Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 5, 2011, стр. 25-40.

СУММИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ И СОПРЯЖЕННЫХ РЯДОВ ПО МЕТОДУ (C, α, β)

Л. Н. ГАЛОЯН

Российско–Армянский (Славянский) университет
E-mail: *lev.nik.galoyan@gmail.com*

Аннотация. В данной работе приводятся достаточные условия для (C, α, β) суммируемости тригонометрических рядов Фурье и сопряженных рядов.

MSC2010 number: 40G05, 42A24

Ключевые слова: Сопряженные ряды; обобщенные средние Чезаро; регулярный метод суммирования; функция ограниченной вариации.

1. Введение

Пусть числа $\{A_n^{\alpha,\beta}\}_{n=0}^{\infty}$ определяются как коэффициенты разложения в степенной ряд следующей аналитической функции

$$\frac{1}{(1-z)^{1+\alpha}} \cdot \left(\ln \frac{e}{1-z}\right)^{\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\alpha,\beta} z^n, \quad |z| < 1, \tag{1.1}$$

где α и β суть действительные числа.

В [4] А. Зигмундом детально изучены свойства этих чисел. Приведем некоторые из них.

$$A_n^{\alpha,\beta} \sim \frac{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad \alpha \neq -1, -2, \ldots, \tag{1.2}$$

$$A_n^{\alpha,\beta} \sim \beta(-1)^{\alpha-1}(|\alpha|-1)! n^{\alpha} (\ln n)^{\beta-1}, \quad \alpha = -1, -2, \ldots, \tag{1.3}$$

$$A_n^{\alpha+1,\beta} - A_{n-1}^{\alpha+1,\beta} = A_n^{\alpha,\beta}, \quad nA_n^{\alpha-1,\beta} = \alpha A_{n-1}^{\alpha,\beta} + \beta A_{n-1}^{\alpha,\beta-1}. \tag{1.4}$$

Пусть дан ряд $\sum a_n$ и пусть $S_n = a_0 + a_1 + ... + a_n$ частичные суммы этого ряда. Рассмотрим следующее линейное преобразование частичных сумм

$$t_n^{\alpha,\beta} = \frac{1}{A_n^{\alpha,\beta}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1,\beta} S_k = \frac{1}{A_n^{\alpha,\beta}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha,\beta} a_k. \tag{1.5}$$

Говорят, что последовательность S_n суммируема к числу S обобщенным методом Чезаро или методом (C, α, β), если

$$\lim_{n\to\infty} t_n^{\alpha,\beta} = S.$$

Приведенный метод суммирования ввел в рассмотрение А. Зигмунд в 1924 году [4]. Легко заметить, что при $\beta = 0$ метод суммирования (C, α, β) совпадает с классическим методом суммирования Чезаро или с (C, α) методом. Обобщенные средние Чезаро изучались в ряде работ ([5], [6], [10], [11]). Отметим, что этот метод является регулярным при $\alpha > 0, \beta \in R$, то есть в этом случае из сходимости последовательности S_n к числу S всегда следует сходимость средних $t_n^{\alpha,\beta}$ к тому же числу.

В данной работе изучаются сходимость обобщенных средних частичных сумм рядов Фурье и сопряженных тригонометрических рядов.

Пусть дана $2\pi-$ периодическая, интегрируемая на периоде функция $f(t)$. Обозначим через $\sigma(f)$ ее ряд Фурье

$$\sigma(f) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt. \tag{1.6}$$

Параллельно будем рассматривать сопряженный с ним ряд и функцию $\overline{f}(t)$, сопряженную к $f(t)$

$$\overline{\sigma}(f) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nt - b_n \cos nt$$

$$\overline{f}(t) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \widetilde{f}(x, \varepsilon) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{\tan t/2} dt. \tag{1.7}$$

Введем еще следующие обозначения

$$\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2S, \quad \psi_x(t) = f(x+t) - f(x-t),$$

где S – действительное число.

Обобщенные средние Чезаро частных сумм рядов (1.5) и (1.6) имеют вид

$$t_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{A_n^{\alpha,\beta}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1,\beta} S_k(x, f),$$

$$\widetilde{t}_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{A_n^{\alpha,\beta}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1,\beta} \widetilde{S}_k(x, f).$$

Учитывая, что

$$S_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) D_n(t) dt,$$

$$\widetilde{S}_n(x, f) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \psi_x(t) \widetilde{D}_n(t) dt,$$

где $D_n(t)$ и $\widetilde{D}_n(t)$ – ядро Дирихле и сопряженное с ним ядро

$$D_n(u) = \frac{\sin(n+1/2)\,u}{2\sin u/2} \quad \text{и} \quad \widetilde{D}_n(u) = \frac{\cos u/2 - \cos(n+1/2)\,u}{2\sin u/2},$$

получаем интегральное представление для обобщенных средних Чезаро

$$t_n^{\alpha,\beta}(x,f) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x+t)+f(x-t))K_n^{\alpha,\beta}(t)dt, \tag{1.8}$$

$$\widetilde{t}_n^{\alpha,\beta}(x,f) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \psi_x(t)\widetilde{K}_n^{\alpha,\beta}(t)dt, \tag{1.9}$$

где использованы следующие обозначения:

$$K_n^{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{A_n^{\alpha,\beta}}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1,\beta}D_k(t) = \frac{1}{A_n^{\alpha,\beta}}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1,\beta}\frac{\sin(k+1/2)\,t}{2\sin t/2}, \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{K}_n^{\alpha,\beta}(t) &= \frac{1}{A_n^{\alpha,\beta}}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1,\beta}\widetilde{D}_k(t) = \frac{1}{2}\,ctg\frac{t}{2} - \frac{1}{A_n^{\alpha,\beta}}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1,\beta}\frac{\cos(k+1/2)\,t}{2\sin t/2}\\ &= \frac{1}{2}\,ctg\frac{t}{2} - H_n^{\alpha,\beta}(t).\end{aligned} \tag{1.11}$$

Приведем результаты непосредственно относящиеся к настоящей работе.

Для сходимости в точке ряда Фурье по тригонометрической системе известен следующий результат (см. [1], стр.168).

