

Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 5, 2011, стр. 41-52.

НОРМАЛИЗИРОВАННЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ОБРАЗЫ НЕКОТОРЫХ 2×2 КОМПЛЕКСНЫХ МАТРИЦ

Л. З. ГЕВОРГЯН

*Государственный инженерный университет Армении
E-mail: levgev@hotmail.com*

Аннотация. Описываются нормализованные числовые образы некоторых 2×2 комплексных матриц.

MSC2010 number: 47A12, 47B15, 51M04.

Ключевые слова: Нормализованный числовой образ; конические сечения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – гильбертово пространство и A – оператор в H . Множество

$$W_n(A) = \left\{ \frac{\langle Au, u \rangle}{\|Ax\| \cdot \|x\|} : Au \neq \theta \right\}$$

в [1] получило принятое в настоящее время название - нормализованный числовой образ оператора A . Ранее Густафсон [5] разработал теорию антисобственных векторов, основанный на величине

$$\inf_{Au \neq \theta} \frac{|\langle Au, u \rangle|}{\|Au\| \cdot \|u\|}.$$

Практически одновременно М. Г. Крейн в [6] ввел понятие угловой девиации оператора A . Ее важность определяется ролью, которая она играет, в частности, в вопросах определения скорости сходимости итераций при решении операторных уравнений методом Ричардсона [4].

Некоторые свойства нормализованного числового образа исследованы в [2]. В [3] описаны эти множества для некоторых конечномерных и бесконечномерных операторов. Оказывается, что в отличие от обычного числового образа оператора, который согласно классической теореме Хаусдорфа-Теплица всегда

есть ограниченное выпуклое подмножество комплексной плоскости, нормализованный числовой образ имеет довольно сложную геометрическую структуру. Даже в простейшем нетривиальном случае ситуация довольно неординарна. Поэтому интерес к такому частному случаю кажется вполне оправданным. Ниже мы опишем нормализованные числовые образы некоторых 2×2 комплексных матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \nu \\ \sigma & \mu \end{pmatrix}, \quad \text{где } \lambda, \mu, \nu, \sigma \in \mathbb{C}.$$

2. СЛУЧАЙ НОРМАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

Имеет место следующее утверждение.

Предложение 2.1. *Нормализованный числовой образ нормальной матрицы A есть часть одной ветви гиперболы, содержащаяся внутри единичного круга. В исключительных случаях он может вырождаться в хорду или радиус единичного круга.*

Доказательство. Пусть A – нормальная матрица в двумерном пространстве. Очевидно, что приведя A к канонической форме (нетрудно заметить, что унитарное преобразование произвольного оператора не меняет нормализованный числовой образ), ее можно представить в виде

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Сперва мы рассмотрим случай $\lambda, \mu \neq 0$ и пусть $u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ и $\arg \lambda = \phi$, $\arg \mu = \psi$ (это обозначение будет использовано на протяжении всей работы).

Тогда

$$\frac{\langle Au, u \rangle}{\|Au\| \|u\|} = \frac{|\alpha|^2 \lambda + |\beta|^2 \mu}{\sqrt{|\alpha|^2 |\lambda|^2 + |\beta|^2 |\mu|^2} \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}}.$$

Обозначив частное $|\alpha|^2 / |\beta|^2$ через $t \in [0; +\infty]$, мы получим

$$(2.1) \quad z(t) = x(t) + iy(t) = \frac{\langle Au, u \rangle}{\|Au\| \|u\|} = \frac{\lambda t + \mu}{\sqrt{|\lambda|^2 t^2 + (|\lambda|^2 + |\mu|^2)t + |\mu|^2}},$$

$$z(+\infty) = e^{i \arg \lambda}.$$

Пусть $\lambda = a + ib$ и $\mu = c + id$. Отделив действительную и мнимую части, будем иметь

$$(2.2) \quad \begin{aligned} x &= x(t) = \frac{at + c}{\sqrt{(a^2 + b^2)t^2 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)t + c^2 + d^2}}, \\ y &= y(t) = \frac{bt + d}{\sqrt{(a^2 + b^2)t^2 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)t + c^2 + d^2}}, \end{aligned}$$

откуда $\frac{y}{x} = \frac{bt + d}{at + c}$. Подставив $t = \frac{dx - cy}{ay - bx}$ в первое из уравнений (2.1), получим

$$\begin{aligned} (ad - bc)^2 &= (a^2 + b^2)(dx - cy)^2 \\ &\quad + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(dx - cy)(ay - bx) + (c^2 + d^2)(ay - bx)^2. \end{aligned}$$

