

КОММУТАТИВНЫЕ МЕДИАЛЬНЫЕ ТЕРНАРНЫЕ ГРУППОИДЫ

С. С. ДАВИДОВ

Ереванский государственный университет

E-mail: *davidov@ysu.am*

Аннотация. В статье изучаются коммутативные медиальные тернарные группоиды. Вводится понятие тернарного полутерма, доказывается разрешимость эквациональной теории коммутативных медиальных тернарных группоидов, а именно, приводится алгоритм, с помощью которого решается вопрос о выполнимости тождества $u = v$ в многообразии коммутативных медиальных тернарных группоидов. Используя приведенный алгоритм, описывается строение свободного коммутативного медиального тернарного группоида, доказывается, что коммутативный медиальный тернарный группоид имеет выпуклое линейное представление.

MSC2010 number: 03C05, 08A30, 08A62, 08A35.

Ключевые слова: Тернарный группоид, коммутативный медиальный группоид, разрешимая теория, свободный группоид, линейное представление.

1. ВВЕДЕНИЕ

Развитие алгебраической теории n -арных систем началось с выхода работы В. Дернте [1] по n -арным группам, которая была выполнена под руководством Эмми Нетер. В 40-х годах XX века появились две работы по n -арным группам, которые сыграли основополагающую роль в дальнейшем развитии теории n -арных алгебраических систем – это капитальная работа Поста [2] и богатая идеями работа С. А. Чунихина [3].

Алгебраические n -арные системы имеют применения в различных областях математики – так, с помощью n -арных квазигрупп ($n > 2$) В. Д. Белоусовым и А. С. Бектеновым дано описание пространственных сетей ([4, 5]), а А. А. Гварамия [6] получил глубокие результаты по автоматам; n -арные группы нашли отражение в геометрии и полиадических автоматах. Такие системы существенно используются в теории многозначных логик, кибернетике, общей теории систем ([7], [8]).

Изучению алгебраических систем с одной операцией арности больше, чем два посвящены многие исследования (например [9–13]).

Условимся тернарные операции определенные на множестве Q обозначать скобками: (xyz) или $[xyz]$, где $x, y, z \in Q$.

Алгебра $(A; \Omega)$ называется медиальной (абелевой, энтропийной), если она удовлетворяет сверхтождеству медиальности:

$$f(g(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, g(x_{m1}, \dots, x_{mn})) = g(f(x_{11}, \dots, x_{m1}), \dots, f(x_{n1}, \dots, x_{nm})),$$

где $f, g \in \Omega$. В частности тернарный группоид называется медиальным, если он удовлетворяет тождеству:

$$((xyz)(uvw)(pqr)) = ((xip)(yvp)(zwr)).$$

Медиальные системы изучались разными авторами (Сад, Стейн, Тойода, Брак, Медоч, Белоусов, Курош, Смит, Романовска, Кепка, Ежек, Мовсисян и др.) [14–20], они связаны с понятием энтропии в теории информации [20] и находят приложения в кибернетике, экономике, физике и биологии.

В работах Ежека и Кепки [14–16] изучаются бинарные медиальные группоиды, в частности, доказывается разрешимость эквациональной теории бинарных коммутативных медиальных группоидов, описывается строение свободного бинарного коммутативного медиального группоида и доказано существование выпуклого линейного представления для коммутативных медиальных бинарных группоидов. В настоящей работе, с использованием метода работ [14–16], аналогичные результаты получены для тернарных медиальных группоидов.

2. ТЕРНАРНЫЕ ТЕРМЫ И ПОЛУТЕРМЫ

В этом параграфе, следуя [15] (Глава I) вводим понятие тернарного полутерма и исследуем некоторые его свойства.

Зафиксируем три символа $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, которые в дальнейшем рассматриваются как унарные символы операций. Свободный моноид над множеством $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ обозначим через E . Каждый элемент $e \in E$ может быть однозначно выражен в виде

$$e = \prod_{i=1}^n a_i, \quad \text{где } n \in N \quad \text{и} \quad a_i \in \{\alpha, \beta, \gamma\} \quad \text{для всех } i = 1, \dots, n.$$

Число n будем называть глубиной e и обозначим через $\partial(e)$. Для каждого $n \geq 0$ положим

$$E_n = \{e \in E \mid \partial(e) = n\}.$$

Положим $\bar{\alpha} = \beta$, $\bar{\bar{\alpha}} = \gamma$, $\bar{\beta} = \gamma$, $\bar{\bar{\beta}} = \alpha$, $\bar{\gamma} = \alpha$, $\bar{\bar{\gamma}} = \beta$.