Теорема (признак Лебега-Гергена). *Пусть 2π-периодическая, интегрируемая функция $f(t)$ удовлетворяет в точке x условиям*

$$\int_0^h \varphi_x(t)dt = o(h) \quad \text{и} \quad \int_h^\pi \frac{|\varphi_x(t+h)-\varphi_x(t)|}{t}dt = o(1) \quad \text{при} \quad h\to+0.$$

Тогда в этой точке частичные суммы ряда (1.6) *сходятся к числу S.*

Далее в работе [7] Жижиашвили, обобщая условия Лебега-Гергена, привел достаточное условие для (C,α) суммируемости рядов Фурье при $\alpha\in(-1,1)$.

Теорема (Л. Жижиашвили). *Пусть 2π-периодическая, интегрируемая функция $f(t)$ удовлетворяет в точке x условиям*

$$\int_0^h \varphi_x(t)dt = o(h) \quad \text{и} \quad \int_h^\pi \frac{|\varphi_x(t+h)-\varphi_x(t)|}{t^{1+\alpha}}dt = o\left(\frac{1}{h^\alpha}\right) \quad \text{при} \quad h\to+0.$$

Тогда в этой точке частичные суммы ряда (1.6) (C,α) *суммируемы к числу S.*
Аналогичную теорему он доказал для сопряженных рядов Фурье.

2. Формулировка основных результатов

В данной работе приводятся достаточные условия для (C,α,β) суммируемости рядов Фурье и сопряженных рядов. Точнее будут доказаны следующие теоремы.

Теорема 2.1. *Если 2π-периодическая, интегрируемая на периоде функция $f(t)$ удовлетворяет в точке x условиям*

(a) $$\int_0^h \varphi_x(t)dt = o(h) \quad \textit{при} \quad h \to +0$$

(b) $$\int_h^\pi |\varphi_x(t+h) - \varphi_x(t)| \frac{\ln^\beta(2\pi/t)}{t^{1+\alpha}} dt = o\left(\frac{\ln^\beta(1/h)}{h^\alpha}\right) \quad \textit{при} \quad h \to +0,$$

где $\alpha \in (-1,0) \cup (0,1)$, $\beta \in R$, или $\alpha = 0$, $\beta \geq 0$, то в этой точке $t_n^{\alpha,\beta}(x,f) \to S$ при $n \to \infty$.

Теорема 2.2. *Если 2π-периодическая, интегрируемая на периоде функция $f(t)$ удовлетворяет в точке x условиям*

(a) $$\int_0^h \varphi_x(t)dt = o\left(\frac{h}{\ln(1/h)}\right) \quad \textit{при} \quad h \to +0,$$

(b) $$\int_h^\pi |\varphi_x(t+h) - \varphi_x(t)| \left(\ln\frac{2\pi}{t}\right)^\beta dt = o\left(h\left(\ln\frac{1}{h}\right)^{\beta-1}\right) \quad \textit{при} \quad h \to +0,$$

то в этой точке $t_n^{-1,\beta}(x,f) \to S$ при $n \to \infty$.

Аналогичные теоремы справедливы и для сопряженных рядов.

Теорема 2.3. *Если 2π-периодическая, интегрируемая на периоде функция $f(t)$ удовлетворяет в точке x условиям*

(a) $$\int_0^h \psi_x(t)dt = o(h) \quad \textit{при} \quad h \to +0$$

(b) $$\int_h^\pi |\psi_x(t+h) - \psi_x(t)| \frac{\ln^\beta(2\pi/t)}{t^{1+\alpha}} dt = o\left(\frac{\ln^\beta(1/h)}{h^\alpha}\right) \quad \textit{при} \quad h \to +0,$$

где $\alpha \in (-1,0) \cup (0,1), \beta \in R$, или $\alpha = 0, \beta \geq 0$, то в этой точке $\widetilde{t}_n^{\alpha,\beta}(x,f) - f(x,\frac{\pi}{n}) \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 2.4. *Если 2π-периодическая , интегрируемая на периоде функция $f(t)$ удовлетворяет в точке x условиям*

(a) $$\int_0^h \psi_x(t)dt = o\left(\frac{h}{\ln 1/h}\right) \quad \textit{при} \quad h \to +0$$

(b) $$\int_h^\pi |\psi_x(t+h)-\psi_x(t)| \ln^\beta \frac{2\pi}{t} dt = o\left(h\left(\ln\frac{1}{h}\right)^{\beta-1}\right) \quad \textit{при} \quad h \to +0,$$

то в этой точке $\widetilde{t}_n^{-1,\beta}(x,f) - f(x,\frac{\pi}{n}) \to 0$ *при* $n\to\infty$.

Замечание 2.1. *Условия теорем 2.2 и 2.4 отличаются от условий теорем 2.1 и 2.3 при формальной постановке в них* $\alpha = -1$. *Для* $(C,-1,\beta)$ *суммируемости приходится налагать на функцию более жесткие требования. В дальнейшем мы увидим, что это обусловлено ухудшением поведения ядер Чезаро при* $\alpha = -1$.

Замечание 2.2. *В дальнейшем через* $C_1, C_2, C_3, ...$ *мы будем обозначать постоянные, не зависящие от* n *и* t.

3. Доказательство основных лемм

Леммы данного параграфа используются в доказательствах теорем 2.1 – 2.4.