Расположив степени x и y по порядку, получим

$$\begin{aligned} &(d^2(a^2 + b^2) + b^2(c^2 + d^2) - bd(a^2 + b^2 + c^2 + d^2))x^2 \\ &+ ((ad + bc)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 2ab(c^2 + d^2) - 2cd(a^2 + b^2))xy \\ &+ (c^2(a^2 + b^2) + a^2(c^2 + d^2) - ac(a^2 + b^2 + c^2 + d^2))y^2 \\ &= (ad - bc)^2. \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} &\left(\sin^2 \varphi + \sin^2 \psi - \frac{|\lambda|^2 + |\mu|^2}{|\lambda||\mu|} \sin \varphi \sin \psi \right) x^2 \\ &+ \left(\frac{|\lambda|^2 + |\mu|^2}{|\lambda||\mu|} \sin(\varphi + \psi) - \sin 2\varphi - \sin 2\psi \right) xy \\ &+ \left(\cos^2 \varphi + \cos^2 \psi - \frac{|\lambda|^2 + |\mu|^2}{|\lambda||\mu|} \cos \varphi \cos \psi \right) y^2 = \sin^2(\varphi - \psi). \end{aligned}$$

Обозначив $k = \frac{|\lambda|^2 + |\mu|^2}{|\lambda||\mu|}$, получим

$$(2.3) \quad \begin{aligned} &(\sin^2 \varphi + \sin^2 \psi - k \sin \varphi \sin \psi) x^2 + \\ &(k \sin(\varphi + \psi) - \sin 2\varphi - \sin 2\psi) xy + \\ &(\cos^2 \varphi + \cos^2 \psi - k \cos \varphi \cos \psi) y^2 = \sin^2(\varphi - \psi). \end{aligned}$$

□

Дискриминант квадратичной формы (2.3) равен $D = -\frac{k^2-4}{4} \sin^2(\varphi - \psi)$. Так как $k \geq 2$ в силу неравенства между средне-арифметическим и средне-геометрическим, то кривая, определенная уравнением (2.2) есть часть одной ветви гиперболы, содержащаяся внутри единичного круга (вырожденная, если $\sin(\varphi - \psi) = 0$, что эквивалентно $\varphi = \psi$, $\varphi = \psi - \pi$ или $k = 2$, означающее $|\lambda| = |\mu|$). Действительно, если $\varphi = \psi$, то

$$z(t) = \frac{|\lambda|t + |\mu|}{\sqrt{|\lambda|^2 t^2 + (|\lambda|^2 + |\mu|^2)t + |\mu|^2}} e^{i\varphi}$$

и кривая сводится к двум отрезкам, соединяющим точки $e^{i\varphi}$ и $2\frac{\sqrt{|\lambda|\cdot|\mu|}}{|\lambda|+|\mu|} \cdot e^{i\varphi}$ в противоположных направлениях. При $\varphi = \psi - \pi$ имеем

$$z(t) = \frac{|\lambda|t - |\mu|}{\sqrt{|\lambda|^2 t^2 + (|\lambda|^2 + |\mu|^2)t + |\mu|^2}} e^{i\varphi}.$$

В этом случае $W_n(A)$ есть диаметр единичного круга, соединяющий точки $-e^{i\varphi}$ и $e^{i\varphi}$. Если же $|\lambda| = |\mu|$, то

$$z(t) = \frac{\lambda t + \mu}{|\lambda|t + |\mu|} = e^{i\varphi} \frac{t}{1+t} + e^{i\psi} \frac{1}{1+t}$$

представляет собой выпуклую комбинацию $e^{i\varphi}$ и $e^{i\psi}$.

Квадрат длины действительной полуоси есть

$$m^2 = \frac{4|\lambda||\mu|}{(|\lambda| + |\mu|)^2} \cos^2 \frac{\varphi - \psi}{2}.$$

Вершина гиперболы имеет полярные координаты $\left(m; \frac{\varphi + \psi}{2}\right)$, откуда

$$\inf_{Ax \neq \theta} \frac{|\langle Ax, x \rangle|}{\|Ax\| \|x\|} = \frac{2\sqrt{|\lambda||\mu|}}{|\lambda| + |\mu|} \cos \frac{\varphi - \psi}{2}.$$

Эта формула является обобщенным неравенством Канторовича [4]. В оставшемся случае $\mu = 0$, имеем

$$\frac{\langle Au, u \rangle}{\|Au\| \cdot \|u\|} = \frac{\lambda|\alpha|}{|\lambda| \cdot \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}} = \frac{|\alpha|}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}} e^{i\varphi}, \quad (\alpha \neq 0),$$

так что в этом случае кривая есть полуоткрытый интервал $(0, e^{i\varphi}]$.

