Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 5, 2011, стр. 15-24.

О CEP-ПОДГРУППАХ n-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

В. С. АТАБЕКЯН

Ереванский Государственный Университет
E-mail: *avarujan@ysu.am*

Аннотация. Хорошо известно, что произвольная группа G_1 является CEP-подгруппой как прямого произведения $G_1 \times G_2$, так и свободного произведения группы G_1 с любой группой G_2. В работе получено необходимое и достаточное условие, при выполнении которого множитель G_i n-периодического произведения $\prod\limits_{i\in I}{}^n G_i$ произвольного семейства групп $\{G_i\}_{i\in I}$, является CEP-подгруппой. В частности, согласно полученному критерию, любая группа G_1 нечетного периода $n \geq 665$ является CEP-подгруппой n-периодического произведения $G_1 \overset{n}{*} G_2$ для произвольной группы G_2.

MSC2010 number: 20F05, 20F50, 20E06.

Ключевые слова: n-периодическое произведение; CEP-подгруппа; некоммутативный аналог группы рациональных чисел.

1. Введение

В работе [1] С. И. Адяном для каждого нечетного $n \geq 665$ была построена новая операция умножения групп, названная *периодическим произведением данного периода n* или *n-периодическим произведением* (см. также [2]). Эти операции умножения обладают многими свойствами классических операций свободного и прямого произведений групп, в том числе и свойством наследственности по подгруппам. Последнее свойство означает, что для любых подгрупп H_i сомножителей G_i n-периодического произведения $\prod\limits_{i\in I}{}^n G_i$ семейства групп $\{G_i\}_{i\in I}$ тождественные вложения $H_i \to G_i$ продолжаются до вложения n-периодического произведения $\prod\limits_{i\in I}{}^n H_i$ семейства подгрупп $\{H_i\}_{i\in I}$ в n-периодическое произведение $\prod\limits_{i\in I}{}^n G_i$, т.е. подгруппы сомножителей порождают в $\prod\limits_{i\in I}{}^n G_i$ свое n-периодическое произведение.

Построенные операции периодического произведения групп решают проблему А. И. Мальцева о существовании ассоциативной, точной и наследственной по подгруппам операции (см. также [3], [4]). Доказано также (см. [5]), что периодическое произведение нечетного периода $n \geq 665$ данного семейства групп является простой группой в том и только том случае, когда каждый множитель этого произведения становится единичной группой при добавлении тождества $x^n = 1$. Этот замечательный критерий простоты позволяет строить новые серии конечно порожденных бесконечных простых групп в многообразиях периодических групп нечетного составного периода nk, где $k > 1$ и $n \geq 665$ и, тем самым, получить положительный ответ на вопрос: может ли многообразие, отличное от многообразия всех групп, содержать бесконечное количество неизоморфных неабелевых простых групп? (см. проблему 23 монографии [6]).

Работой [1] открылись новые возможности в теории периодических групп. В ней показано, что теория Новикова-Адяна (см. [7], [8]) может быть распространена на изучение факторизаций свободных произведений по специально выбранным соотношениям вида $X^n = 1$. Именно, построение теории на базе свободных произведений позволяет ввести понятие n-периодических произведений групп (подробный обзор см. в [9]).

В настоящей работе мы исследуем свойства n-периодических произведений групп, связанные с так называемыми CEP-подгруппами (Congruence Extension Property). Речь идет о вполне естественном свойстве подгруппы: любую конгруэнцию на данной подгруппе H можно расширить до некоторой конгруэнции на всей группе G (следовательно, любая факторгруппа подгруппы H группы G естесвенным образом вкладывается в некоторую факторгруппу всей группы G).