Лемма 3.1. *При* $0\le t\le\pi$ *справедливы следующие соотношения*

(a) *для любых* $\alpha\in(-1,1)$ *и* $\beta\in R$

$$K_n^{\alpha,\beta}(t) = O(n) \quad \textit{и} \quad \frac{d}{dt}K_n^{\alpha,\beta}(t) = O(n^2) \quad \textit{при} \quad n\to\infty,$$

(b) *для любого* $\beta>0$

$$K_n^{-1,\beta}(t) = O(n\ln n) \quad \textit{и} \quad \frac{d}{dt}K_n^{-1,\beta}(t) = O(n^2\ln n) \quad \textit{при} \quad n\to\infty.$$

Доказательство. Легко проверить (например с помощью теорем 8.4 – 8.7 в [1], стр. 32), что при $\alpha\in(-1,1)$, $\beta\in R$ справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^n k^\alpha \ln^\beta k = O(n^{\alpha+1}\ln^\beta n) \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Используя эту оценку и свойства (1.2), (1.4) и (1.10) получим

$$|K_n^{\alpha,\beta}(t)| = \left|\frac{1}{A_n^{\alpha,\beta}}\sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1,\beta} D_k(t)\right| = \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{A_n^{\alpha,\beta}}\sum_{k=1}^n A_{n-k}^{\alpha,\beta}\cos kt\right|$$
$$= O\left(\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}\sum_{k=1}^{n-1} k^\alpha \ln^\beta k\right) = O(n),$$
$$\left|\frac{d}{dt}K_n^{\alpha,\beta}(t)\right| = \left|\frac{1}{A_n^{\alpha,\beta}}\sum_{k=1}^n A_{n-k}^{\alpha,\beta} k\sin kt\right| = O\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}\ln^\beta n}\sum_{k=1}^{n-1} k^\alpha \ln^\beta k\right) = O(n^2).$$

При $\alpha = -1,\ \beta > 0$ используя (1.3) и оценку

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln^{\beta-1} k}{k} = O(\ln^{\beta} n) \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

получим

$$|K_n^{-1,\beta}(t)| = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{A_n^{-1,\beta}} \sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{-1,\beta} \cos kt \right| = O\left(\frac{n}{\ln^{\beta-1} n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln^{\beta-1} k}{k} \right) = O(n \ln n),$$

и

$$\left| \frac{d}{dt} K_n^{-1,\beta}(t) \right| = \left| \frac{1}{A_n^{-1,\beta}} \sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{-1,\beta} k \sin kt \right| = O\left(\frac{n^2}{\ln^{\beta-1} n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln^{\beta-1} k}{k} \right) = O(n^2 \ln n).$$

Лемма 3.1 доказана. □

Следующая лемма доказывается аналогичным путем.

Лемма 3.2. *При $0 \le t \le \pi$ справедливы следующие соотношения*

(a) *для любых $\alpha \in (-1,1)$ и $\beta \in R$*

$$\widetilde{K}_n^{\alpha,\beta}(t) = O(n) \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}\widetilde{K}_n^{\alpha,\beta}(t) = O(n^2) \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

(b) *для любого $\beta > 0$*

$$\widetilde{K}_n^{-1,\beta}(t) = O(n \ln n) \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}\widetilde{K}_n^{-1,\beta}(t) = O(n^2 \ln n) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Для приведения следующей леммы, введем функции

$$V_1(t) = \left(\ln^2 \frac{e}{2 \sin t/2} + \frac{(\pi - t)^2}{4} \right)^{\beta/2}, \quad t \in (0, \infty), \tag{3.1}$$

$$V_2(t) = \beta \arctan \frac{\pi - t}{2 \ln \frac{e}{2 \sin t/2}}, \quad t \in (0, \infty). \tag{3.2}$$

Тогда имеет место следующая лемма, впервые доказанная Харди для частного случая $\beta = 0$ (см. [1], стр. 159).

Лемма 3.3. *При $-1 \le \alpha < 1,\ \beta \in R$ и $t \in (0, \pi]$ справедливо представление*

$$K_n^{\alpha,\beta}(t) = \varphi_n^{\alpha,\beta}(t) + R_n^{\alpha,\beta}(t),$$

где

$$\varphi_n^{\alpha,\beta}(t) = \frac{V_1(t)}{A_n^{\alpha,\beta}\,(2 \sin t/2)^{1+\alpha}} \sin \left[\left(n + \frac{1+\alpha}{2} \right) t - \frac{\pi \alpha}{2} - \beta V_2(t) \right] \tag{3.3}$$

и для любого $1/n \le t \le \pi$

$$|R_n^{\alpha,\beta}(t)| = O\left(\frac{1}{nt^2} \right) \quad \text{и} \quad \left| \frac{d}{dt} R_n^{\alpha,\beta}(t) \right| = O\left(\frac{1}{nt^3} \right) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{3.4}$$

Доказательство. Если $\alpha^2+\beta^2\neq 0$, то учитывая (1.4), (1.10) и применяя преобразование Абеля получим

$$\begin{aligned}
K_n^{\alpha,\beta}(t) &= \frac{1}{A_n^{\alpha,\beta}}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1,\beta}\frac{\sin(k+1/2)\,t}{2\sin t/2}\\
&= \frac{1}{2A_n^{\alpha,\beta}\sin t/2}\mathrm{Im}\left[e^{i(n+1/2)t}\sum_{k=0}^{n} A_k^{\alpha-1,\beta}e^{-ikt}\right]\\
&= \frac{1}{2A_n^{\alpha,\beta}\sin t/2}\mathrm{Im}\left[e^{i(n+1/2)t}(1-e^{-it})^{-1}\sum_{k=0}^{n} A_k^{\alpha-2,\beta}e^{-ikt}\right]+\frac{A_n^{\alpha-1,\beta}}{4A_n^{\alpha,\beta}\sin^2 t/2}.
\end{aligned}$$

Из свойств (1.3) и (1.2) следует, что при $-1\leq\alpha<1$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k^{\alpha-2,\beta}e^{-ikt}$ при $t\in[0,\pi]$ сходится равномерно, поэтому имеем

$$K_n^{\alpha,\beta}(t)=\varphi_n^{\alpha,\beta}(t)+R_n^{\alpha,\beta}(t),$$

где

$$\varphi_n^{\alpha,\beta}(t)=Im\left[\frac{e^{i(n+1/2)t}(1-e^{-it})^{-1}}{2A_n^{\alpha,\beta}\sin\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}A_k^{\alpha-2,\beta}e^{-ikt}\right]$$

и

$$R_n^{\alpha,\beta}(t)=-Im\left[\frac{e^{i(n+1/2)t}(1-e^{-it})^{-1}}{2A_n^{\alpha,\beta}\sin\frac{t}{2}}\sum_{k=n+1}^{\infty}A_k^{\alpha-2,\beta}e^{-ikt}\right]+\frac{A_n^{\alpha-1,\beta}}{4A_n^{\alpha,\beta}\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Поскольку $kA_k^{\alpha-2,\beta}\to 0$ при $k\to\infty$, то согласно теореме Таубера (см. напр. [12], стр. 355) при $t\neq 0$ имеем (см (1.1))

$$\sum_{k=0}^{\infty}A_k^{\alpha-2,\beta}e^{-ikt}=\frac{1}{(1-e^{-it})^{\alpha-1}}\left(\ln\frac{e}{1-e^{-it}}\right)^{\beta}.$$

