

ВЫДЕЛЕНИЕ ГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА РЕГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Г. Г. КАЗАРЯН, В. Н. МАРГАРЯН

Ереванский Государственный Университет
Российско - Армянский (Славянский) Университет
E-mails: *wachagan.margaryan@yahoo.com*; *haikghazaryan@mail.ru*

Аннотация. Линейный дифференциальный оператор $P(D)$ с постоянными коэффициентами называется *регулярным (невыврожденным)*, если все мономы $\{\xi^\alpha\}$ характеристического многочлена (полного символа) $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2)$ этого оператора оцениваются через $P(\xi)$. В работе рассматривается двумерный регулярный, почти гипоеллиптический оператор $P(D) = P(D_1, D_2)$ с правильным многоугольником Ньютона и доказывается, что все обобщённые (слабые) решения уравнения $P(D)u = f$ из определенного весового пространства Соболева являются бесконечно дифференцируемыми в прямоугольнике $\Omega = \Omega(a, b) = \{x \in E^2; -a < x_1 < a; -b < x_2 < b\}$ функциями по второй переменной, если функция f бесконечно дифференцируема по той же переменной.

MSC2010 number: 12E10

Ключевые слова: гипоеллиптический оператор, гипоеллиптическое уравнение, регулярный оператор, почти гипоеллиптическое уравнение, анизотропное весовое пространство Соболева.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. КЛАСС УРАВНЕНИЙ

В 1937 году И. Г. Петровский доказал (см. [1]), что все классические решения системы дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами аналитичны тогда и только тогда, когда эта система эллиптична. Тем самым Петровский обобщил результаты С. Н. Бернштейна (см. [2]) и других, относящихся к уравнениям второго порядка. Что касается слабых (обобщённых) решений, то их дифференцируемость для уравнения Лапласа впервые была доказана Г. Вейлем (см. [3]), а для более общих уравнений (в основном второго порядка) этот вопрос изучен Л. Шварцем [4], Ф. Йоном [5], К. Фридрихсом [6], П. Д. Лаксом [7], Л. Ниренбергом [8] и другими.

Переломным моментом в этой теории можно считать появление в 1955 году работы Л. Хёрмандера [9], где он ввел понятие гипозэллиптического уравнения (оператора), все обобщенные решения которого бесконечно дифференцируемы (для более подробных сведений см. [10]). Это оператор $P(D)$, отношения всех частных производных $D^\alpha P(\xi)$ характеристического многочлена (символа) $P(\xi)$ которого на этот символ стремятся к нулю при стремлении $|\xi|$ к бесконечности. Л. Хёрмандер доказал, что все непрерывные слабые решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами $P(D)u = 0$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями тогда и только тогда, когда оператор $P(D)$ гипозэллиптичен.

Если иметь в виду, что эллиптичность оператора $P(D)$ можно определить как оператор у которого отношение $|\xi|^{|\alpha|} \cdot |D^\alpha P(\xi)/P(\xi)|$ ограничено для любого мультииндекса α , то ясно, что понятие гипозэллиптичности является непосредственным обобщением понятия эллиптичности оператора. Работы Л. Хёрмандера стали естественным толчком в возникновении задачи о выделении нетривиальных бесконечно дифференцируемых решений негипозэллиптических уравнений. В этом направлении первые результаты принадлежат Л. Гордингу и Б. Мальгранжу, которые в работе [11] ввели понятие *частично гипозэллиптического* оператора и доказали, что те решения частично гипозэллиптических уравнений, которые бесконечно дифференцируемы по определенным переменным, являются бесконечно дифференцируемыми по всем переменным.

Далее этой тематике были посвящены работы многих авторов. Отметим только работы [12] – [15] к которым непосредственно примыкает наша заметка. В частности, в работе Я. С. Бугрова [14] построен пример негипозэллиптического уравнения, решения которого в *полупространстве* являются бесконечно гладкими, как только они суммируемы с квадратом вместе с некоторыми их производными. В работе [15] В. И. Буренковым найдены необходимые и достаточные условия того, чтобы все решения $\{u\}$ так называемого *глобально гипозэллиптического* уравнения $P(D)u = 0$, которые определенным образом стремятся к нулю в бесконечности, являлись бесконечно гладкими.

На наш взгляд понятие *почти гипоеллиптического* оператора (см. [16]) является таким же естественным и непосредственным обобщением понятия гипоеллиптичности, каким понятие гипоеллиптичности является обобщением понятия эллиптичности. Именно, оператор $P(D)$ называется *почти гипоеллиптическим*, если отношение $|D^\alpha P(\xi)/P(\xi)|$ ограничено для любого мультииндекса α .

Нами в [17] доказано: для того, чтобы все те решения уравнения $P(D)u = 0$, которые суммируемы с определенным экспоненциальным весом были бесконечно дифференцируемыми функциями *во всем пространстве*, необходимо и достаточно, чтобы оператор $P(D)$ был почти гипоеллиптическим.

В работе [18] выделено множество бесконечно гладких решений одного класса двумерных почти гипоеллиптических уравнений в *бесконечной* полосе достаточно большой ширины. В настоящей работе мы изучаем определенный класс двумерных регулярных, почти гипоеллиптических уравнений $P(D)u = P(D_1, D_2)u = f$ в *конечном прямоугольнике* из E^2 .

Для формулировки задачи и изложения результатов условимся в следующих обозначениях: R^2 и E^2 двумерные вещественные пространства точек $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ и $x = (x_1, x_2)$, N - множество натуральных чисел, $N_0 = N \cup \{0\}$, $N_0^2 = N_0 \times N_0$ - множество 2-мерных мультииндексов. Для $\xi \in R^2$, $x \in E^2$ и $\alpha \in N_0^2$ обозначим

$$|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdot \xi_2^{\alpha_2},$$

$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2}$, где $D_j = \partial/\partial \xi_j$ либо $D_j = \frac{1}{i} \cdot \partial/\partial x_j$ ($j = 1, 2$).

Для линейного дифференциального оператора

$$P(D) = P(D_1, D_2) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha D^\alpha, \quad (1.1)$$

где сумма распространяется по конечному набору мультииндексов $(P) = \{\alpha \in N_0^2, \gamma_\alpha \neq 0\}$, многочлен

$$P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha \quad (1.2)$$

назовем характеристическим многочленом или (полным) символом, а наименьший выпуклый многоугольник $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P)$, содержащий множество $(P) \cup \{0\}$, назовем *многоугольником Ньютона* оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$).

Многоугольник $\mathfrak{R}$ с вершинами из N_0^2 назовем *полным* (см. [19]), если $\mathfrak{R}$ имеет вершину в начале координат и отличные от начала координат вершины на каждой оси координат N_0^2 . Полный многоугольник $\mathfrak{R}$ назовем *правильным (вполне правильным)* (см. [20], [21]), если внешние нормали некоординатных сторон $\mathfrak{R}$ имеют неотрицательные (положительные) координаты. Легко доказать (см., например, [16]), что многоугольник Ньютона гипоеллиптического (почти гипоеллиптического) оператора является вполне правильным (правильным).