3. СЛУЧАЙ МАТРИЦЫ С НУЛЕВОЙ СТРОКОЙ ИЛИ СТОЛБЦОМ

а) Пусть

$$(3.1) \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & \nu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

и $\langle Au, u \rangle = \lambda |\alpha|^2 + \nu \beta \bar{\alpha}$.

Условие $\alpha = 0$ означает $\langle Au, u \rangle = 0$, поэтому рассмотрим случай $\alpha \neq 0$. Пусть далее

$$w = \frac{\langle Au, u \rangle}{\|Au\| \cdot \|u\|}.$$

Имеем

$$w = \frac{\lambda |\alpha|^2 + \nu \beta \bar{\alpha}}{|\lambda \alpha + \nu \beta| \cdot \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}} = \frac{\lambda + \nu z}{|\lambda + \nu z| \cdot \sqrt{1 + |z|^2}},$$

где $z = \frac{\beta}{\alpha}$. Обозначая $\tau(z) = \frac{\lambda + \nu z}{|\lambda + \nu z|}$, $z \neq -\frac{\lambda}{\nu}$, получаем

$$(3.2) \quad w(z) = \frac{\tau(z)}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$$

Пусть $C_r = \{z : |z| = r\}$, ($r > 0$) и $D_r = \{\lambda + \nu z : z \in C_r\}$. Очевидно, что D_r есть окружность радиуса $|\nu| r$ с центром в точке λ . Так как $W_n(cA) = e^{i \arg c} W_n(A)$ для любого комплексного c , то можно предположить, что один из элементов матрицы A есть положительное число. Для простоты предположим, что $\lambda > 0$. Если $0 < r \leq \frac{\lambda}{|\nu|}$, то

$$(3.3) \quad |\arg \tau(z)| \leq \arcsin \frac{r |\nu|}{\lambda}$$

и образ C_r при отображении (3.2) есть дуга окружности радиуса $\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}$, определенная неравенством (3.3), так что концы этой дуги будут иметь координаты

$$(3.4) \quad \left(\frac{\sqrt{1 - r^2 |\nu|^2 / \lambda^2}}{\sqrt{1 + r^2}}; \pm \frac{r |\nu| / \lambda}{\sqrt{1 + r^2}} \right).$$

Если же $r > \frac{\lambda}{|\nu|}$, то образом C_r будет вся окружность. Границей $W_n(A)$ является огибающая этих кривых.

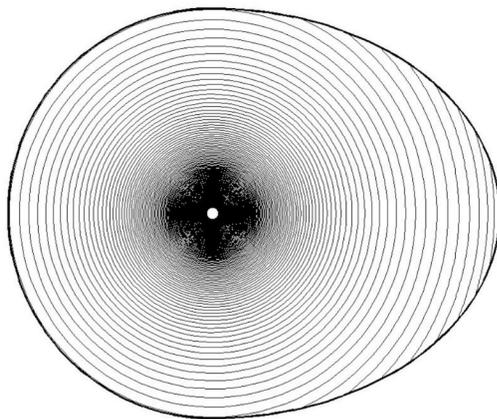


Рис. 1. Кривые уровня и их огибающая.

Исключая r из формулы (3.4), получаем

$$y = \pm \frac{|\nu|}{\sqrt{\lambda^2 + |\nu|^2}} \sqrt{1 - x^2}.$$

Предложение 3.1. Пусть A – матрица вида (3.1) с некоторым $\lambda > 0$. Ее нормализованным числовым образом является область, ограниченная в правой полуплоскости эллипсом с большой полуосью 1 и малой полуосью $\frac{|\nu|}{\sqrt{\lambda^2 + |\nu|^2}}$, а в левой полуплоскости – полуокружностью с радиусом, равным малой полуоси. Для произвольного ненулевого комплексного λ вся картина должна быть повернута на угол $\arg \lambda$.

Нетрудно заметить, что для жордановой клетки с нулевой диагональю

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \nu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

нормализованным числовым образом является открытый единичный круг $\{z : |z| < 1\}$.