В литературе для CEP-подгруппы помимо E-подгруппы используется также название *Q-подгруппа* (см. [13], [14]). Понятие CEP-подгруппы было введено Б. Нейманом в работе [10], где указанные подгруппы названы *E-подгруппами.*

Определение 1.1. *Подгруппа H группы G называется CEP-подгруппой, если для любой нормальной подгруппы N_H группы H существует нормальная подгруппа N_G группы G такая, что $H \cap N_G = N_H$.*

В частности, в работе [11] (см. также [12]) доказано, что в абсолютно свободной группе F_2 ранга 2 с порождающими a, b подгруппа порожденная элементами $[a,\, b^{2i-1}ab^{-(2i-1)}]$, $(i = 1, 2, ...)$ является CEP-подгруппой, изоморфной свободной группе F_∞ бесконечного ранга. Соотношения

$$H_1 = H/N_H = H/H \cap N_G \simeq HN_G/N_G < G/N_G = G_1$$

показывают, что справедлива

Лемма 1.1. *Подгруппа H группы G является CEP-подгруппой тогда и только тогда, когда любой эпиморфизм $H \to H_1$ на произвольную группу H_1 можно продолжить до эпиморфизма $G \to G_1$ на некоторую группу G_1, содержащую H_1 в качестве подгруппы.*

Лемма 1.2. *Если подгруппа H группы G является CEP-подгруппой, то любая сопряженная с H подгруппа группы G также является CEP-подгруппой.*

Легко понять, что центр любой группы является CEP-подгруппой и что любая простая подгруппа данной группы – CEP-подгруппа. Из леммы 1.1 очевидно следует, что любой ретракт H данной группы G тоже является CEP-подгруппой (подгруппа H группы G называется ретрактом, если тождественное отображение $1_H : H \to H$ продолжается до некоторого гомоморфизма $\alpha : G \to H$).

Запись $H \leq_{CEP} G$ означает, что H является CEP-подгруппой группы G, или, что подгруппа H CEP-вложена в группу G. Из определения CEP-подгруппы легко следует, что если $H \leq_{CEP} G$ и $G \leq_{CEP} F$, то $H \leq_{CEP} F$, т.е. свойство быть CEP-подгруппой транзитивно.

Одним из важных результатов о CEP-подгруппах является теорема А. Ю. Ольшанского из работы [15], согласно которой произвольная неэлементарная гиперболическая группа содержит CEP-подгруппу, изоморфную абсолютно свободной группе F_∞ бесконечного ранга.

Как показано в работах [16], [17], свободные бернсайдовы группы $B(m, n)$ достаточно большого нечетного периода богаты свободными периодическими подгруппами. В работах [13], [14], [18], [19] построены CEP-подгруппы свободных бернсайдовых групп $B(m, n)$ достаточно большого нечетного периода, изоморфные свободным бернсайдовым группам $B(\infty, n)$ бесконечного ранга.

В дальнейшем через $\prod\limits_{i\in I}{}^n G_i$ будем обозначать n-периодическое произведение семейства групп $\{G_i\}_{i\in I}$ введенное Адяном в работах [1], [2] для всех нечетных $n \geq 665$. В случае двух множителей будем употреблять запись $G_1 \overset{n}{*} G_2$.

Из определений прямого и свободного произведения непосредственно следует, что произвольная группа G_1 является CEP-подгруппой как прямого произведения $G_1 \times G_2$, так и свободного произведения $G_1 * G_2$ группы G_1 с любой группой G_2. В работе получено необходимое и достаточное условие, при выполнении которого множитель G_i n-периодического произведения $\prod\limits_{i\in I}{}^n G_i$ произвольного семейства групп $\{G_i\}_{i\in I}$, является CEP-подгруппой. В частности, будет показано, что любая группа G_1 нечетного периода $n \geq 665$ является CEP-подгруппой n-периодического произведения $G_1 \overset{n}{*} G_2$ для произвольной группы G_2, а также, что для любого простого числа p и для любой группы G группа $A_p(m,n)$ является CEP-подгруппой n-периодического произведения $A_p(m,n) \overset{n}{*} G$ (группа $A_p(m,n)$ есть фактор группа группы $A(m,n)$ – некоммутативного аналога группы рациональных чисел по подгруппе $\langle d^p \rangle$, где d – порождающий элемент центра группы $A(m,n)$ (см. [20])).