Пусть X – произвольное множество. Через SW_X^* обозначим свободную алгебру над X в многообразии алгебр сигнатуры $\{+, 0, \alpha, \beta, \gamma\}$ (состоящую из одной бинарной, одной нульарной и трех унарных операционных символов), определяемую следующими тождествами:

$$(x + y) + z = x + (y + z),$$

$$x + y = y + x,$$

$$x + 0 = x,$$

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,$$

$$\beta(x + y) = \beta x + \beta y,$$

$$\gamma(x + y) = \gamma x + \gamma y,$$

$$\alpha 0 = 0,$$

$$\beta 0 = 0,$$

$$\gamma 0 = 0.$$

Элементы алгебры SW_X^* будем называть тернарными полутермами над X или просто полутермами. Очевидно, что каждый полутерм $s \in SW_X^*$ может быть выражен в виде

$$s = \sum_{i=1}^r e_i x_i,$$

где $r \in \mathbb{N}$, $e_i \in E$, $x_i \in X$; это выражение однозначно с точностью до порядка слагаемых. Целое число r называется длиной s и обозначается через $\lambda(s)$. Ясно, что $\lambda(s) = 0$ тогда и только тогда, когда $s = 0$.

Определим тернарную операцию на SW_X^* следующим образом:

$$(stu) = \alpha s + \beta t + \gamma u.$$

Полученный тернарный группоид будем обозначать через SW_X и называть тернарным группоидом (3-группоидом) полутермов над X . Элементы подалгебры

алгебры SW_X порожденной множеством X , будем обозначать через W_X и называть тернарными термами над X (в дальнейшем просто термами).

Следующая лемма очевидна.

Лемма 2.1. W_X абсолютно свободный тернарный группоид (3-группоид) над X . Для каждого терма t над X имеет место один из следующих случаев:

- (1) $t \in X$;
- (2) существует единственная тройка u, v, w термов над X такая, что $t = (uvw)$.

Лемма 2.2. Пусть $t = \sum_{i=1}^r e_i x_i$ ($x_i \in X$) полутерм над X . Тогда t будет термом над X тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующим условиям:

- (1) $r \geq 1$;
- (2) если $i, j \in \{1, \dots, r\}$ и $e_i = e_j f$ для некоторого $f \in E$, то $i = j$;
- (3) если $i \in \{1, \dots, r\}$ и $e_i = fag$ для некоторых $f, g \in E$ и $a \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$, то существуют $j, k \in \{1, \dots, r\}$ с $e_j = f\bar{a}h_1$, $e_k = f\bar{a}h_2$ для некоторых $h_1, h_2 \in E$.

Доказательство. Аналогично [15, Предложение 1.3.2]. □

Пусть $s = \sum_{i=1}^r e_i x_i$ — терм над X . Через $I^*(s)$ и $I(s)$ обозначим следующие множества:

$$\begin{aligned} I^*(s) &= \{e_i \mid i = 1, \dots, r\}, \\ I(s) &= \{e \in E \mid ef \in I^*(s), \text{ где } f \in E\}, \\ I_n(s) &= E_n \cap I(s). \end{aligned}$$

Элементы $I(s)$ назовем подтермами входящими в s .

Пусть t терм над X . Тогда $I^*(t) \subseteq I(t)$. Более того, если $e \in I(t)$, то $e \in I^*(t)$ тогда и только тогда, когда $e\alpha \notin I(t)$, тогда и только тогда, когда $e\beta \notin I(t)$, тогда и только тогда, когда $e\gamma \notin I(t)$. Глубиной терма t назовем число $\partial(t) = \max \{\partial(e) \mid e \in I(t)\}$. Очевидно, что $I_{\partial(t)}(t) \subseteq I^*(t)$ и $\partial(t)$ — наибольшее целое число n такое, что $I_n(t) \neq \emptyset$.

Непосредственно из леммы 2.2 следует следующая лемма.

Лемма 2.3. Пусть t терм над X . Множество $P = I(t)$ имеет следующие свойства.

- (1) P конечное подмножество E и $1 \in P$;
- (2) Если $e, f \in E$ и $ef \in P$, то $e \in P$;
- (3) Если $e \in E$, то $e\alpha \in P \leftrightarrow e\beta \in P \leftrightarrow e\gamma \in P$.