Оператор $P(D)$ вида (1.1) (многочлен $P(\xi)$ вида (1.2)) назовем *регулярным (невырожденным)* (см. [19]), если существует число $C > 0$ такое, что

$$\sum_{\alpha \in (P)} |\xi^\alpha| \leq C[|P(\xi)| + 1] \quad \forall \xi \in R^2. \quad (1.3)$$

В. П. Михайловым в работе [19] найдены необходимые и достаточные условия того, что многочлен $P(\xi)$ с полным многоугольником Ньютона был регулярным. Там же доказано, что вершины полного многогранника Ньютона регулярного многочлена с вещественными коэффициентами имеют чётные координаты. В настоящей заметке чётные натуральные числа l, m ($l < m$) и, тем самым, четырёхугольник $\mathfrak{R} = \{\nu \in N_0^2, \nu_1 \leq l, \nu_1 + \nu_2 \leq m\}$ будут фиксированы.

Геометрически очевидно, что $\mathfrak{R}$ – правильный четырёхугольник в $R_+^2 = \{\xi \in R^2, \xi_j \geq 0, j = 1, 2\}$ с вершинами $(0, 0), (l, 0), (l, m - l), (0, m)$ из N_0^2 . Важно отметить, что $\mathfrak{R}$ не является вполне правильным многоугольником, так как вторая координата внешней нормали некоординатной стороны $[(l, 0) - (l, m - l)]$ равна нулю, или - геометрически, эта сторона перпендикулярна оси α_1 в N_0^2 .

Пусть для положительных чисел a, b функция $f(x) = f(x_1, x_2)$ задана в прямоугольнике $\Omega = \Omega(a, b) = \{x \in E^2; x_1 \in (-a, a), x_2 \in (-b, b)\}$. Рассматривается уравнение

$$P(D)u(x) = f(x); \quad x \in \Omega. \quad (1.4)$$

Легко показать, что при (линейном) преобразовании координат $x_j = a_j y_j$; $a_j > 0$ ($j = 1, 2$) оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) не меняет ни своего многоугольника Ньютона ни регулярности, ни почти гипоеллиптичности. Поэтому преобразованием $x_1 = x_1, x_2 = b y_2$ из прямоугольника $\Omega(a, b)$ можно перейти к прямоугольнику, который также обозначим через Ω : $\Omega = \Omega(a) = \Omega(a, 1) = \{x \in E^2; x_1 \in (-a, a), x_2 \in (-1, 1)\}$.

Итак, будем рассматривать уравнение (1.4) с *регулярным* линейным дифференциальным оператором $P(D)$ с четырёхугольником Ньютона $\mathfrak{R}(P) = \mathfrak{R}$ и поставим задачу о выделении бесконечно дифференцируемых по переменной x_2 решений из множества обобщённых решений уравнения (1.4) при данной правой части f с априорными свойствами гладкости по переменной x_2 . Описанный оператор является почти гипоеллиптическим (см. [16]) и частично гипоеллиптическим по второй переменной (см. [11] или [10]), но не является гипоеллиптическим, вследствие того, что четырёхугольник $\mathfrak{R}(P) = \mathfrak{R}$ не является вполне правильным.

2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В этом параграфе мы вводим и исследуем функциональные пространства типа весовых анизотропных пространств Соболева, в которых мы изучаем уравнение (1.4) с многоугольником Ньютона фиксированного типа $\mathfrak{R}$ и с фиксированным прямоугольником $\Omega = \Omega(a) \subset E^2$.

В качестве весовой функции мы рассмотрим функцию $g(t) = 1 - t^2$ при $|t| \leq 1$ и $g(t) = 0$ при $|t| > 1$.

Обозначим через $H(\mathfrak{R}, \Omega)$ множество функций $u \in L_2(\Omega)$ с конечной нормой

$$\|u\|_H = \|u\|_{H(\mathfrak{R}, \Omega)} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}, \quad (2.1)$$

а через $H_g(\mathfrak{R}, \Omega)$ множество функций $u \in L_2(\Omega)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{H_g} = \|u\|_{H_g(\mathfrak{R}, \Omega)} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|D^\alpha u g^{|\alpha|}(x_2)\|_{L_2(\Omega)}. \quad (2.2)$$

Из полноты многоугольника $\mathfrak{R}$ и определения функции g легко следует, что формулами (2.1) и (2.2) определяются нормы, при этом $H(\mathfrak{R}, \Omega)$ (соответственно $H_g(\mathfrak{R}, \Omega)$) банахово пространство типа пространств Соболева (соответственно типа весовых пространств Соболева).

Наконец через $H^0(\mathfrak{R}, \Omega)$ обозначим пополнение множества $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (2.1), а через $H_{g,loc}(\mathfrak{R}, \Omega)$ – множество функций $u \in H_g(\mathfrak{R}, \Omega(a'))$ для любого $a' \in (0, a)$, где $\Omega(a') = \Omega(a', 1) = \{x \in E^2, -a' < x_1 < a', -1 < x_2 < 1\}$, $\Omega(a') \subset \Omega$.

Замечание 2.1. Легко видеть, что $u \in H_{g,loc}(\mathfrak{R}, \Omega)$ тогда и только тогда, когда $u(x) \cdot \psi(x_1) \in H_g(\mathfrak{R}, \Omega)$ для произвольной функции $\psi \in C_0^\infty(-a, a)$.

Сначала докажем два простых вспомогательных предложения.

Предложение 2.1. Пусть $\delta \in (0, 1)$; $k, n \in N_0, k + n \leq m$. Тогда

- 1) $g^n(t) \leq (2\delta)^n$ при $1 - \delta \leq |t| < 1$;
- 2) $g^{m-k}(t) \leq (2\delta)^n g^{m-k-n}(t)$ при $1 - \delta \leq |t| \leq 1$;
- 3) существует число $\sigma = \sigma(m) > 0$ такое, что для всех $k = 0, 1, \dots, m$

$$\left| \frac{d^k}{dt^k} g^m(t) \right| \leq \sigma g^{m-k}(t) \quad \forall t \in (-1, 1).$$

Доказательство. Очевидно, пункт 1) достаточно доказать для $n = 1$. Так как $|t| \geq 1 - \delta$, то $g(t) = 1 - |t|^2 \leq 1 - (1 - \delta)^2 = (2 - \delta)\delta < 2\delta$.