2. CEP-МНОЖИТЕЛИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Теорема 2.1. *Множитель G_1 n-периодического произведения $G_1 \overset{n}{*} G_2$ групп G_1 и G_2, где $|G_2| > 2$, является CEP-подгруппой тогда и только тогда, когда любая нетривиальная нормальная подгруппа N_{G_1} группы G_1 содержит подгруппу G_1^n, порожденную всеми n-ми степенями элементов группы G_1.*

Доказательство. Предположим, что G_1 является CEP-подгруппой группы $G = G_1 \overset{n}{*} G_2$. Пусть N_{G_1} – нетривиальная нормальная подгруппа группы G_1, а N такая нормальная подгруппа группы G, что имеет место равенство $N_{G_1} = N \cap G_1$. Выберем произвольные нетривиальные элементы a, g, b_1, b_2 такие, что $a \in N_{G_1} = N \cap G_1$, $g \in G_1$ и $b_1, b_2 \in G_2$, где $b_1 \neq b_2$ (по условию $|G_2| > 2$). Рассмотрим элемент $b_1^{-1} a b_1 b_2^{-1} a b_2 g$. Заметим, что он не равен произведению двух инволюций в свободном произведении $G_1 * G_2$, т.е. – в ранге 0, так как из теоремы о нормальной форме для свободных произведений непосредственно следует, что один из циклических сдвигов произведения двух инволюций имеет вид $i_1 z i_2 z^{-1}$, где

i_1 и i_2 инволюции из сомножителей произведения $G_1 * G_2$, а слово z либо пусто, либо $|i_1 z i_2 z^{-1}| = 2|z| + 2$. Значит слово $b_1^{-1}a(b_1b_2^{-1})ab_2g$ над алфавитом свободного произведения $G_1 * G_2$ есть элементарный период ранга 1. Поскольку $a \in N$, то $(b_1^{-1}ab_1b_2^{-1}ab_2g)^n \equiv g^n (\mod N)$.

Так как слово $b_1^{-1}a(b_1b_2^{-1})ab_2g$ является элементарным периодом ранга 1, то, согласно определению n-периодического произведения, в группе G выполняется соотношение $(b_1^{-1}ab_1b_2^{-1}ab_2g)^n = 1$. Следовательно $g^n \equiv 1 (\mod N)$, что означает $g^n \in N$. Но так как $g \in G_1$, то $g^n \in N \cap G_1$, т.е. $g^n \in N_{G_1}$. Таким образом, из условия $g \in G_1$ следует, что $g^n \in N_{G_1}$ и поэтому имеет место включение $G_1^n \subset N_{G_1}$. Необходимость условия доказана.

Теперь предположим, что любая нетривиальная нормальная подгруппа N_{G_1} группы G_1 содержит подгруппу G_1^n, т.е. $G_1^n \subset N_{G_1}$. Рассмотрим произвольный эпиморфизм $\phi_1 : G_1 \to G_1'$ и докажем, что его можно продолжить до эпиморфизма из группы $G = G_1 \overset{n}{*} G_2$ на некоторую группу G', содержащую G_1' в качестве подгруппы (см. лемму 1.1).

Если эпиморфизм $G_1 \to G_1'$ является изоморфизмом, то существование нужного эпиморфизма следует из точности операции n-периодического произведения (см. теорему 3 работы [1]). Поэтому можно считать, что $G_1' = G_1/N_{G_1}$ для некоторой нетривиальной нормальной подгруппы $N_{G_1} \lhd G_1$. Обозначим $G_2' = G_2/G_2^n$ и построим n-периодическое произведение $G' = G_1' \overset{n}{*} G_2'$. По условию теоремы $G_1^n \subset N_{G_1}$, следовательно, группы G_i' суть периодические группы периода n для $i = 1, 2$. Воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 2.1. (см. [1], *теорема 5) Если все группы G_i семейства $\{G_i\}_{i \in I}$ суть периодические группы показателя n, то периодическое произведение $\prod\limits_{i \in I}{}^n G_i$ этих групп при нечетном $n \geq 665$ также есть периодическая группа показателя n.*

Согласно лемме 2.1, группа G' тоже является периодической группой периода n. Построим отображение $\phi : G_1 * G_2 \to G_1' \overset{n}{*} G_2'$, сопоставляя каждому элементу $g_{i_1} g_{i_2} ... g_{i_t}$ в нормальной форме свободного произведения $G_1 * G_2$ элемент $g_{i_1}' g_{i_2}' ... g_{i_t}' \in G'$, где каждый элемент g_{i_s} принадлежит или группе G_1 или группе G_2, $s = 1, ..., t$ а g_{i_s}' есть образ элемента g_{i_s} при соответствующем естественном эпиморфизме $G_i \to G'_i$, $i = 1, 2$. Из определения отображения ϕ следует, что оно является продолжением ϕ_1. Чтобы доказать существование нужного эпиморфизма $\overline{\phi} : G_1 \overset{n}{*} G_2 \to G'_1 \overset{n}{*} G'_2$, достаточно показать, что отображение ϕ можно пропустить через периодическое произведение $G_1 \overset{n}{*} G_2$.