б) Случай матрицы с нулевым столбцом. Пусть

$$(3.5) \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$S = \frac{1}{\sqrt{|\lambda|^2 + |\nu|^2}} \begin{pmatrix} \lambda & \nu \\ \bar{\nu} & -\bar{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что матрица S унитарна и имеет место равенство

$$SCS^* = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \bar{\nu} & 0 \end{pmatrix},$$

означающее, что матрицы

$$C = \begin{pmatrix} \lambda & \nu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \bar{\nu} & 0 \end{pmatrix}$$

унитарно эквивалентны. Таким образом, мы приходим к следующему результату.

Предложение 3.2. *Нормализованные числовые образы матриц (3.1) и (3.5) совпадают при $|\nu| = |\sigma|$.*

4. СЛУЧАЙ МАТРИЦЫ С НУЛЕВОЙ ГЛАВНОЙ ДИАГОНАЛЬЮ

Предложение 4.1. *Нормализованный числовой образ матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \nu \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \nu \neq 0, \quad \sigma \neq 0,$$

есть эллипс.

Доказательство. Имеем

$$\frac{\langle Au, u \rangle}{\|Au\| \|u\|} = \frac{\nu\beta\bar{\alpha} + \sigma\alpha\bar{\beta}}{\sqrt{|\nu\beta|^2 + |\sigma\alpha|^2} \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}}.$$

Обозначив

$$z = \frac{\bar{\alpha}}{\beta} \exp\left(i \frac{\arg \nu - \arg \sigma}{2}\right),$$

после несложных преобразований для указанного частного получаем

$$(4.1) \quad \frac{\langle Au, u \rangle}{\|Au\| \|u\|} = \frac{mz + \bar{z}}{\sqrt{m^2 + |z|^2} \sqrt{1 + |z|^2}} \exp\left(i \frac{\arg \nu + \arg \sigma}{2}\right),$$

где $m = \frac{|\nu|}{|\sigma|}$, $z \in \mathbb{C}$. Первый множитель в правой части (4.1) равен

$$\frac{mre^{it} + re^{-it}}{\sqrt{m^2 + r^2}\sqrt{1 + r^2}} = \frac{r(m+1)\cos t + ir(m-1)\sin t}{\sqrt{m^2 + r^2}\sqrt{1 + r^2}}.$$

Эта кривая (при фиксированном r) есть эллипс с полуосями

$$\frac{r(m+1)}{\sqrt{m^2 + r^2}\sqrt{1 + r^2}} \quad \text{и} \quad \frac{r|m-1|}{\sqrt{m^2 + r^2}\sqrt{1 + r^2}},$$

каждая из которых достигает своего наибольшего значения при $r = \sqrt{m}$. Поэтому границей интересующей нас области будет кривая, которая получается, если в (4.1) подставить $z = \sqrt{m} \exp(it)$. Таким образом, область, ограниченная эллипсом

$$w(t) = \left(\cos t + i \frac{|\nu| - |\sigma|}{|\nu| + |\sigma|} \sin t \right) \exp\left(i \frac{\arg \nu + \arg \sigma}{2}\right), \quad t \in [0, 2\pi)$$

есть нормализованный числовой образ матрицы A . □

5. СЛУЧАЙ ЖОРДАНОВОЙ КЛЕТКИ

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\frac{\langle Au, u \rangle}{\|Au\| \cdot \|u\|} = \frac{|\alpha|^2 + \nu\beta\bar{\alpha} + |\beta|^2}{\sqrt{|\alpha + \nu\beta|^2 + |\beta|^2} \cdot \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}}.$$

Обозначив $z = \frac{\alpha}{\beta} e^{-i \arg \nu}$, получим

$$w = \frac{1 + |\nu|\bar{z} + |z|^2}{\sqrt{|\nu| + |z|^2 + 1} \cdot \sqrt{|z|^2 + 1}},$$

так что в дальнейшем мы будем считать, что $\nu > 0$ и опускать знак модуля.

Тогда

$$w = \frac{1 + \nu x + x^2 + y^2 - i\nu y}{\sqrt{(\nu + x)^2 + y^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + 1}}.$$

Зафиксировав x или y , получим координатные кривые $w = f(y)$ или $w = g(x)$.