Следовательно

$$\varphi_n^{\alpha,\beta}(t)=\frac{1}{2A_n^{\alpha,\beta}\sin\frac{t}{2}}Im\left[\frac{e^{i(n+1/2)t}}{(1-e^{-it})^{\alpha}}\left(\ln\frac{e}{1-e^{-it}}\right)^{\beta}\right].$$

Отделяя мнимую часть получим (3.3). Заметим, что из (1.2) и (1.3) следует, что при $\alpha<1$ и при достаточно больших k последовательность $A_k^{\alpha-2,\beta}$ стремится к нулю монотонно. Учитывая это и воспользовавшись леммой Абеля и неравенством $|Imz| \le |z|$, получим

$$\begin{aligned} |R_n^{\alpha,\beta}(t)| &< \frac{1}{4A_n^{\alpha,\beta}\sin^2 t/2}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k^{\alpha-2,\beta}e^{-ikt}\right| + \left|\frac{A_n^{\alpha-1,\beta}}{4A_n^{\alpha,\beta}\sin^2\frac{t}{2}}\right| \\ &= O\left(\left|\frac{A_n^{\alpha-2,\beta}}{A_n^{\alpha,\beta}t^3}\right|\right) + O\left(\left|\frac{A_n^{\alpha-1,\beta}}{A_n^{\alpha,\beta}t^2}\right|\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^2t^3}\right) + O\left(\frac{1}{nt^2}\right) = O\left(\frac{1}{nt^2}\right). \end{aligned}$$

Последняя оценка справедлива, поскольку $n^2t^3 = (nt)\cdot nt^2 \ge nt^2$ при $t \ge \frac{1}{n}$.

Оценим теперь производную от $R_n^{\alpha,\beta}(t)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}R_n^{\alpha,\beta}(t) = &\operatorname{Im}\left[\left(\frac{e^{i(n+1/2)}(1-e^{-it})^{-1}}{2A_n^{\alpha,\beta}\sin 1/2}\right)'\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k^{\alpha-2,\beta}e^{-ikt}\right] \\ &- \operatorname{Im}\left[\frac{ie^{i(n+1/2)}(1-e^{-it})^{-1}}{2A_n^{\alpha,\beta}\sin t/2}\sum_{k=n+1}^{\infty} kA_k^{\alpha-2,\beta}e^{-ikt}\right] \\ &+ \left(\frac{A_n^{\alpha-1,\beta}}{4A_n^{\alpha,\beta}\sin^2\frac{t}{2}}\right)'. \end{aligned}$$

Законность почленного дифференцирования оправдывается тем, что при каждом фиксированном n почленно дифференцированный ряд сходится равномерно при $t \ge \frac{1}{n}$. Это следует из теоремы 2.4 (см. [1], стр. 16) и из монотонного стремления к нулю последовательности $kA_k^{\alpha-2,\beta}$. Действительно, используя (1.4) имеем

$$(k+1)A_{k+1}^{\alpha-2,\beta} - kA_k^{\alpha-2,\beta} = (\alpha-1)A_k^{\alpha-2,\beta} + \beta A_k^{\alpha-2,\beta-1},$$

где второе слагаемое в правой части является бесконечно малой более высокого порядка чем первое, и поэтому при больших k эта разность имеет тот же знак, что и $(\alpha-1)A_k^{\alpha-2,\beta}$, следовательно согласно (1.2) сохраняет знак для достаточно больших k, с другой стороны в силу (1.2) $kA_k^{\alpha-2,\beta} \to 0$ при $k \to \infty$. После несложных вычислений и вновь воспользовавшись леммой Абеля, получаем

$$\left|\frac{d}{dt}R_n^{\alpha,\beta}(t)\right| = O\left(\left|\frac{A_n^{\alpha-2,\beta}}{A_n^{\alpha,\beta}t^4}\right|\right) + O\left(\left|\frac{nA_n^{\alpha-2,\beta}}{A_n^{\alpha,\beta}t^3}\right|\right) = O\left(\frac{1}{nt^3}\right).$$

В случае $\alpha^2+\beta^2 = 0$ легко заметить (см. (1.10)), что $K_n^{0,0}(t) = D_n(t)$ и поэтому представление (3.3) остается справедливым, поскольку $\varphi_n^{0,0}(t) = D_n(t)$, $R_n^{0,0}(t) = 0$. Лемма 3.3 доказана. □

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 3.3.

Лемма 3.4. *При* $-1 \le \alpha < 1$, $\beta \in R$ *и* $t \in (0,\pi]$ *справедливо представление*

$$H_n^{\alpha,\beta}(t) = \widetilde{\varphi}_n^{\alpha,\beta}(t) + \widetilde{R}_n^{\alpha,\beta}(t), \tag{3.5}$$

где

$$\widetilde{\varphi}_n^{\alpha,\beta}(t) = \frac{V_1(t)}{A_n^{\alpha,\beta}\,(2\sin t/2)^{1+\alpha}}\cos\left[\left(n+\frac{1+\alpha}{2}\right)t - \frac{\pi\alpha}{2} - \beta V_2(t)\right],$$

а при $1/n \le t \le \pi$

$$|\widetilde{R}_n^{\alpha,\beta}(t)| = O\left(\frac{1}{nt^2}\right), \quad \left|\frac{d}{dt}\widetilde{R}_n^{\alpha,\beta}(t)\right| = O\left(\frac{1}{nt^3}\right) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{3.6}$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие две элементарные леммы, которые легко вытекают из теоремы Лагранжа о конечных приращениях (см. [2], стр. 226).