Второй пункт получается из первого умножением обеих частей неравенства 1) на неотрицательное выражение $g^{m-k-n}(t)$. Третий пункт доказывается простыми выкладками. $\square$

Предложение 2.2. Пусть $\delta \in (0, 1)$. Существует функция $\varphi_\delta(t)$; $t \in E^1$, удовлетворяющая условиям

- 1) $\varphi_\delta \in C_0^\infty(-1 + \delta/2, 1 - \delta/2)$;
- 2) $0 \leq \varphi_\delta(t) \leq 1, \forall t \in E^1$;
- 3) $\varphi_\delta(t) = 1$ при $|t| \leq 1 - \delta$;
- 4) Для любого $k \in N_0$ существует число $C_k > 0$, не зависящее от δ такое, что

$$|\varphi_\delta^{(k)}(t)| \leq C_k \delta^{-k}, \quad t \in E^1; \quad k = 0, 1, \dots$$

Доказательство. Пусть $\Phi \in C_0^\infty(-1, 1)$, $\Phi(t) \geq 0$ при всех $t \in (-1, 1)$ и $\int \Phi(t) dt = 1$, а $\chi_\delta(t)$ – характеристическая функция отрезка $[-1 + \frac{3}{4}\delta, 1 - \frac{3}{4}\delta]$. Тогда простыми вычислениями легко убедиться, что функция

$$\varphi_\delta(t) = \frac{4}{\delta} \int \chi_\delta(t)(t - \tau) \Phi\left(\frac{4\tau}{\delta}\right) d\tau$$

удовлетворяет требованиям 1) - 4) предложения при

$$C_k = 4^k \int |\Phi^{(k)}(t)| dt \quad k = 0, 1, \dots$$

Предложение 2.2 доказано. $\square$

Лемма 2.1. Пусть $\psi \in C_0^\infty(-a, a)$ и $u \in H_{g,loc}(\mathfrak{R}, \Omega)$, тогда

$$u(x)\psi(x_1)g^m(x_2) \in H^0(\mathfrak{R}, \Omega).$$

Доказательство. Пусть $\delta \in (0, 1)$ и функция $\varphi_\delta(x_2)$ ($x_2 \in E^1$) построена по предложению 2.2. Положим

$$d_1 = \max\{C_k; 1 \leq k \leq m\}, \Omega_\delta = \Omega(a, 1) \setminus \Omega(a, 1 - \delta).$$

Тогда из свойства 3) функции φ_δ следует

$$\begin{aligned} I &\equiv \|u(x)\psi(x_1)g^m(x_2)[1 - \varphi_\delta(x_2)]\|_{H(\mathfrak{R}, \Omega)} = \\ &= \|u(x)\psi_1(x_1)g^m(x_2)[1 - \varphi_\delta(x_2)]\|_{H(\mathfrak{R}, \Omega_\delta)} = \\ &= \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|D^\alpha[u(x)\psi(x_1)g^m(x_2)(1 - \varphi_\delta(x_2))]\|_{L_2(\Omega_\delta)}. \end{aligned}$$

Оценим выражение I , применяя свойства 2), 4) функции φ_δ и формулу Лейбница (при этом ниже $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(\Omega_\delta)}$)

$$\begin{aligned} I &\leq \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|D^\alpha[u(x)\psi(x_1)g^m(x_2)]\| + \\ &+ d_1 \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}, \alpha_2 > 0} \sum_{\beta_2=1}^{\alpha_2} C_{\alpha_2}^{\beta_2} \delta^{-\beta_2} \|D^{\alpha-(0, \beta_2)}[u(x)\psi(x_1)g^m(x_2)]\|, \end{aligned}$$

где C_i^j – биномиальные коэффициенты. Ещё раз применив формулу Лейбница, получаем

$$\begin{aligned} I &\leq \left\{ \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|D^\alpha[u(x)\psi(x_1)]g^m(x_2)\| + \right. \\ &+ \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}, \alpha_2 > 0} \sum_{\beta_2=1}^{\alpha_2} C_{\alpha_2}^{\beta_2} \delta^{-\beta_2} \|D^{\alpha-(0, \beta_2)}[u(x)\psi(x_1)]D_2^{\beta_2}g^m(x_2)\| \Big\} + \\ &+ d_1 \left\{ \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}, \alpha_2 > 0} \sum_{\beta_2=1}^{\alpha_2} C_{\alpha_2}^{\beta_2} \delta^{-\beta_2} \|D^{\alpha-(0, \beta_2)}[u(x)\psi(x_1)]g^m(x_2)\| + \right. \\ &+ \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}, \alpha_2 > 0} \sum_{\beta_2=1}^{\alpha_2} C_{\alpha_2}^{\beta_2} \delta^{-\beta_2} \sum_{\gamma_2=1}^{\alpha_2-\beta_2} C_{\alpha_2-\beta_2}^{\gamma_2} \|D^{\alpha-(0, \gamma_2)}[u(x)\psi(x_1)]D_2^{\gamma_2}g^m(x_2)\| \Big\} \equiv \\ &\equiv I_1 + d_1 I_2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Применяя предложение 2.1, для слагаемого I_1 получаем

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|D^\alpha[u(x)\psi(x_1)]g^m(x_2)\| + \\ &+ \sigma \cdot \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}, \alpha_2 \geq 1} \sum_{\beta_2=1}^{\alpha_2} C_{\alpha_2}^{\beta_2} \|D^{\alpha-(0, \beta_2)}[u(x)\psi(x_1)]g^{m-\beta_2}(x_2)\|. \end{aligned}$$

Для I_2 аналогично

$$I_2 \leq \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}, \alpha_2 \geq 1} \sum_{\beta_2=1}^{\alpha_2} C_{\alpha_2}^{\beta_2} \delta^{-\beta_2} (2\delta)^{\beta_2} \|D^{\alpha-(0,\beta_2)}[u(x)\psi(x_1)]g^{m-\beta_2}(x_2)\| + \\ + \sigma \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}, \alpha_2 \geq 1} \sum_{\beta_2=1}^{\alpha_2} C_{\alpha_2}^{\beta_2} \delta^{-\beta_2} \sum_{\gamma_2=1}^{\alpha_2-\beta_2} (2\delta)^{\beta_2} \|D^{\alpha-(0,\beta_2)-(0,\gamma_2)}[u(x)\psi(x_1)]g^{m-\beta_2-\gamma_2}(x_2)\|.$$

Сгруппировав соответствующие члены в оценках I_1 и I_2 , из (2.3) получаем с некоторой постоянной $d_2 > 0$

$$I \leq d_2 \cdot \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}, \beta_2=0}^{\alpha_2} C_{\alpha_2}^{\beta_2} \|D^{\alpha-(0,\beta_2)}[u(x)\psi(x_1)]g^{m-\beta_2}(x_2)\|. \quad (2.4)$$

Так как $m - \beta_2 \geq |\alpha - (0, \beta_2)|$ при $\alpha \in \mathfrak{R}$, $0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2$ и по определению функции g , $g(x_2) \leq 1$ при $|x_2| \leq 1$, то

$$g^{m-\beta_2}(x_2) \leq g^{|\alpha-(0,\beta_2)|}(x_2) \quad \forall x_2 \in (-1, 1). \quad (2.5)$$

С другой стороны, в силу правильности $\mathfrak{R}$ множество $\{\alpha - (0, \beta_2); \alpha \in \mathfrak{R}, 0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2\} \subset \mathfrak{R}$. Поэтому из (2.4), (2.5) следует, что с некоторой постоянной $d_3 > 0$

$$I \leq d_3 \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|D^\alpha[u(x)\psi(x_1)]g^{|\alpha|}(x_2)\|_{L_2(\Omega_\delta)}. \quad (2.6)$$

Если иметь в виду, что $\text{mes}\Omega_\delta \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$ и по условию леммы $u \in H_{g,loc}(\mathfrak{R}, \Omega)$, следовательно, в силу замечания 2.1 $D^\alpha[u(x)\psi(x_1)]g^{|\alpha|}(x_2) \in L_2(\Omega)$ для всех $\alpha \in \mathfrak{R}$, и правая часть неравенства (2.6) стремится к нулю при $\delta \rightarrow +0$. По определению класса $H(\mathfrak{R}, \Omega)$ это значит, что при $\delta \rightarrow +0$

$$I \equiv \|u(x)\psi(x_1)g^m(x_2)[1 - \varphi_\delta(x_2)]\|_{H(\mathfrak{R}, \Omega)} \rightarrow 0. \quad (2.7)$$