Докажем, что образ каждого определяющего соотношения группы $G_1 \overset{n}{*} G_2$ при отображении ϕ есть определяющее соотношение группы G'. Произведение $G_1 \overset{n}{*} G_2$ получается из свободного произведения $G_1 * G_2$ добавлением некоторых определяющих соотношений вида A^n, где $A \in G_1 * G_2$, следовательно, нужно проверить, что $\phi(A^n) = 1$ в группе G'. Но по определению $\phi(A^n) = (\phi(A))^n$, а группа G', как было отмечено выше, является n-периодической группой.

Для завершения доказательства остается вспомнить, что в силу точности n-периодического произведения, группа G_1 вкладывается в группу G, а группа G'_1 – в группу G'. Теорема доказана. □

Согласно теореме 4 работы Адяна [1] операция n-периодического произведения коммутативна и ассоциативна. Поэтому, из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 2.1. *Пусть множество* $\bigcup\limits_{i \in I - \{k\}} (G_i - \{e_i\})$ *содержит более одного элемента. Тогда множитель* G_k *n-периодического произведения семейства групп* $\{G_i\}_{i \in I}$ *является* CEP*-подгруппой группы* $\prod\limits_{i \in I}{}^{n} G_i$ *в том и только том случае, когда любая нетривиальная нормальная подгруппа* N_{G_k} *группы* G_k *содержит подгруппу* G_k^n*, порожденную всеми n-ми степенями элементов группы* G_k.

Как известно (см., например, [6]), группа с единственной минимальной нетривиальной нормальной подгруппой называется *монолитической*, а ее минимальная нормальная подгруппа называется *монолитом* группы. Согласно этому, теорему 2.1 можно переформулировать следующим образом.

Следствие 2.2. *Пусть группа* G_2 *содержит более двух элементов. Тогда множитель* G_1 *n-периодического произведения* $G_1 \overset{n}{*} G_2$ *является* CEP*-подгруппой в том и только том случае, когда или* G_1^n *является монолитом группы* G_1 *или* $G_1^n = \{1\}$.

Теорема 2.2. *Пусть в группе G_1 содержится не более одной инволюции. Тогда множитель G_1 n-периодического произведения $G_1 \overset{n}{*} G_2$, где $|G_2| \neq 1$, является CEP-подгруппой тогда и только тогда, когда любая нетривиальная нормальная подгруппа N_{G_1} группы G_1 содержит подгруппу G_1^n.*

Доказательство. Если $|G_1| \leq 3$, то утверждение очевидно, поэтому предположим, что $|G_1| > 3$. Пусть N_{G_1} – нетривиальная нормальная подгруппа группы G_1, а $N \lhd G = G_1 \overset{n}{*} G_2$ и имеет место равенство $N_{G_1} = N \cap G_1$. Выберем произвольные нетривиальные элементы a, g, b такие, что $a \in N_{G_1} = N \cap G_1$, $g \in G_1$, $a \neq g$ и $b \in G_2$. Так как в группе G_1 содержится не более одной инволюции, то можно считать, что $a \neq g^{\pm 1}$. Следовательно, слово $b^{-1}abg$ не равно произведению двух инволюций в ранге 0. Очевидно, слово $b^{-1}abg$ есть элементарный период ранга 1, поэтому, согласно определению n-периодического произведения, имеет место равенство $(b^{-1}abg)^n = 1$ в группе G. Поскольку $a \in N$, то

$$(b^{-1}abg)^n \equiv g^n (\mod N),$$

значит $g^n \equiv 1(\mathrm{mod}\, N)$, т.е. выполнено соотношение $g^n \in N$. Следовательно, из условия $g \in G_1$ вытекает, что $g^n \in N_{G_1}$, т.е. имеет место включение $G_1^n \subset N_{G_1}$. Необходимость условия доказана. Достаточность утверждения доказывается аналогично теореме 2.1. $\square$