Лемма 3.5. *Пусть для* $\alpha > -1$ *и* $\beta \in R$ *функция* $\omega_{\alpha,\beta}(t) : t \in (0,2\pi]$ *имеет на* $(0,2\pi)$ *непрерывные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет условиям*

$$\omega_{\alpha,\beta}(t) \simeq \frac{\ln^\beta 2\pi/t}{t^{1+\alpha}}, \quad \omega'_{\alpha,\beta}(t) = O\left(\frac{\ln^\beta 2\pi/t}{t^{2+\alpha}}\right), \quad \omega''_{\alpha,\beta}(t) = O\left(\frac{\ln^\beta 2\pi/t}{t^{3+\alpha}}\right)$$

при $t \to +0$. *Тогда при* $t > h$ *справедливы утверждения*

(a) $|\omega_{\alpha,\beta}(t+h) - \omega_{\alpha,\beta}(t)| < C_1\dfrac{\ln^\beta 2\pi/t}{t^{2+\alpha}}h,$

(b) $\left|\dfrac{d}{dt}(\omega_{\alpha,\beta}(t+h) - \omega_{\alpha,\beta}(t))\right| < C_2\dfrac{\ln^\beta 2\pi/t}{t^{3+\alpha}}h,$

(c) $|\Delta^2\omega_{\alpha,\beta}(t)| := |\omega_{\alpha,\beta}(t) - 2\omega_{\alpha,\beta}(t+h) + \omega_{\alpha,\beta}(t)(t+2h)| < C_3\dfrac{\ln^\beta 2\pi/t}{t^{3+\alpha}}h^2.$

Лемма 3.6. *Пусть функция* $\omega_{-1,\beta}(t) : t \in (0,2\pi]$ *имеет на* $(0,2\pi)$ *непрерывные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет условиям*

$$\omega_{-1,\beta}(t) \simeq \ln^\beta \frac{2\pi}{t}, \quad \omega'_{-1,\beta}(t) = O\left(\frac{\ln^{\beta-1} 2\pi/t}{t}\right), \quad \omega''_{-1,\beta}(t) = O\left(\frac{\ln^{\beta-1} 2\pi/t}{t^2}\right)$$

при $t \to +0$. *Тогда при* $t > h$ *справедливы утверждения*

(a) $|\omega_{-1,\beta}(t+h) - \omega_{-1,\beta}(t)| < C_4\dfrac{\ln^{\beta-1} 2\pi/t}{t}h,$

(b) $\left|\dfrac{d}{dt}(\omega_{-1,\beta}(t+h) - \omega_{-1,\beta}(t))\right| < C_5\dfrac{\ln^{\beta-1} 2\pi/t}{t^2}h,$

(c) $|\Delta^2\omega_{-1,\beta}(t)| := |\omega_{-1,\beta}(t) - 2\omega_{-1,\beta}(t+h) + \omega_{-1,\beta}(t)(t+2h)| < C_6\dfrac{\ln^\beta 2\pi/t}{t^2}h^2.$

Если функция $\omega_{\alpha,\beta_1}(t)$ удовлетворяет условиям леммы 3.5 при $\alpha > -1$ и $\beta_1 \in R$, то справедлива следующая лемма.

Лемма 3.7. *Пусть дана* 2π*-периодическая функция* $g(t)$*, удовлетворяющая при* $h \to +0$ *следующим условиям*

$$(a) \qquad G(h) = \int_0^h g(t)dt = o(h),$$

$$(a) \qquad \int_h^\pi |g(t+h) - g(t)| \frac{\ln^{\beta_1} 2\pi/t}{t^{1+\alpha}} dt = o\left(\frac{\ln^{\beta_2} 1/h}{h^\alpha}\right),$$

где $\alpha \in (-1,0) \cup (0,1), \beta_2 \geq \beta_1$ *или* $\alpha = 0, \beta_2 \geq \max\{\beta_1, 0\}$*. Тогда при* $n \to \infty$ *справедливы следующие соотношения:*

$$T_n^\alpha = \int_{\pi/n}^\pi g(t)\omega_{\alpha,\beta_1}(t) \cos nt dt = o\left(n^\alpha \ln^{\beta_2} n\right),$$

$$Q_n^\alpha = \int_{\pi/n}^\pi g(t)\omega_{\alpha,\beta_1}(t) \sin nt dt = o\left(n^\alpha \ln^{\beta_2} n\right).$$

Доказательство. В выражении T_n^α сделаем замену переменной t на $t + \frac{\pi}{n}$:

$$T_n^\alpha = -\int_0^{\pi - \frac{\pi}{n}} g\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \omega_{\alpha,\beta_1}\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \cos nt dt.$$

Складывая два разных выражения для T_n^α и совершая простые преобразования, получим

$$\begin{aligned}
2T_n^\alpha = & \int_{\pi/n}^\pi \left[g(t) - g\left(t + \frac{\pi}{n}\right)\right] \omega_{\alpha,\beta_1}(t) \cos nt dt \\
& + \int_{\pi/n}^\pi g(t) \left[\omega_{\alpha,\beta_1}(t) - \omega_{\alpha,\beta_1}\left(t + \frac{\pi}{n}\right)\right] \cos nt\, dt \\
& + \int_{\pi/n}^\pi \left[g\left(t + \frac{\pi}{n}\right) - g(t)\right] \left[\omega_{\alpha,\beta_1}(t) - \omega_{\alpha,\beta_1}\left(t + \frac{\pi}{n}\right)\right] \cos nt\, dt \\
& + \int_{\pi - \pi/n}^\pi g\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \omega_{\alpha,\beta_1}\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \cos nt\, dt \\
& + \int_0^{\pi/n} g\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \omega_{\alpha,\beta_1}\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \cos nt\, dt \equiv \sum_{k=1}^5 T_{n,k}^\alpha.
\end{aligned}$$

Оценим каждый из слагаемых по отдельности. Учитывая условие (b) настоящей леммы и условия леммы 3.5, получаем

$$|T_{n,1}^\alpha| < C_7 \cdot \int_{\frac{\pi}{n}}^\pi \left|g(t) - g\left(t + \frac{\pi}{n}\right)\right| \cdot \frac{\ln^{\beta_1} \frac{2\pi}{t}}{t^{1+\alpha}} dt = o\left(n^\alpha \ln^{\beta_2} n\right).$$