Покажем, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует функция $\Phi_\varepsilon \in C_0^\infty$ такая, что

$$\|u(x)\psi(x_1)g^m(x_2)\varphi_\delta(x_2) - \Phi_\varepsilon(x)\|_{H(\mathfrak{R}, \Omega)} < \varepsilon. \quad (2.8)$$

Для фиксированных u и ψ через $\tilde{u} \cdot \tilde{\psi}$ обозначим продолжение нулём функции $u \cdot \psi$ вне Ω . Если таким образом функцию $u \cdot \psi$ доопределить на все пространство E^2 , то функция $u \cdot \psi \cdot g^m \cdot \varphi_\delta$ также будет доопределена нулём на E^2 . Далее, не оговаривая это каждый раз, будем считать, что рассмотренные функции продолжены нулём вне Ω , причем мы опустим в обозначениях знак продолжения.

Пусть $\text{supp}\psi \subset [-a + \Delta, a - \Delta]$; $\Delta > 0$ и (см. предложение 2.2) $\text{supp}\varphi_\delta \subset [-1 + \delta/4, 1 - \delta/4]$. Тогда

$$\text{supp}(u\psi g^m \varphi_\delta) \subset [-a + \Delta, a - \Delta]X[-1 + \delta/4, 1 - \delta/4].$$

Пусть $S_1 = \{x \in E^2, |x| < 1\}$ открытый круг в E^2 , $0 \leq \omega \in C_0^\infty(S_1)$, $\int \omega(x) dx = 1$, $h > 0$ и $\omega_h(x) = h^{-2} \omega(x/h)$. Тогда (см. [23])

$$\text{supp}[u \psi g^m \varphi_\delta * \omega_h] \subset \text{supp}(u \psi g^m \varphi_\delta) + \text{supp} \omega_h.$$

Положим $h_0 = \min\{\Delta, \delta/4\}$. Тогда при $0 < h \leq h_0$

$$\text{supp}[u \psi g^m \varphi_\delta * \omega_h] \subset \text{supp}(u \psi g^m \varphi_\delta) + \text{supp} \omega_h \subset \Omega. \quad (2.9)$$

Так как (см. [22], Главу 2, или [23], Главу 3) $[u \psi g^m \varphi_\delta] * \omega_h \in C^\infty$, то в силу (2.9)

$$[u \psi g^m \varphi_\delta] * \omega_h \in C_0^\infty(\Omega). \quad (2.10)$$

Применим неравенство Минковского и свойства функции ω для оценки следующей разности

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \|D^\alpha [u \psi g^m \varphi_\delta * \omega_h] - D^\alpha [u \psi g^m \varphi_\delta]\|_{L_2(\Omega)} = \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \left\| \int_{|y| < h} \{D^\alpha [u \psi g^m \varphi_\delta](x-y) - D^\alpha [u \psi g^m \varphi_\delta](x)\} \omega_h(y) dy \right\|_{L_2(\Omega)} \leq \\ & \leq \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \sup_{|y| < h} \|D^\alpha [u \psi g^m \varphi_\delta](\cdot - y)\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|\omega_h\|_{L_1(\Omega)} = \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \sup_{|y| < h} \|D^\alpha [u \psi g^m \varphi_\delta](\cdot - y)\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

В силу непрерывности в среднем функций из L_2 отсюда следует, что при $h \rightarrow 0$

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \|D^\alpha [u \psi g^m \varphi_\delta * \omega_h] - D^\alpha [u \psi g^m \varphi_\delta]\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0. \quad (2.12)$$

Для $h \in (0, h_0)$ положим

$$\Phi_h(x) = u(x) \psi(x_1) g^m(x_2) \varphi_\delta(x_2) * \omega_h(x),$$

тогда

$$\begin{aligned} \|u \psi g^m - \Phi_h\| &= \|u \psi g^m (1 - \varphi_\delta) + u \psi g^m \varphi_\delta - \Phi_h\|_{H(\mathbb{R}, \Omega)} \leq \\ &\leq \|u \psi g^m (1 - \varphi_\delta)\|_{H(\mathbb{R}, \Omega)} + \|u \psi g^m \varphi_\delta - \Phi_h\|_{H(\mathbb{R}, \Omega)}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

В силу (2.7) число $\delta_0 > 0$ можно выбрать так, что при $\delta \leq \delta_0$

$$\|u \psi g^m (1 - \varphi_\delta)\|_{H(\mathbb{R}, \Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.14)$$

В силу (2.12) для данного δ_0 число $h \in (0, h_0)$ можно выбрать так, чтобы

$$\|u \psi g^m \varphi_\delta - \Phi_h\|_{H(\mathbb{R}, \Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.15)$$

Из соотношений (2.13) - (2.15) следует (2.8), что и доказывает лемму 2.1. $\square$

Лемма 2.2. В пространстве $H_g = H_g(\mathfrak{R}, \Omega)$ можно ввести норму

$$\|u\|'_{H_g} = \|u\|'_{H_g(\mathfrak{R}, \Omega)} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|D^\alpha [u g^{|\alpha|}]\|_{L_2(\Omega)}, \quad (2.16)$$

эквивалентную исходной норме (2.2).

Доказательство. Мы должны доказать существование числа $C > 0$ такого, что

$$\begin{aligned} C^{-1} \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|(D^\alpha u) g^{|\alpha|}\|_{L_2(\Omega)} &\leq \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|D^\alpha [u g^{|\alpha|}]\|_{L_2(\Omega)} \leq \\ &\leq C \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|(D^\alpha u) g^{|\alpha|}\|_{L_2(\Omega)} \quad \forall u \in H_g(\mathfrak{R}, \Omega). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Пусть $\alpha \in \mathfrak{R}$. Воспользуемся свойством 3) функции g с заменой m на α_2 и k на β_2 ($0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2$) (см. Предложение 2.1). Применяя формулу Лейбница, получим с некоторой постоянной $C_1 > 0$ для всех $u \in H_g(\mathfrak{R}, \Omega)$ (при этом, в обозначениях нормы мы опустим индекс $L_2(\Omega)$)

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|D^\alpha [u g^{|\alpha|}]\|_{L_2(\Omega)} &= \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \left\| \sum_{\beta_2 \leq \alpha_2} C_{\alpha_2}^{\beta_2} [D^{\alpha - (0, \beta_2)} u] [D_2^{\beta_2} g^{|\alpha|}] \right\| \leq \\ &\leq \sigma \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \sum_{\beta_2 \leq \alpha_2} C_{\alpha_2}^{\beta_2} \| [D^{\alpha - (0, \beta_2)} u] g^{|\alpha| - \beta_2} \| \leq C_1 \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \| (D^\alpha u) g^{|\alpha|} \|, \end{aligned}$$

что доказывает правую часть (2.17).