Следствие 2.3. *Любая группа G_1 нечетного периода $n \geq 665$ является CEP-подгруппой n-периодического произведения $G_1 \overset{n}{*} G_2$ для произвольной группы G_2.*

В качестве другого применения теоремы 2.2 рассмотрим фактор группу $A_p(m,n) = A(m,n)/\langle d^p \rangle$, где $n \geq 1003$ – произвольное нечетное число, $m > 1$, p – произвольное простое число, а группа

$$A(m,n) = \langle a_1, a_2, ...a_m, d \,|\, a_j d = d a_j \text{ и } A^n = d \text{ для всех } A^n \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{E}_i \text{ и } 1 \leq j \leq m \rangle$$

есть некоммутативный аналог группы рациональных чисел, построенный и исследованный в работах [8], [20]. Ясно, что группа $A_p(m,n)$ имеет задание:

$$A_p(m,n) = \langle a_1, a_2, ...a_m, d \,|\, d^p = 1,\ a_j d = d a_j,$$
$$A^n = d \ \text{ для всех } A^n \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{E}_i \text{ и } 1 \leq j \leq m \rangle.$$

Лемма 2.2. *Подгруппа $\langle d\,\rangle$ содержится в каждой неабелевой подгруппе группы $A_p(m,n)$. В частности, группа $A_p(m,n)$ – монолитическая группа с монолитом $A_p(m,n)^n = \langle d\,\rangle$.*

Доказательство. Пусть $\overline{\Delta}$ – произвольная неабелева подгруппа группы $A_p(m,n)$, а Δ ее образ при естественном гомоморфизме

$$A_p(m,n) \to B(m,n) = A_p(m,n)/\langle d\rangle.$$

Поскольку фактор группа неабелевой группы по центру – нециклическая группа, то Δ – не циклическая.

В силу теоремы 1 работы [21], в нециклической подгруппе Δ содержатся элементы порядка n. Согласно утверждению [8, гл.VI, теорема 1.2], в Δ содержится некоторый элемент вида TAT^{-1}, где A – элементарный период некоторого ранга, т.е. $A^n \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{E}_i$. Тогда элемент $TA^nT^{-1} = TdT^{-1} = d$ принадлежит $\overline{\Delta}$. Первая часть утверждения доказана.

Остается показать, что если $\overline{\Delta}$ – нетривиальная абелева нормальная подгруппа группы $A_p(m,n)$, то $\overline{\Delta} = \langle d\,\rangle$. Поскольку подгруппа $\overline{\Delta}$ абелева, то ее образ Δ тоже – абелева нормальная подгруппа. В силу теоремы Адяна (см. [8, гл.VI, теорема 3.3]), всякая абелева подгруппа группы $B(m,n)$ циклическая, т.е. $\Delta = \langle y\rangle$ для некоторого элемента $y \in B(m,n)$. Так как произвольный элемент x группы $B(m,n)$ нормализует подгруппу $\langle y\rangle$, то $|\langle x,y\rangle| \le n^2$ для любого $x \in B(m,n)$. По теореме Адяна (см. [8, гл.VII, теорема 1.8]) всякая конечная подгруппа группы $B(m,n)$ – циклическая группа. Поэтому подгруппа $\langle x,y\rangle$ - циклическая, в частности, x и y коммутируют для любого $x \in B(m,n)$. Тогда y принадлежит центру $B(m,n)$. Согласно другой теореме Адяна (см. [8, гл.VI, теорема 3.4]), центр группы $B(m,n)$ тривиален, т.е. $\langle y\rangle$ – тривиальная подгруппа и поэтому $\overline{\Delta} \subset \langle d\,\rangle$. Но $|\langle d\,\rangle| = p$ – простое число, а $\overline{\Delta}$ нетривиальна, значит $\overline{\Delta} = \langle d\rangle$. $\square$

Заметим, что при $p \ge 3$ группа $A_p(m,n)$ не имеет инволюций, а группа $A_2(m,n)$ имеет единственную инволюцию d. Поэтому из леммы 2.2 и теоремы 2.2 вытекает

Следствие 2.4. *Для любого простого числа p и для любой группы G группа $A_p(m,n)$ является CEP-подгруппой n-периодического произведения $A_p(m,n) \overset{n}{*} G$.*

Любопытно, что монолит $\langle d \rangle$ группы $A_p(m,n)$ является простой подгруппой и в то же время совпадает с центром группы $A_p(m,n)$, а каждое из этих условий достаточно, чтобы подгруппа $\langle d \rangle$ являлась CEP-подгруппой.