Снова используя условие (b) и утверждение (a) леммы 3.5 будем иметь

$$
\begin{aligned}
|T_{n,3}^{\alpha}| &\le \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \left|g\left(t+\frac{\pi}{n}\right)-g(t)\right| \left|\omega_{\alpha,\beta_1}(t)-\omega_{\alpha,\beta_1}\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right| dt \\
&\le \frac{C_8}{n}\int_{\pi/n}^{\pi} \left|g\left(t+\frac{\pi}{n}\right)-g(t)\right| \frac{\ln^{\beta_1} 2\pi/t}{t^{2+\alpha}} dt = o\left(n^{\alpha}\ln^{\beta_2} n\right).
\end{aligned}
$$

Учитывая утверждения (a) и (b) леммы 3.5, для $T_n^{(5)}$ получим

$$
\begin{aligned}
|T_{n,5}^{\alpha}| &= \left|\int_{\pi/n}^{2\pi/n} g(t)\omega_{\alpha,\beta_1}(t)\cos nt\, dt\right| \le \left|G(t)\omega_{\alpha,\beta_1}(t)\cos nt\Big|_{\pi/n}^{2\pi/n}\right| \\
&+ \left|\int_{\pi/n}^{2\pi/n} G(t)\omega'_{\alpha,\beta_1}(t)\cos nt\, dt\right| + n\left|\int_{\pi/n}^{2\pi/n} G(t)\omega_{\alpha,\beta_1}(t)\sin nt\, dt\right| \\
&\le o\left(n^{\alpha}\ln^{\beta_1} n\right) + C_9\left|\int_{\pi/n}^{2\pi/n} |G(t)|\frac{\ln^{\beta_1} 2\pi/t}{t^{2+\alpha}}\, dt\right| \\
&+ C_9 n\left|\int_{\pi/n}^{2\pi/n} |G(t)|\frac{\ln^{\beta_1} 2\pi/t}{t^{1+\alpha}}\, dt\right| = o\left(n^{\alpha}\ln^{\beta_2} n\right).
\end{aligned}
$$

В выражении $T_{n,2}^{\alpha}$ снова делаем замену переменной и прибавляем к друг другу получившиеся два разных выражения. После несложных преобразований получим

$$
\begin{aligned}
2T_{n,2}^{\alpha} &= \int_{\pi/n}^{2\pi/n} g(t)\left[\omega_{\alpha,\beta_1}(t)-\omega_{\alpha,\beta_1}\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right]\cos nt\, dt \\
&+ \int_{\pi-\pi/n}^{\pi} g\left(t\right)\left[\omega_{\alpha,\beta_1}(t)-\omega_{\alpha,\beta_1}\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right]\cos nt\, dt \\
&+ \int_{\pi/n}^{\pi-\pi/n} g(t)\left[\omega_{\alpha,\beta_1}(t)-2\omega_{\alpha,\beta_1}\left(t+\frac{\pi}{n}\right)+\omega_{\alpha,\beta_1}\left(t+\frac{2\pi}{n}\right)\right]\cos nt\, dt \\
&+ \int_{\pi/n}^{\pi-\pi/n} \left[g(t)-g\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right]\left[\omega_{\alpha,\beta_1}\left(t+\frac{\pi}{n}\right)-\omega_{\alpha,\beta_1}\left(t+\frac{2\pi}{n}\right)\right]\cos nt\, dt \\
&\equiv \sum_{k=1}^{4} t_{n,k}^{\alpha}.
\end{aligned}
$$

Слагаемые $t^\alpha_{n,1}$ и $t^\alpha_{n,4}$ оцениваются также как и $T^\alpha_{n,5}$ и $T^\alpha_{n,3}$. Для оценки $t^\alpha_{n,3}$ воспользуемся утверждениями (a) и (b) леммы 3.5

$$\begin{aligned}|t^\alpha_{n,3}| &= \left|\int_{\pi/n}^{\pi-\pi/n} g(t)\,\Delta^2\omega_{\alpha,\beta_1}(t)\cos nt\,dt\right| \le \left|G(t)\,\Delta^2\omega_{\alpha,\beta_1}(t)\cos nt\Big|_{\pi/n}^{\pi-\pi/n}\right| \\ &+ \left|\int_{\pi/n}^{\pi-\pi/n} G(t)\,\frac{d}{dt}\left[\Delta^2\omega_{\alpha,\beta_1}(t)\right]\cos nt\,dt\right| \\ &+ \left|n\int_{\pi/n}^{\pi-\pi/n} G(t)\,\Delta^2\omega_{\alpha,\beta_1}(t)\sin nt\,dt\right| \\ &\le o\left(n^\alpha \ln^{\beta_1} n\right) + \frac{C_{10}}{n}\,o\left(\int_{\pi/n}^{\pi-\pi/n}\frac{\ln^\beta 2\pi/t}{t^{2+\alpha}}\,dt\right) = o\left(n^\alpha \ln^{\beta_2} n\right).\end{aligned}$$

Аналогично получается оценка для $t^\alpha_{n,2}$. Таким образом, получаем $T^\alpha_{n,2} = o\left(n^\alpha \ln^{\beta_2} n\right)$.
Приступим к оценке $T^\alpha_{n,4}$. Достаточно оценить следующее выражение

$$\overline{T}^\alpha_{n,4} = \int_{\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi} g(t)\omega_{\alpha,\beta_1}(t)\cos ntdt,$$

поскольку ясно, что $|T^\alpha_{n,4} - \overline{T}^\alpha_{n,4}| = o\left(n^\alpha \ln^{\beta_2} n\right)$. При $\alpha > 0$ или $\alpha = 0, \beta_2 \ge 0$ оценка $\overline{T}^\alpha_{n,4} = o\left(n^\alpha \ln^{\beta_2} n\right)$ очевидна. Пусть $\alpha \in (-1, 0)$.
Сначала покажем, что

$$\int_{\pi-h}^{\pi} g(t)dt = o\left(\frac{\ln^{\beta_2}\frac{1}{h}}{h^\alpha}\right) \quad \text{при} \quad h \to +0.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\pi-h}^{\pi} g(t)dt\right| &= \left|\int_h^{\pi-h}[g(t+h)-g(t)]dt + \int_h^{2h} g(t)dt\right| \\ &\le C_{11}\int_h^{\pi-h}|g(t+h)-g(t)|\frac{\ln^{\beta_1} 2\pi/t}{t^{1+\alpha}}dt + \left|\int_h^{2h} g(t)dt\right| = o\left(\frac{\ln^{\beta_2} 1/h}{h^\alpha}\right).\end{aligned}$$