Для доказательства левой части (2.17) покажем по индукции по j , что для любого мультииндекса $\alpha \in \mathfrak{R}$ $(D_1^{\alpha_1} D_2^j u(x)) g^{\alpha_1 + j}(x_2) \in L_2(\Omega)$, $j = 0, 1, \dots, \alpha_2$ в предположении, что выражение $\|u\|'$ в (2.16) ограничено. При $j = 0$, $[D_1^{\alpha_1} u(x)] g^{\alpha_1}(x_2) = D_1^{\alpha_1} [u(x) g^{\alpha_1}(x_2)] \in L_2(\Omega)$. Пусть теперь

$$(D_1^{\alpha_1} D_2^j u(x)) g^{\alpha_1 + j}(x_2) \in L_2(\Omega), \quad j = 0, 1, \dots, r \leq \alpha_2 - 1, \quad (2.18)$$

покажем, что

$$[D_1^{\alpha_1} D_2^{r+1} u(x)] g^{\alpha_1 + r+1}(x_2) \in L_2(\Omega).$$

Так как при $\alpha \in \mathfrak{R}$ и $r \leq \alpha_2 - 1$ в силу ограниченности $\|u\|'$

$$D_1^{\alpha_1} D_2^{r+1} [u(x) g^{\alpha_1 + r+1}(x_2)] \in L_2(\Omega), \quad (2.19)$$

то применяя формулу Лейбница и соотношения (2.18), (2.19) получаем

$$\begin{aligned} [D_1^{\alpha_1} D_2^{r+1} u(x)] g^{\alpha_1 + r+1}(x_2) &= D_1^{\alpha_1} D_2^{r+1} [u(x) g^{\alpha_1 + r+1}(x_2)] - \\ &- \sum_{k=1}^{r+1} C_{r+1}^k [D_1^{\alpha_1} D_2^{r+1-k} u(x)] D_2^k g^{\alpha_1 + r+1}(x_2) \in L_2(\Omega). \end{aligned} \quad (2.20)$$

ВЫДЕЛЕНИЕ ГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА

В силу произвольности $(\alpha_1, j) \in \mathfrak{R}$ это показывает, что $u \in H_g(\mathfrak{R}, \Omega)$, при этом

$$\|(D^\alpha u) g^{|\alpha|}\| \leq C_2 \sum_{j=0}^{\alpha_2} \|D_1^{\alpha_1} D_2^j [u g^{\alpha_1+j}]\| \leq C_2 \sum_{\beta \in \mathfrak{R}} \|D^\beta [u g^{|\beta|}]\|$$

с некоторой постоянной $C_2 = C_2(\alpha) > 0$, не зависящей от u . Так как число мультииндексов $\alpha \in \mathfrak{R}$ ограничено, то отсюда следует левая часть неравенства (2.18). Лемма 2.2 доказана. $\square$

3. ВЫДЕЛЕНИЕ ГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ

Пусть прямоугольник $\Omega = \Omega(a, 1)$, правильный четырёхугольник $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(l, m)$, весовая функция g , весовое пространство $H_g(\mathfrak{R}, \Omega)$ и локальное пространство $H_{g,loc}(\mathfrak{R}, \Omega)$ определены как и выше.

Для $j = -1, 0, 1, 2, \dots$ положим $\mathfrak{R}_j = \{\nu \in N_0^2, \nu_1 \leq l, |\nu| = \nu_1 + \nu_2 \leq m + j\}$. $\mathfrak{R}_j$ - правильный четырёхугольник в R_+^2 с вершинами $(0, 0)$, $(l, 0)$, $(l, m - l + j)$, $(0, m + j)$ из N_0^2 , при этом $\mathfrak{R}_{-1} = \{\nu \in N_0^2, \nu_1 \leq l, |\nu| \leq m - 1\}$, $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_j \subset \mathfrak{R}_{j+1}$, $j = -1, 0, 1, 2, \dots$

Следующая лемма нам понадобится для доказательства основного результата.

Лемма 3.1. Пусть $Q(D) = Q(D_1, D_2)$ - линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами и с четырёхугольником Ньютона $\mathfrak{R}(Q) \subset \mathfrak{R}_j$ для некоторого $j \in N_0$. Если $u \in H_{g,loc}(\mathfrak{R}_{j-1}, \Omega)$, $[Q(D)u] g^{m+j} \in L_2(\Omega(a', 1))$ для любого $a' \in (0, a)$, то для каждой $\psi \in C_0^\infty(-a, a)$

$$Q(D)[u(x) \psi(x_1) g^{m+j}(x_2)] \in L_2(E^2). \quad (3.1)$$

Доказательство. Сначала покажем, что оператор $Q(D)$ как оператор обобщенного дифференцирования можно применить к функции $u \cdot \psi \cdot g^{m+j}$, затем покажем, что результат такого применения принадлежит $L_2(\Omega)$. При этом отметим, что в (3.1) функция $u \cdot \psi \cdot g^{m+j}$ продолжена нулем вне Ω .

Ниже для оператора $Q(D)$ и мультииндекса $\beta \in N_0^2$ оператор $Q^{(\beta)}(D)$ - дифференциальный оператор, отвечающий символу (характеристическому многочлену) $Q^{(\beta)}(\xi) \equiv D^\beta Q(\xi)$, при этом $Q^{(0,0)}(\xi) = Q(\xi)$, и $Q^{(\beta)}(\xi) \equiv 0$ при $|\beta| > m + j$. Заметим, что если $\mathfrak{R}(Q) \subset \mathfrak{R}_j$, то из правильности $\mathfrak{R}_j$ следует, что $\mathfrak{R}(Q^{(\beta)}) \subset \mathfrak{R}_{j-1}$ при $|\beta| \neq 0$.

Чтобы показать, что оператор $Q(D)$ как оператор обобщенного дифференцирования можно применить к функции $u \psi g^{m+j}$, следует показать, что выражение

$$I(\varphi) \equiv |(u(x) \psi(x_1) g^{m+j}(x_2), Q(-D)\varphi(x))|$$

ограничено (постоянной, зависящей от φ) для каждой (пробной) функции $\varphi \in C_0^\infty(E^2)$.

Итак, пусть $\varphi \in C_0^\infty(E^2)$. Применяя формулу Лейбница для оператора $Q(D)$, неравенство Коши - Буняковского, и формулу интегрирования по частям, получаем

$$\begin{aligned} I(\varphi) &= |(u, \psi g^{m+j} Q(-D)\varphi)| = |(u, Q(-D)[\varphi \psi g^{m+j}]) - \\ &\quad - \sum_{|\beta| > 0} \frac{1}{\beta!} (u, [Q^{(\beta)}(-D)\varphi] (-D)^\beta [\psi g^{m+j}])| = \\ &= |(u, Q(-D)[\varphi \psi g^{m+j}]) - \sum_{|\beta| > 0} \frac{1}{\beta!} (u (-D)^\beta [\psi g^{m+j}], [Q^{(\beta)}(-D)\varphi])| \leq \\ &\leq |(Q(D)u, \varphi \psi g^{m+j})| + \sum_{|\beta| > 0} \frac{1}{\beta!} |(Q^{(\beta)}(D)[u (-D)^\beta (\psi g^{m+j})], \varphi)| \equiv \\ &\equiv A + \sum_{|\beta| > 0} \frac{1}{\beta!} B_\beta. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Оценим каждое слагаемое правой части (3.2). Имеем

$$A \equiv |(Q(D)u, \varphi \psi g^{m+j})| = |([Q(D)u g^{m+j}] \psi, \varphi)|$$

Так как по условию леммы $Q(D)u g^{m+j} \in L_2(\Omega(a', 1))$ для любого $a' \in (0, a)$ и $\psi \in C_0^\infty(-a, a)$, то $[Q(D)u g^{m+j}] \psi \in L_2(\Omega) = L_2(\Omega(a, 1))$. Поэтому, применяя неравенство Коши - Буняковского, получим

$$A \leq \|Q(D)u g^{m+j} \psi\|_{L_2(\Omega)} \|\varphi\|_{L_2(\Omega)} < \infty. \quad (3.3)$$