Используя производные легко усмотреть, что точка, в которой достигается минимум $g(x)$ не зависит от y и имеет место при $x = -\frac{\nu}{2}$. Другое доказательство

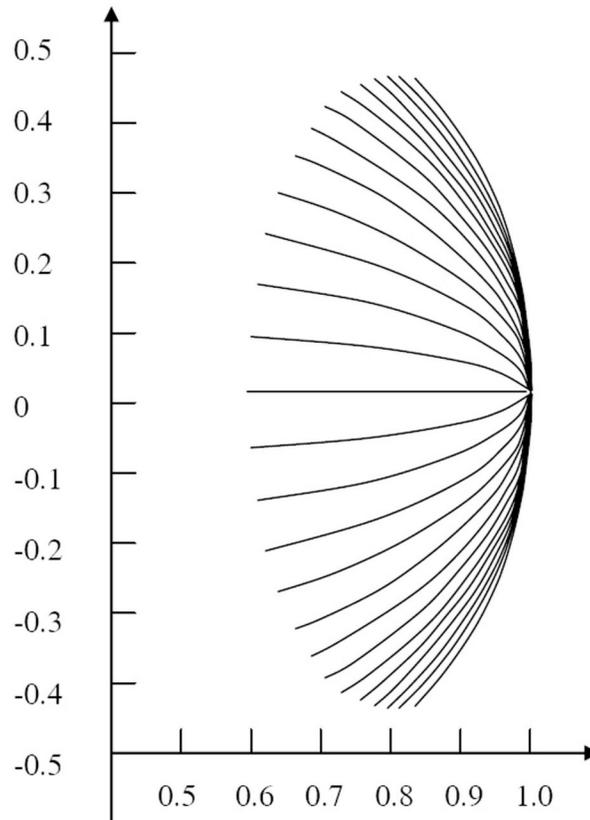


Рис. 2. Координатные кривые $w = g(x)$ для случая $\nu = 1$, $y = [-1.3, 1.3]$ с шагом 0.1

этого утверждения можно получить из формулы

$$w = \frac{t^2 + 1 - \frac{\nu^2}{4} + y^2 - i\nu y}{\sqrt{(\frac{\nu}{2} + t)^2 + y^2 + 1} \cdot \sqrt{(\frac{\nu}{2} - t)^2 + y^2 + 1}}, \quad t = x + \frac{\nu}{2}.$$

Таким образом, границей этой области является кривая, которая получится, если в $w = f(y)$ подставить экстремальное значение $x = -\frac{\nu}{2}$. Найдем образ вертикальной прямой $z = -\nu/2 + iy$, $y \in \mathbb{R}$

$$f(y) = \frac{1 - \nu^2/4 + y^2 - i\nu y}{1 + \nu^2/4 + y^2}.$$

Имеем

$$f(y) = \frac{4}{4 + \nu^2} - \frac{\nu^2}{4 + \nu^2} \cdot \frac{1 + \nu^2/4 - y^2}{1 + \nu^2/4 + y^2} - \frac{i\nu y}{1 + \nu^2/4 + y^2}.$$

Обозначив $\frac{2y}{\sqrt{4+\nu^2}} = \tan(t/2)$, получим

$$w = \frac{4}{4+\nu^2} + \frac{\nu^2}{4+\nu^2} \cos t + i \frac{\nu}{\sqrt{4+\nu^2}} \sin t, \quad t \in [0; 2\pi).$$

Окончательно получаем следующий результат.

Предложение 5.1. *Нормализованный числовой образ матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \nu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

есть внутренность эллипса

$$w = \left(\frac{4|\lambda|^2}{4|\lambda|^2 + |\nu|^2} + \frac{|\nu|^2}{4|\lambda|^2 + |\nu|^2} \cos t + i \frac{|\nu|}{\sqrt{4|\lambda|^2 + |\nu|^2}} \sin t \right) \exp(i \arg \lambda),$$

где $t \in [0, 2\pi)$.

Случай общей ненормальной матрицы $A = \begin{pmatrix} \lambda & \nu \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ с различными собственными значениями ($\lambda \neq \mu, \lambda, \mu \neq 0$) будет рассмотрен схематично. Так как $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \nu \\ \mu - \lambda \end{pmatrix}$ суть собственные векторы A , можно положить $u = \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда

$$(5.1) \quad \frac{\langle Au, u \rangle}{\|Au\| \cdot \|u\|} = \frac{\lambda|s|^2 + \nu\bar{s} + \mu}{\sqrt{|\lambda s + \nu|^2 + |\mu|^2} \cdot \sqrt{|s|^2 + 1}}.$$