Учитывая, что функции $\omega_n(t) = \omega_{\alpha,\beta_1}(t)\cos nt$, $n = 2, 3, ...$ непрерывны на $[\pi - \pi/n, \pi]$ и имеют на этом отрезке равномерно ограниченные вариации, получаем

$$\begin{aligned}\left|\overline{T}^\alpha_{n,4}\right| &= \left|\int_{\pi-\pi/n}^{\pi} g(t)\omega_{\alpha,\beta_1}(t)\cos nt\,dt\right| = \left|\int_{\pi-\pi/n}^{\pi}\omega_n(t)d\left(\int_t^\pi g(u)du\right)\right| \\ &\le \left|\omega_n(\pi-\pi/n)\int_{\pi-\pi/n}^{\pi} g(u)du\right| + \left|\int_{\pi-\pi/n}^{\pi}\int_t^\pi g(u)dud\omega_n(t)\right| \\ &\le C_{12}\max_{0\le h\le\pi/n}\left|\int_{\pi-h}^{\pi} g(t)dt\right| = o\left(n^\alpha \ln^{\beta_2} n\right).\end{aligned}$$

Таким образом утверждение леммы 7 для T_n^α доказано. Q_n^α оценивается аналогично. Лемма 3.7 доказана. $\square$

Пусть $\omega_{-1,\beta}(t)$, где $\beta \in R$ – функция, удовлетворяющая условиям леммы 3.6. Следующая лемма доказывается аналогично лемме 3.7, с единственным различием, что вместо леммы 3.5 используется лемма 3.6.

Лемма 3.8. *Пусть дана 2π-периодическая, интегрируемая на периоде функция $g(t)$, удовлетворяющая следующим двум условиям*

$$(a) \qquad G(h) = \int_0^h g(t)dt = o\left(\frac{h}{\ln 1/h}\right) \quad \text{при} \quad h \to +0,$$

$$(b) \qquad \int_h^\pi |g(t+h) - g(t)| \ln^\beta \frac{2\pi}{t} dt = o\left(h \ln^{\beta_1} \frac{1}{h}\right) \quad \text{при} \quad h \to +0,$$

где $\beta \le \beta_1 + 1$. Тогда при $n \to \infty$:

$$T_n^{-1} = \int_{\pi/n}^\pi g(t)\omega_{-1,\beta}(t)\cos nt\, dt = o\left(\frac{\ln^{\beta_1} n}{n}\right),$$

$$Q_n^{-1} = \int_{\pi/n}^\pi g(t)\omega_{-1,\beta}(t)\sin nt\, dt = o\left(\frac{\ln^{\beta_1} n}{n}\right).$$

4. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 2.1. Достаточно оценить разность

$$t_n^{\alpha,\beta}(x,f) - S = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi_x(t)\cdot K_n^{\alpha,\beta}(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{n}} + \int_{\frac{\pi}{n}}^\pi = I_{1n}(x) + I_{2n}(x).$$

$I_{1n}(x)$ оценивается при помощи условий теоремы 2.1 и утверждения a) леммы 3.1.

$$\begin{aligned} I_{1n}(x) &= \int_0^{\pi/n} \varphi_x(t)\cdot K_n^{\alpha,\beta}(t)dt \\ &= K_n^{\alpha,\beta}(t)\int_0^t \varphi_x(u)du\Big|_0^{\pi/n} - \int_0^{\pi/n} \frac{d}{dt}K_n^{\alpha,\beta}(t)dt\int_0^t \varphi_x(u)du = o(1). \end{aligned}$$

Теперь оценим $I_{2n}(x)$. Согласно лемме 3.3 имеем:

$$\begin{aligned} I_{2n}(x) &= \int_{\pi/n}^\pi \varphi_x(t)K_n^{\alpha,\beta}(t)dt \\ &= \int_{\pi/n}^\pi \varphi_x(t)\varphi_n^{\alpha,\beta}(t)dt + \int_{\pi/n}^\pi \varphi_x(t)R_n^{\alpha,\beta}(t)dt = R_{1n}(x) + R_{2n}(x). \end{aligned}$$

Воспользовавшись интегрированием по частям и применив лемму 3.3, получаем

$$
\begin{aligned}
R_{2n}(x) &= \int_{\pi/n}^{\pi} \varphi_x(t) R_n^{\alpha,\beta}(t)dt \\
&= \int_0^t \varphi_x(u) du R_n^{\alpha,\beta}(t)\Big|_{\pi/n}^{\pi} - \int_{\pi/n}^{\pi} \frac{d}{dt} R_n^{\alpha,\beta}(t)dt \int_0^t \varphi_x(u)du = o(1).
\end{aligned}
$$

Для завершения доказательства остается оценить $R_{1n}(x)$. Учитывая (3.3), получим

$$
\begin{aligned}
R_{1n}(x) &= \frac{1}{A_n^{\alpha,\beta}} \int_{\pi/n}^{\pi} \varphi_x(t) \frac{V_1(t)}{(2\sin t/2)^{1+\alpha}} \sin\left[\left(n + \frac{1+\alpha}{2}\right)t - \frac{\pi\alpha}{2} + \beta V_2(t)\right] dt \\
&= \frac{1}{A_n^{\alpha,\beta}} \int_{\pi/n}^{\pi} \varphi_x(t)\Omega_1(t,\alpha,\beta)\cos nt\, dt + \frac{1}{A_n^{\alpha,\beta}} \int_{\pi/n}^{\pi} \varphi_x(t)\Omega_2(t,\alpha,\beta)\sin nt\, dt,
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\Omega_1(t,\alpha,\beta) &= \frac{V_1(t)}{(2\sin\frac{t}{2})^{1+\alpha}} \sin\left[\frac{1+\alpha}{2}t - \frac{\pi\alpha}{2} + \beta \cdot V_2(t)\right], \\
\Omega_2(t,\alpha,\beta) &= \frac{V_1(t)}{(2\sin\frac{t}{2})^{1+\alpha}} \cos\left[\frac{1+\alpha}{2}t - \frac{\pi\alpha}{2} + \beta \cdot V_2(t)\right].
\end{aligned}
$$

Легко проверить, что функции $\Omega_1(t,\alpha,\beta)$ и $\Omega_2(t,\alpha,\beta)$ удовлетворяют условиям леммы 3.5 и

$$
\Omega_1(t,\alpha,\beta) \sim \frac{\left(\ln\frac{2\pi}{t}\right)^\beta}{t^{1+\alpha}} \sin\frac{\pi\alpha}{2}, \quad \Omega_2(t,\alpha,\beta) \sim \frac{\left(\ln\frac{2\pi}{t}\right)^\beta}{t^{1+\alpha}} \cos\frac{\pi\alpha}{2}
$$

при $t \to 0$.

