}+1)\,y}{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\arcsin\frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4y} & \\
-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cos\left(\arcsin\frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4y}\right) & \\
-\frac{(\sqrt{5}+1)^2 y}{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\arccos\frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2y(\sqrt{5}-1)} & \\
+\frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)^2}\sin\left(\arccos\frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2y\,(\sqrt{5}-1)}\right), & \text{если}\quad \frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}\le y\le\frac{\sqrt{5}+1}{2}\,a,\\[4pt]
1, & \text{если}\quad y\ge\frac{\sqrt{5}+1}{2}\,a.\end{cases}$$

7.1. **Случай** $0 \le l \le a$**.** Используя (3.5) и приведенное выражение для $F_{\mathbf{P}_a}(y)$, получим

$$K(\mathbf{P}_a, l) = \frac{\sqrt{5}\,\pi\,a^2}{4}\sqrt{5+2\sqrt{5}} - 5\,a\,l + \frac{5\,l^2}{4} - \frac{\pi\,l^2\,(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.$$

7.2. **Случай** $a \le l \le \frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$**.** Вновь пользуясь (3.5) и выражением для $F_{\mathbf{P}_a}(y)$, а также равенством

$$\cos\left(\arcsin\frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4\,l}\right) = \frac{\sqrt{16\,l^2 - a^2\,(10+2\sqrt{5})}}{4\,l},$$

получим

$$\begin{aligned} K(\mathbf{P}_a, l) = {} & \frac{\sqrt{5}\,\pi\,a^2}{4}\sqrt{5+2\sqrt{5}} - \frac{15\,a^2}{4} \\ & - \frac{2\,\pi\,a^2\,(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \frac{\pi\,(5+3\sqrt{5})}{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\,l^2 \\ & - \frac{10\,(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\int_a^l u\,\arcsin\frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4\,u}\,du \\ & - \frac{5\,a\,(\sqrt{5}+1)}{8}\int_a^l \frac{\sqrt{16\,u^2 - a^2\,(10+2\sqrt{5})}}{u}\,du. \end{aligned}$$

Для упрощения этой формулы воспользуемся простыми равенствами

$$\begin{aligned} & \int \frac{\arcsin z}{z^3}\,dz = -\frac{1}{2\,z^2}\,\arcsin z - \frac{\sqrt{1-z^2}}{2\,z}, \\ & \int \frac{\sqrt{z^2-c^2}}{z} = \sqrt{z^2-c^2} - c\,\arccos\frac{c}{z}, \\ & \arcsin\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{2\,\pi}{5}, \quad \arccos\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$

Тогда окончательно получаем

$$\begin{aligned} K(\mathbf{P}_a, l) = {} & \frac{\sqrt{5}\,\pi\,a^2}{4}\sqrt{5+2\sqrt{5}} + \frac{\pi\,a^2\,(\sqrt{5}+1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \\ & - \frac{5\,(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\left(l^2 - \frac{1}{8}\,a^2\,(10+2\sqrt{5})\right)\arcsin\frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4\,l} \\ & + \frac{l^2\,\pi\,(5+3\sqrt{5})}{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} - \frac{15\,a\,(\sqrt{5}+1)}{16}\sqrt{16\,l^2 - a^2\,(10+2\sqrt{5})}. \end{aligned}$$

7.3. **Случай** $\frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} \le l \le \frac{(\sqrt{5}+1)\,a}{2}$**.** Вновь пользуясь (3.5) и выражением для $F_{\mathbf{P}_a}(y)$, а также тождеством

$$\sin\left(\arccos\frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2\,l\,(\sqrt{5}-1)}\right) = \frac{\sqrt{4\,l^2\,(\sqrt{5}-1)^2 - a^2(10+2\sqrt{5})}}{2\,l\,(\sqrt{5}-1)},$$

получим

$$\begin{aligned} K(\mathbf{P}_a, l) &= \frac{\sqrt{5}\,\pi\,a^2}{4}\sqrt{5+2\sqrt{5}} - \frac{15\,a^2}{4} \\ &- \frac{2\,\pi\,a^2\,(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \frac{\pi\,(5+3\sqrt{5})}{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\,l^2 \\ &- \frac{10\,(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\int_a^l u\,\arcsin\frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4\,u}\,du \\ &- \frac{5\,a\,(\sqrt{5}+1)}{8}\int_a^l \frac{\sqrt{16\,u^2 - a^2\,(10+2\sqrt{5})}}{u}\,du \\ &- \frac{5\,(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\int_{\frac{a\,\sqrt{5+2\,\sqrt{5}}}{2}}^l u\,\arccos\frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2\,u\,(\sqrt{5}-1)}\,du \\ &+ \frac{5\,a\,(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)^3}\int_{\frac{a\,\sqrt{5+2\,\sqrt{5}}}{2}}^l \frac{\sqrt{4\,(\sqrt{5}-1)^2\,u^2 - a^2\,(10+2\sqrt{5})}}{u}\,du. \end{aligned}$$