Средний член удовлетворяет неравенству

$$\frac{|\nu\bar{s}|}{\sqrt{|\lambda s + \nu|^2 + |\mu|^2} \cdot \sqrt{|s|^2 + 1}} \leq \frac{|\nu|}{|\mu|}.$$

Пусть a, c – ненулевые, а b – произвольное комплексное число. Тогда

$$\left| \frac{1}{\sqrt{|a+b|^2 + |c|^2}} - \frac{1}{\sqrt{|a|^2 + |c|^2}} \right| \leq \frac{|b|}{\sqrt{|a+b|^2 + |c|^2} \sqrt{|a|^2 + |c|^2}},$$

откуда

$$\left| \frac{1}{\sqrt{|\lambda s + \nu|^2 + |\mu|^2}} - \frac{1}{\sqrt{|\lambda s|^2 + |\mu|^2}} \right| \leq \frac{|\nu|}{|\lambda s| \cdot |\mu|}$$

и

$$\left| \frac{1}{\sqrt{|\lambda s + \nu|^2 + |\mu|^2}} - \frac{1}{\sqrt{|\lambda s|^2 + |\mu|^2}} \right| \leq \frac{|\nu|}{|\mu|^2}.$$

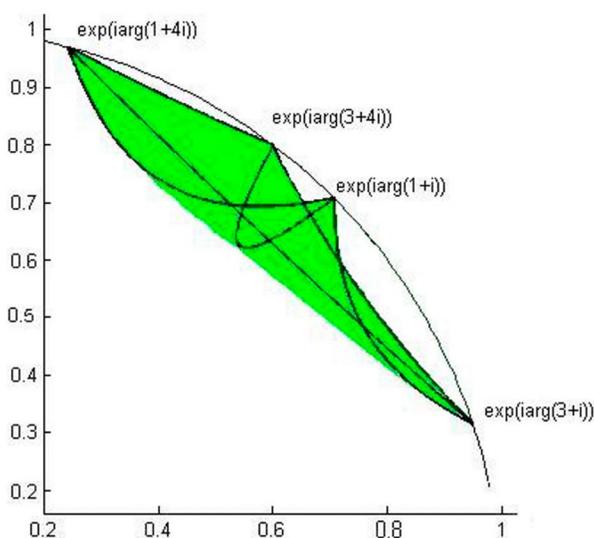


Рис. 3. Нормализованный числовой образ диагональной матрицы 4×4

Разность между двумя выражениями, определенными формулами (2.1) и (5.1) может быть оценена как

$$\frac{|\lambda| \cdot |\nu|}{|\lambda| \cdot |\mu|} + \frac{|\nu|}{|\mu|} + \frac{|\nu| |\mu|}{|\mu|^2} = 3 |\nu|,$$

следовательно, для достаточно малых значений $|\nu|$ нормализованный числовой образ A лежит в малой окрестности гиперболы, определенной Предложением 1. Для достаточно больших значений $|\nu|$ нормализованный числовой образ A мало отличается от нормализованного числового образа жордановой клетки.

С целью дать представление о взаимовлиянии различных собственных значений ниже представлен нормализованный числовой образ матрицы

$$A = \text{diag}(1 + i, 3 + i, 3 + 4i, 1 + 4i),$$

полученный методом Монте Карло. Черным цветом выделены куски гипербол (см. Рис. 3).

Л. З. ГЕВОРГЯН

Abstract. A description of the normalized numerical ranges of some complex 2×2 matrices is given.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. Auzinger, "Sectorial operators and normalized numerical range", *Appl. Numer. Math.*, **45** 367 – 388 (2003).
- [2] L. Gevorgyan, "On the convergence rate of iterations and the normalized numerical range of an operator", *Math. Sci. Res. J.*, **8**, no. 1, 16 – 26 (2004).
- [3] L. Gevorgyan, "On some properties of the normalized numerical range", *J. Contemp. Math. Anal.*, **41**, no.1, 14 – 21 (2006).
- [4] L. Gevorgyan, "Normalized numerical ranges of some operators", *Operators and Matrices*, **3**, 145 – 153 (2009).
- [5] K. Gustafson, "Antieigenvalue inequalities in operator theory, in *Inequalities III*", *Proc. Los Angeles Symposium*, ed. O. Shisha, Academic Press, 115 – 119 (1969).
- [6] М. Г. Крейн, "Об угловой локализации спектра мультипликативного интеграла в гильбертовом пространстве", *Функц. Анализ и его приложения*, **3**, no. 1, 89 – 90 (1969).

Поступила 5 ноября 2010