Применив формулу Лейбница для оператора $Q^{(\beta)}(D)$, для слагаемых B_β ; $|\beta| > 0$ имеем

$$\begin{aligned} B_\beta &\equiv |(Q^{(\beta)}(D)[u (-D)^\beta (\psi g^{m+j})], \varphi)| = \\ &= \sum_{\gamma \geq 0} \frac{1}{\gamma!} |([Q^{(\beta+\gamma)}(D)u] (D)^{\beta+\gamma} [\psi g^{m+j}], \varphi)|. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Так как $D^\alpha Q(\xi) \equiv 0$ при $|\alpha| > m+j$, то в правой части (3.2) сумма распространяется по мультииндексам β $|\beta| \leq m+j$, а в правой части (3.4) по мультииндексам

$\gamma \quad |\gamma| \leq m + j$. Поэтому из (3.4) имеем с некоторой постоянной $C_1 > 0$

$$B_\beta \leq C_1 \sum_{0 < |\beta| \leq m+j} |([Q^{(\beta)}(D)u] (D)^\beta [\psi g^{m+j}], \varphi)|. \quad (3.5)$$

Покажем, что при $\beta \in N_0^2$; $0 < |\beta| \leq m + j$

$$[Q^{(\beta)}(D)u] (D)^\beta [\psi g^{m+j}] \in L_2(\Omega). \quad (3.6)$$

Сначала отметим, что с некоторой постоянной $C_2 > 0$ имеем

$$|Q^{(\beta)}(D)u(x)| \leq C_2 \sum_{\alpha \in (Q), \alpha \geq \beta} |D^{(\alpha-\beta)}u(x)| \quad \forall x \in E^2.$$

Далее, так как $\psi \in C_0^\infty(-a, a)$, а функция g удовлетворяет свойству 3) предложения 2.1, то с некоторой постоянной $C_3 > 0$

$$|D^\beta [\psi(x_1) g^{m+j}(x_2)]| = |D_1^{\beta_1} \psi(x_1) D_2^{\beta_2} g^{m+j}(x_2)| \leq C_3 g^{m+j-\beta_2}(x_2) \quad \forall x \in E^2.$$

Из последних двух соотношений при $\beta \in N_0^2$; $0 < |\beta| \leq m + j$ получаем с некоторой постоянной $C_4 = C_4(\beta) > 0$

$$||[Q^{(\beta)}(D)u] D^\beta [\psi g^{m+j}]||_{L_2(\Omega)} \leq C_4 \sum_{\alpha \in (Q), \alpha \geq \beta} ||(D^{\alpha-\beta}u) g^{m+j-\beta_2}||_{L_2(\Omega(a',1))},$$

где $a' = a'(\psi) \in (0, a)$, $\text{supp } \psi \subset [-a', a']$.

Так как $g(t) \leq 1$ при $t \in E^1$ и $|\alpha - \beta| \leq m + j - \beta_2$, то

$$\begin{aligned} & ||[Q^{(\beta)}(D)u] D^\beta [\psi g^{m+j}]||_{L_2(\Omega)} \leq \\ & \leq C_4 \sum_{\alpha \in (Q), \alpha \geq \beta} ||(D^{\alpha-\beta}u) g^{|\alpha-\beta|}||_{L_2(\Omega(a',1))}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Покажем, что $\alpha - \beta \in \mathfrak{R}_{j-1}$ при $\alpha \in (Q)$; $0 \neq \beta \leq \alpha$, т.е. покажем, что $\alpha_1 - \beta_1 \leq l$ и $(\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) \leq m + j - 1$. Пусть сначала $\beta_1 = 0$, тогда $\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_1 \leq l$ по определению множества $\mathfrak{R}_j$ и так как $\beta_2 \geq 1$, то $\alpha_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \leq m + j - \beta_2 \leq m + j - 1$. Пусть $\beta_1 \neq 0$. Так как $\alpha \in (Q) \subset \mathfrak{R}_j$, то $\alpha_1 + \alpha_2 \leq m + j$, поэтому $(\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2) \leq m + j - 1$.

Отсюда, из условия $u \in H_{g,loc}(\mathfrak{R}_{j-1}, \Omega)$ леммы и из (3.7) следует (3.6). Тогда применяя к правой части (3.5) неравенство Коши - Буняковского, из соотношений (3.2), (3.3), (3.5) получим ограниченность выражения $I(\varphi)$ для каждой (пробной) функции $\varphi \in C_0^\infty(E^2)$. Это значит, что оператор $Q(D)$ как оператор

обобщенного дифференцирования можно применить к функции $u \cdot \psi \cdot g^{m+j}$, при этом с некоторой постоянной $C_5 = C_5(u) > 0$

$$I(\varphi) \leq C_5 \|\varphi\|_{L_2(E^2)} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(E^2). \quad (3.8)$$

Для завершения доказательства леммы рассмотрим линейный функционал

$$I(\varphi) = (u(x) \psi(x_1) g^{m+j}(x_2), Q(-D)\varphi(x))$$

на $C_0^\infty(E^2)$. Оценка (3.8) показывает, что функционал $I(\varphi)$ ограничен в $C_0^\infty(E^2)$. Так как множество $C_0^\infty(E^2)$ плотно в $L_2(E^2)$, то по теореме Хана-Банаха функционал I можно продолжить на L_2 с сохранением нормы, т.е.

$$|I(\varphi)| \leq C_5 \|\varphi\|_{L_2(E^2)} \quad \forall \varphi \in L_2(E^2).$$

По теореме Рисса существует функция $\Phi \in L_2$ такая, что

$$I(\varphi) = (\Phi, \varphi) \quad \forall \varphi \in L_2.$$

Так как для всех $\varphi \in C_0^\infty$

$$(\Phi, \varphi) = (u(x) \psi(x_1) g^{m+j}(x_2), Q(-D)\varphi(x)),$$

то по определению обобщенной производной

$$Q(D)(u \psi g^{m+j}) = \Phi \in L_2(E^2).$$

Этим Лемма 3.1 доказана. □

Положим

$$N(P) = N(P, \mathfrak{R}, g, \Omega) = \{u \in H_{g, loc}(\mathfrak{R}_{-1}, \Omega);$$

$$D_2^j[P(D)u] g^{m+j} \in L_2(a', 1) \quad \forall j \in N_0, \quad \forall a' \in (0, a)\}.$$

Из нижеприводимой леммы непосредственно следует основной результат настоящей заметки.