Подстановкой простых равенств, использованных при рассмотрении предыдущего случая, а также равенств

$$\arcsin\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{(\sqrt{5}-1)\sqrt{5+2\sqrt{5}}} = \frac{\pi}{2}, \quad \arcsin\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2(\sqrt{5}+1)} = \frac{\pi}{5},$$

формулу для $K(\mathbf{P}_a, l)$ приведем к следующей упрощенной форме:

$$\begin{aligned} K(\mathbf{P}_a, l) &= \frac{\sqrt{5}\,\pi\,a^2}{4}\sqrt{5+2\sqrt{5}} + \frac{\pi\,a^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1} \\ &- \frac{5\,(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\left(l^2 - \frac{1}{8}\,a^2\,(10+2\sqrt{5})\right)\arcsin\frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4\,l} \\ &- \frac{l^2\,\pi\,(5+\sqrt{5})}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} - \frac{15\,a\,(\sqrt{5}+1)}{16}\sqrt{16\,l^2 - a^2\,(10+2\sqrt{5})} \\ &+ 5\,(\sqrt{5}+1)\left(\frac{l^2\,(\sqrt{5}+1)}{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \frac{a^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{(\sqrt{5}-1)^3}\right)\arcsin\frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2\,l\,(\sqrt{5}-1)} \\ &+ \frac{15\,a\,(\sqrt{5}+1)}{(2\sqrt{5}-1)^3}\sqrt{4\,(\sqrt{5}-1)^2\,l^2 - a^2\,(10+2\sqrt{5})}. \end{aligned}$$

При этом, нетрудно проверить, что

$$\lim_{l\uparrow a} K(\mathbf{P}_a, l) = \lim_{l\downarrow a} K(\mathbf{P}_a, l) = \frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi\,(27-7\sqrt{5})}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} - 15\right),$$

$$\lim_{l\uparrow \frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}} K(\mathbf{P}_a, l) = \lim_{l\downarrow \frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}} K(\mathbf{P}_a, l)$$

и

$$K\left(\mathbf{P}_a, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\,a\right) = 0.$$

Замечание 7.1. *Выше вычислены точные значения меры $K(\mathbf{D}, l)$ в некоторых частных случаях, для которых известен явный вид функции распределения длины хорды. Однако, в* [9] *дан явный вид для функции распределения длины хорды для любого правильного многоугольника, а, в частности, для правильного шестиугольника соответствующий результат можно найти в* [7]*. Следовательно, пользуясь результатом* [9] *можно вычислить меру $K(\mathbf{D}, l)$ для любого правильного многоугольника.*

Abstract. The paper proves a formula for calculation of the kinematic measure $K(\mathbf{D}, l)$ of set of segments with constant length l, entirely contained in a bounded convex domain $\mathbf{D}$ of the Euclidean space. The obtained formula permits to find an explicit form for the kinematic measure $K(\mathbf{D}, l)$ for the domains $\mathbf{D}$ with known chord length distribution. In particular, application of the obtained formula gives explicit expressions for $K(\mathbf{D}, l)$ in the disc, regular triangle, rectangle and regular pentagon.

Список литературы

[1] Л. А. Сантало. *Интегральная геометрия и геометрические вероятности* (Наука, Москва, 1983).

[2] Ren De-Lin. *Topics in Integral Geometry*, Series in Pure Mathematics, **19** (World Scientific, Publishing CO., 1994).

[3] R. Schneider and W. Weil. *Stochastic and Integral Geometry* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008).

[4] R. Sulanke. "Die verteilung der sehnenlängen an ebenen und räumlichen figuren Math. Nachr., **23**, 51-74 (1961).

[5] W. Gille. "The chord length distribution of parallelepipeds with their limiting cases Exp. Techn. Phys., **36**, 197-208 (1988).

[6] Н. Г. Агаронян, В. К. Оганян. "Функции распределения длины хорды для многоугольников", Известия НАН Армении, сер. Математика, **40** (4), 43-56 (2005).

[7] Г. С. Арутюнян. "Функция распределения длины хорды для правильного шестиугольника", Ученые Записки Ереванского государственного университета, **1**, 17-24 (2007).

[8] D. Stoyan and H. Stoyan, *Fractals, Random Shapes and Point Fields* (John Wiley& Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore, 1994).

[9] H. Harutyunyan and V. Ohanyan, "Chord length distribution function for regular polygons", Advances in Applied Probability, **41**, 358-366 (2009).
[10] Н. Г. Агаронян, Г. С. Арутюнян, В. К. Оганян, "Случайная копия отрезка внутри выпуклой области", Известия НАН Армении, Математика, **45** (6), 348-356 (2010).

Поступила 12 февраля 2011