Abstract. There is a well-known fact, that any group G_1 is a CEP-subgroup both for the direct product $G_1 \times G_2$ and the free product $G_1 * G_2$ of G_1 with any group G_2. The paper gives a necessary and sufficient condition providing that a multiplier G_i of a n-periodic product $\prod\limits_{i\in I}^{n} G_i$ of any family of groups $\{G_i\}_{i\in I}$ is a CEP-subgroup. Particularly, the found criterion means that any group G_1 of odd period $n \geq 665$ is a CEP-subgroup of the n-periodic product $G_1 \overset{n}{*} G_2$ for any group G_2.

Список литературы

[1] С. И. Адян, "Периодическое произведение групп", Теория чисел, математический анализ и их приложения, Тр. МИАН , **142**, Наука, М., 3 – 21 (1976).
[2] С. И. Адян "Еще раз о периодических произведениях групп и проблеме А. И. Мальцева", Матем. заметки, **88**, no. 6 (2010).
[3] А. Ю. Ольшанский, "Проблема А. И. Мальцева об операциях над группами", Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **14**, 225 – 249 (1989).
[4] S. V. Ivanov, "On periodic products of groups", Internat. J. Algebra Comput., **5**, no. 1, 7 – 17 (1995).
[5] С. И. Адян, "О простоте периодических произведений групп", Докл. АН СССР, **241**, no. 4, 745 – 748 (1978).
[6] Х. Нейман, Многообразия Групп, Мир, М. (1969).
[7] П. С. Новиков, С. И. Адян, "О бесконечных периодических группах. I, II, III". Изв. АН СССР. Сер. матем., **32**, 212 – 244, 251 – 524, 709 – 731 (1968).
[8] С. И. Адян, Проблема Бернсайда и Тождества в Группах, Наука, М. (1975).
[9] С. И. Адян, "Проблема Бернсайда и связанные с ней вопросы", УМН, **65**, no. 5 (395), 5 – 60 (2010).
[10] B. H. Neumann, "An essay on free products of groups with amalgamations", Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A., **246**, 503 – 554 (1954).
[11] B. H. Neumann, H. Neumann, "Embedding theorems for groups", J. London Math. Soc., **34**, 465 – 479 (1959).
[12] G. Higman, B. H. Neumann, H. Neumann, "Embedding theorems for groups", J. London Math. Soc., **24**, 247 – 254 (1949).
[13] A. Yu. Olshanskii, M. V. Sapir, "Non-amenable finitely presented torsion-by-cyclic groups", Publ. Math. Inst. Hautes E'tudes Sci., **96**, 43 – 169 (2003).
[14] S. V. Ivanov, "On subgroups of free Burnside groups of large odd exponent", Illinois J. Math. Special issue in honor of Reinhold Baer (1902–1979), **47**, no. 1-2, 299 – 304 (2003).
[15] А. Ю. Ольшанский, " SQ-универсальность гиперболических групп", Матем. сб., **186**, no. 8, 119 – 132 (1995).
[16] В. С. Атабекян, "О простых и свободных периодических группах", Вестн. Моск. ун-та., Сер. 1. Матем., мех., no. 6, 76 – 78 (1987).
[17] В. С. Атабекян, "О мономорфизмах свободных бернсайдовых групп", Матем. заметки, **86**, no. 4, 483 – 490 (2009).
[18] D. Sonkin, "CEP-subgroups of free Burnside groups of large odd exponents", Comm. Algebra, **31**, **10**, 4687 – 4695 (2003).

[19] S. V. Ivanov, "Embedding free Burnside groups in finitely presented groups", Geometriae Dedicata, **111**, no. 1, 87 – 105 (2005).
[20] С. И. Адян, "О некоторых группах без кручения", Изв. АН СССР. Сер. матем., **35**, no. 3, 459 – 468 (1971).
[21] В. С. Атабекян, "О подгруппах свободных бернсайдовых групп нечетного периода $n \geq 1003$", Изв. РАН. Сер. матем., **73**, no. 5, 3 – 36 (2009).

Поступила 28 февраля 2011