Лемма 3.2. Пусть $P(D)$ – регулярный оператор с правильным четырехугольником Ньютона $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P) = \{\nu \in N_0^2 \mid \nu_1 \leq l, |\nu| \leq m, \quad l < m\}$. Тогда

$$N(P, \mathfrak{R}, g, \Omega) \subset \bigcap_{j=0}^{\infty} H_{g, loc}(\mathfrak{R}_j, \Omega).$$

Доказательство. Проведем по индукции по j . Пусть $j = 0$ и $u \in N(P)$. Докажем, что

$$u \in H_{g, loc}(\mathfrak{R}_0, \Omega) \equiv H_{g, loc}(\mathfrak{R}, \Omega). \quad (3.9)$$

Так как по определению множества $\mathfrak{R}(P)$, $u \in H_{g, loc}(\mathfrak{R}_{-1}, \Omega)$, то для доказательства (3.9) достаточно доказать, что для мультииндексов $\alpha \in \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{R}_{-1}$ т.е. для мультииндексов $\{\alpha \in \mathfrak{R}, |\alpha| = m\}$

$$(D^\alpha u) \psi g^{|\alpha|} \in L_2(\Omega(a', 1)) \quad \forall a' \in (0, a). \quad (3.10)$$

Сначала отметим, что при $j = 0$ и $Q(D) = P(D)$ условия леммы 3.1 эквивалентны условию $u \in N(P)$. Поэтому, применяя лемму 3.1 к оператору $Q(D) = P(D)$, получим

$$P(D)[u \cdot \psi \cdot g^m] \in L_2(E^2) \quad \forall \psi \in C_0^\infty(-a, a), \quad (3.11)$$

а из определения множества $N(P)$ следует, что

$$u \psi g^m \in L_2(E^2) \quad \forall \psi \in C_0^\infty(-a, a). \quad (3.12)$$

Далее символ $P(\xi)$ регулярного оператора $P(D)$ удовлетворяет неравенству (1.3). Поэтому из равенства Парсеваля, неравенства (1.3) и соотношений (3.11), (3.12) получим для любых $\{\alpha \in \mathfrak{R}, |\alpha| = m\}$ и $\psi \in C_0^\infty(-a, a)$

$$\begin{aligned} \|\xi^\alpha F[u \psi g^m]\|_{L_2(R^2)} &\leq C\{\|P(\xi) \cdot F[u \psi g^m]\|_{L_2(R^2)} + \|F[u \psi g^m]\|_{L_2(R^2)}\} = \\ &= C\{\|P(D)[u \psi g^m]\|_{L_2(E^2)} + \|u \psi g^m\|_{L_2(E^2)}\} < \infty, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $F(f)$ – преобразование Фурье функции $f \in L_2(E^2)$. Это в силу равенства Парсеваля означает, что

$$\sum_{\alpha \in \mathfrak{R}, |\alpha| = m} \|D^\alpha [u \psi g^m]\|_{L_2(E^2)} < \infty \quad \forall \psi \in C_0^\infty(-a, a). \quad (3.14)$$

Из принадлежности u к $H_{g, loc}(\mathfrak{R}_{-1}, \Omega)$ и из Леммы 2.2 следует, что

$$\sum_{\alpha \in \mathfrak{R}, |\alpha| = m-1} \|D^\alpha [u \psi g^m]\|_{L_2(E^2)} < \infty \quad \forall \psi \in C_0^\infty(-a, a). \quad (3.15)$$

Из (3.14), (3.15) в силу Леммы 2.2 и произвольности ψ следует (3.10), т.е. $N(P) \subset H_{g, loc}(\mathfrak{R}_0, \Omega)$.

Теперь докажем, что если $N(P) \subset H_{g, loc}(\mathfrak{R}_j, \Omega)$ для всех $j = 0, 1, \dots, r$, то $N(P) \subset H_{g, loc}(\mathfrak{R}_{r+1}, \Omega)$.

Пусть $u \in N(P)$, докажем, что $u \in H_{g,loc}(\mathfrak{R}_{r+1}, \Omega)$. Сначала отметим, что из регулярности оператора $P(D)$ следует (см. неравенство (1.3)), что для любого мультииндекса $\alpha \in \mathfrak{R}$ и для любого $j \in N_0$

$$|\xi_2^j \xi^\alpha| \leq C [|\xi_2^j P(\xi)| + |\xi_2^j|] \quad \forall \xi \in R^2.$$

С другой стороны, так как $m > 1$, то $(0, r+1) = (0, m+r-(m-1)) \in \mathfrak{R}_r$. Поэтому еще раз применяя равенство Парсеваля и Лемму 3.1 для оператора $Q(D) = D_2^{r+1}P(D)$, имеем для любого мультииндекса $\alpha \in \mathfrak{R}$

$$\begin{aligned} & \|\xi_2^{r+1} \cdot \xi^\alpha F[u \psi g^{m+r+1}]\|_{L_2(R^2)} \leq \\ & \leq C \{ \|\xi_2^{r+1} P(\xi) \cdot F[u \psi g^{m+r+1}]\|_{L_2(R^2)} + \|\xi_2^{r+1} F[u \psi g^{m+r+1}]\|_{L_2(R^2)} \} = \\ & = C \cdot \{ \|D_2^{r+1}P(D)[u \psi g^{m+r+1}]\|_{L_2(E^2)} + \|D_2^{r+1}[u \psi g^{m+r+1}]\|_{L_2(E^2)} \} < \infty. \end{aligned}$$

Отсюда и из равенства Парсеваля следует, что

$$D_2^{r+1}D^\beta[u \psi g^{m+r+1}] \in L_2(E^2) \quad \forall \beta \in \mathfrak{R}. \quad (3.16)$$

Так как по предположению индукции и леммы 2.2

$$D^\beta[u \psi g^{|\beta|}] \in L_2(\Omega) \quad \forall \beta \in \mathfrak{R}_r \quad (3.17)$$

при всех $\psi \in C_0^\infty(-a, a)$, то в силу леммы 3.1 и замечания 2.1 из (3.16), (3.17) следует, что $u \in H_{g,loc}(\mathfrak{R}_{r+1}, \Omega)$. Лемма 3.2 доказана. $\square$

Пусть $x \in \Omega = \Omega(a, 1)$, функция $f(x) = f(x_1, x_2)$ имеет непрерывные частные производные любого порядка по переменной x_2 и

$$D_2^j f g^{m+j} \in L_2(\Omega(a', 1)) \quad \forall j \in N_0, \quad \forall a' \in (0, a). \quad (3.18)$$

Следующее предложение является основным результатом настоящей заметки.

Теорема 3.1. Пусть $P(D)$ – регулярный оператор с правильным четырехугольником Ньютона $\mathfrak{R}$ а функция f удовлетворяет условиям (3.18) в прямоугольнике Ω . Тогда любое обобщенное решение $u \in H_{g,loc}(\mathfrak{R}_{-1}, \Omega)$ уравнения (1.2) является бесконечно дифференцируемой по второй переменной функцией.

Доказательство. Для области $G \subset E^2$ и $j = 0, 1, \dots$ через $C^{(0,j)}(G)$ обозначим множество функций $\{u(x) = u(x_1, x_2)\}$ непрерывных и имеющих непрерывные производные в G по переменной x_2 до j -того порядка включительно.