Пусть сначала $\alpha \neq 0$. Взяв в лемме 3.7 $g(t) = \varphi_x(t)$, $\beta_2 = \beta_1 = \beta$, $\omega_{\alpha,\beta}(t) = \Omega_i(t,\alpha,\beta)$, $i = 1, 2$ (условия леммы 3.7 очевидно выполняются), получим

$$
\begin{aligned}
\int_{\pi/n}^{\pi} \varphi_x(t)\Omega_1(t,\alpha,\beta)\cos nt\, dt &= o\left(n^\alpha \ln^\beta n\right), \\
\int_{\pi/n}^{\pi} \varphi_x(t)\Omega_2(t,\alpha,\beta)\sin nt dt &= o\left(n^\alpha \ln^\beta n\right).
\end{aligned}
$$

Отсюда $R_{1n}(x) = o(1)$.

При $\alpha = 0$ имеем

$$
\begin{aligned}
\Omega_1(t,0,\beta) &= \frac{V_1(t)}{(2\sin t/2)} \sin\left[\frac{t}{2} + \beta V_2(t)\right], \\
\Omega_2(t,0,\beta) &= \frac{V_1(t)}{(2\cos t/2)} \cos\left[\frac{t}{2} + \beta V_2(t)\right].
\end{aligned}
$$

Легко заметить

$$
\Omega_1(t) \sim \frac{(\ln 2\pi/t)^{\beta-1}}{t} \quad \text{и} \quad \Omega_2(t) \sim \frac{(\ln 2\pi/t)^{\beta}}{t} \quad \text{при} \quad t \to 0.
$$

Взяв сначала в лемме 3.7 $g(t) = \varphi_x(t)$, $\beta_2 = \beta_1 = \beta \geq 0$, $\omega_{0,\beta}(t) = \Omega_2(t, 0, \beta)$, получим

$$\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \varphi_x(t) \cdot \Omega_2(t, 0, \beta) \sin ntdt = o\left(\ln^\beta n\right).$$

Далее взяв в ней $g(t) = \varphi_x(t)$, $\beta_2 = \beta \geq 0$, $\beta_1 = \beta - 1$, $\omega_{0,\beta-1}(t) = \Omega_1(t, 0, \beta)$, получим

$$\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \varphi_x(t) \cdot \Omega_1(t, 0, \beta) \cos ntdt = o\left(\ln^\beta n\right),$$

то есть снова $R_{1n}(x) = o(1)$. Теорема 2.1 доказана. □

Доказательство теоремы 2.3. Согласно (1.7) и (1.9) имеем

$$\widetilde{t}_n^{\alpha,\beta}(x) - \widetilde{f}(x, \frac{\pi}{n}) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n}} \psi_x(t)\widetilde{K}_n^{\alpha,\beta}(t)dt + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \psi_x(t)H_n^{\alpha,\beta}(t)dt.$$

Далее поступим так же, как и в доказательстве теоремы 2.1. Первое слагаемое оценивается с помощу первого утверждения леммы 3.2, второе оценивается применением лемм 3.3 и 3.4, с единственной разницей – вместо $g(t)$ в лемме 3.7 берем на этот раз $\psi_x(t)$. Теорема 2.3 доказана. □

Доказательство теорем 2.2 и 2.4. Доказываются таким же образом, что и теоремы 2.1 и 2.3, с той разницей, что мы будем пользоваться вторыми свойствами лемм 3.1, 3.2, леммой 3.3 и леммой 3.8. В остальном все доказательство проводится тем же путем. □

Автор выражает глубокую благодарность М. Г. Григоряну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Abstract. The paper gives sufficient conditions for (C, α, β)-summability of Fourier trigonometric series and conjugate series.

Список литературы

[1] А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, том 1 (1959).
[2] Г. М. Фихтенгольц, Курс Дифференциального и Интегрального Исчисления, Москва (1996).
[3] И. П. Натансон, Теория Функций Вещественной Переменной, Наука (1974).
[4] A. Zygmund, "Sur une generalization de la methode de Cesaro", Comptes Renders, Paris, **197**, 870 – 872 (1924).
[5] G. Das and K. C. Panda, "On a generalized abcolute harmonic summability of Fourier series", Indian J. pure appl. Math., **18** (8), 705 – 722 (1987).
[6] S. C. Jena, M. A. Abid, "Behaviour of an associated conjugate series of a Fourier series", Proc. Indian. Acad. Sci.(Math.Sci.), **103**, no. 3, 295 – 301 (1993).
[7] Л. Жижиашвили, "О некоторых свойствах (C, α) средних рядов Фурье и сопряженных тригонометрических рядов", Мат. сборник, **63** (105), но. 4, 489 – 504 (1964).

[8] G. H. Hardy and Littlwood, "A convergence criterion for Fourier series", Math. Sbornik, **28**, 612 – 634 (1928).
[9] G. Das and P. C. Mohapatra, "On a generalized harmonic-Cesaro method of summability", Indian J. Math., **22**, 33 – 47 (1980).
[10] H. Hiorkawa, "A note on generalized harmonic-Cesaro summability", Internat. J. Math. and Math. Sci., **7**, no. 2, 413 – 414 (1983).
[11] Г. Харди, Расходящиеся Ряды, (1949).
[12] А. И. Маркушевич, Теория Аналитических Функций, **1**, Москва (1950).

Поступила 27 сентября 2010