Пусть, как и выше, (натуральные) числа l и m определяют четырехугольник $\mathfrak{R}$. Обозначим через $\mathfrak{S}(l, m + j)$ $j = 0, 1, \dots$ множество мультииндексов $\alpha \in N_0^2$ таких, что $\alpha_1/l + \alpha_2/(m + j) \leq 1$. Для каждого $j = 0, 1, \dots$ это (неравнобедренный) прямоугольный треугольник в R_+^2 с вершинами из N_0^2 . Через $W_2^{l, m+j}(G)$ обозначим анизотропное пространство Соболева - множество функций $u \in L_2(G)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{W_2^{l, m+j}(G)} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{S}(l, m+j)} \|D^\alpha u\|_{L_2(G)} \quad j = 0, 1, \dots$$

Очевидно, что для каждого $j = 0, 1, \dots$, $\mathfrak{S}(l, m + j) \subset \mathfrak{R}_j(l, m)$, при этом, если $G = \Omega(a, 1)$, то $H(\mathfrak{R}_j, \Omega) \subset W_2^{l, m+j}(\Omega)$.

Пусть $u \in H_{g, loc}(\mathfrak{R}_{-1}, \Omega)$ обобщенное решение уравнения (1.4). Тогда по условиям (3.18) теоремы $u \in N(P)$ и по лемме 3.2 $u \in H_{g, loc}(\mathfrak{R}_j, \Omega)$ для любого $j \in N_0$. Покажем, что для любых фиксированных чисел $a' \in (0, a)$ и $b \in (0, 1)$, $u \in \bigcap_j H(\mathfrak{R}_j, \Omega(a', b))$. В самом деле, так как при $b \in (0, 1)$ и $|t| \leq b$, $g(t) \geq 1 - b^2 > 0$, то для любого мультииндекса $\alpha \in \bigcup_j \mathfrak{R}_j$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(a', b)} |D^\alpha u(x)|^2 dx &\leq \frac{1}{(1 - b^2)^{|\alpha|}} \int_{\Omega(a', b)} |D^\alpha u(x)|^2 g^{2|\alpha|}(x_2) dx \leq \\ &\leq \frac{1}{(1 - b^2)^{|\alpha|}} \int_{\Omega(a', 1)} |D^\alpha u(x)|^2 g^{2|\alpha|}(x_2) dx < \infty, \end{aligned}$$

т.е. $u \in \bigcap_j H(\mathfrak{R}_j, \Omega(a', b))$.

Так как $\mathfrak{S}(l, m + j) \subset \mathfrak{R}_j(l, m)$ для каждого $j = 0, 1, \dots$, то отсюда следует, что $u \in \bigcap_j W_2^{l, m+j}(\Omega(a', b))$. Применяя здесь теорему 10.4 монографии [22] о вложении анизотропных пространств $W_2^{l, m+j}(\Omega)$, $j = 0, 1, \dots$ в пространство непрерывных функций, получим, что $u \in \bigcap_j C^{(0, j)}(\Omega)$. Теорема доказана. $\square$

Abstract. A linear differential operator $P(D)$ with constant coefficients is said to be *regular or nondegenerating*, if all monomials $\{\xi^\alpha\}$ of the characteristic polynomial $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2)$, i.e. of the complete symbol of the operator $P(D)$ are estimated by $P(\xi)$. This work is devoted to the study of two-dimensional, regular, almost hypoelliptic operators $P(D) = P(D_1, D_2)$ with regular Newton polyhedrons. It is proved that all generalized (weak) solutions of the equation $P(D)u = f$ from a

several weighted Sobolev space are infinitely differentiable functions in the rectangle $\{x \in E^2 : -a < x_1 < a, -b < x_2 < b\}$ in the variable x_2 , in which the function f is infinitely differentiable.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. Г. Петровский, "Sur l'analyticite des solutions des systems d'equations differentielles", *Мат. Сборник*, **5**, (47), 3 – 70 (1937).
- [2] S. N. Bernstein, "Sur la nature analytique des solutions des equations aux derivees partielles du second ordre", *Mat. Ann.* **59**, 20 – 76 (1904).
- [3] H. Weyl, "The method of orthogonal projection in potential theory" *Duke Math. J.* **7**, 411 – 444 (1940).
- [4] L. Schwartz, *Theorie des Distributions*, **2**, Hermann, Paris (1951).
- [5] F. John, *Plane Waves and Spherical Means to Partial Differential Equations*, New York (1955).
- [6] K. Friedrichs, "On the differentiability of the solutions of linear elliptic differential equations", *Comm. Pure Appl. Math.* **6**, 299 – 326 (1953).
- [7] P. D. Lax, "On Cauchy's problem for hiperbolic equations and the differentiability of solutions of elliptic equations", *Comm. Pure Appl. Math.* **8**, 615 – 633 (1955).
- [8] L. Nirenberg, "Remarks on strongly elliptic partial differential equations". *Comm. Pure Appl. Math.* **8**, 89 – 105 (1955).
- [9] L. Hörmander, "On the theory of general partial differential operators", *Acta Math.* **94**, 161 – 248 (1955).
- [10] L. Hörmander, *The Analysis of linear Partial Differential Operators*, **2**, Springer - Verlag (1983).
- [11] L. Gårding, B. Malgrange, "Operateurs differentiels partiellement hypoelliptiques", *Rend. Acad. Sci. (Paris)*, **247**, no. 23, 2083 – 2085 (1958).
- [12] L. Ehrenpreis, "Solutions of some problems of division. 4", *Amer. J. Math.* **82**, 522 – 588 (1960).
- [13] С. М. Никольский, "Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения", *ДАН СССР*, **144**, no. 4, 767 – 769 (1962).
- [14] Я. С. Бугров, "Теоремы вложения для некоторых функциональных классов", *Труды МИАН СССР*, **77**, стр. 45 – 64 (1965).
- [15] В. И. Буренков, "Аналог теоремы Л. Хермандера о гипоеллиптичности для функций, стремящихся к нулю на бесконечности", *Сб. докладов 7-го Советско - Чехословацкого семинара*, Ереван, 63 – 67 (1982).
- [16] G. G. Kazaryan, "On almost hypoelliptic polynomials", *Doklady Ross. Acad. Nauk.*, **398**, no. 6, 701 – 703 (2004).
- [17] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Об одном классе почти гипоеллиптических операторов", *Изв. НАН Армении, сер. Математика*, **41**, no. 6, 39 – 56 (2006).
- [18] В. Н. Маргарян, Г. Г. Казарян, "О гладкости решений одного класса почти гипоеллиптических уравнений", *Изв. НАН Армении, сер. Математика*, **43**, no. 3, 39 – 64 (2008).
- [19] В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", *Труды МИАН СССР*, **91**, 59 – 81 (1967).
- [20] S. Gindikin and L. R. Volevich, *The Method of Newton's Polyhedron in Theory of Partial Differential Equations*, Kluwer, Academic Publishers, London (1992).
- [21] Г. Г. Казарян, "О гипоеллиптических полиномах", *ДАН СССР*, **124**, no. 5, 1018 – 1020 (1974).
- [22] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*. Москва, Наука (1996).
- [23] H. Bremermann, *Distributions, Complex Variables and Fourier Transforms*. University of California, Berkeley, Massachusetts (1965).

Поступила 1 декабря 2010