Обратно, если $P \subseteq E$ удовлетворяет (1), (2), (3) и $h : Q \rightarrow X$, где $Q = \{e \in P \mid e\alpha \notin P\}$, то полутерм $s = \sum_{e \in Q} eh(e)$ является термом над X и $P = I(s)$.

Лемма 2.4. Пусть t -терм над X и $e \in I(t)$. Тогда существует единственная пара (w, u) такая, что w – полутерм, u – терм и $t = w + eu$. Более того, если v – произвольный терм над X , то $w + ev$ также будет термом над X .

Доказательство. Аналогично [15, Предложение 1.3.4]. □

Пусть $t = w + eu$ – терм, тогда терм u будем обозначать через $t_{[e]} = u$ и называть подтермом терма t , соответствующим e . Ясно, что $t_{[e]} \in X$ тогда и только тогда, когда $e \in I^*(t)$. Если $t = \sum_{i=1}^r e_i x_i$, то $t_{[e_i]} = x_i$ для всех $i = 1, \dots, r$. Терм $w + eu$ будем обозначать через $\sigma_{e:v}(t)$.

Доказательство следующей леммы очевидно.

Лемма 2.5. Пусть t, v – два терма над X , $n \geq 0$, $e \in I_n(t)$. Положим $s = \sigma_{e:v}(t)$. Тогда

- (1) $I_m(s) = I_m(t)$ для всех $m \in \{0, \dots, n\}$;
- (2) $s_{[e]} = v$;
- (3) если $f \in I_n(t)$ и $f \neq e$, то $s_{[f]} = t_{[f]}$;
- (4) если $0 \leq m < n$, $x \in X$ и $g \in I_m(t)$, то $t_{[g]} = x \leftrightarrow s_{[g]} = x$.

Пусть t – терм над X , $e_1, \dots, e_k$ подтермы t такие, что для любых $i, j \in \{1, \dots, k\}$ и $e_i = e_j f$ для некоторого $f \in E$, то $i = j$ (такие подтермы называются независимыми). Из леммы 2.4 следует, что существует единственная $(k+1)$ -ка $w, u_1, \dots, u_k$ такая, что w – полутерм над X , $u_1, \dots, u_k$ – термы над X и $t = w + e_1 u_1 + \dots + e_k u_k$. Имеем $u_1 = t_{[e_1]}, \dots, u_k = t_{[e_k]}$. Если $v_1, \dots, v_k$ произвольные термы, тогда $w + e_1 v_1 + \dots + e_k v_k$ – терм, который будем обозначать через $\sigma_{e_1:v_1} \dots \sigma_{e_k:v_k}(t)$.

Пусть t – терм, $n \geq 0$ и p – подстановка $I_n(t)$. Обозначим через $e_1, \dots, e_k$ попарно различные элементы $I_n(t)$. Очевидно, $e_1, \dots, e_k$ – независимые подтермы t . Терм $\sigma_{e_1:v_1} \dots \sigma_{e_k:v_k}(t)$, где $v_i = t_{[p(e_i)]}$ для всех $i = 1, \dots, k$, обозначим через $p[t]$.

Лемма 2.6. Пусть t – терм над X , $n \geq 0$ и p – подстановка $I_n(t)$. Тогда

- (1) $I_m(p[t]) = I_m(t)$ для всех $m \in \{0, \dots, n\}$;
- (2) если $e \in I_n(t)$, то $p[t]_{[e]} = t_{[p(e)]}$;
- (3) если $0 \leq m < n$, $x \in X$ и $e \in I_m(t)$, то $t_{[e]} = x$ тогда и только тогда, когда $p[t]_{[e]} = x$.

Доказательство. Следует из леммы 2.5. □

Пусть $n \in 2N$, $t_0, t_1, \dots, t_n$ – термы над X и $a_1, \dots, a_n$ – некоторые элементы из $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Определим терм $[t_0, t_1, a_1, a_2, t_2, t_3, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n, t_n]$ индукцией по n следующим образом:

$$\begin{aligned}
 [t_0] &= t_0; \\
 [t_0, t_1, \alpha, \beta, t_2] &= (t_0 t_1 t_2); \\
 [t_0, t_1, \beta, \gamma, t_2] &= (t_2 t_0 t_1); \\
 [t_0, t_1, \gamma, \alpha, t_2] &= (t_1 t_2 t_0); \\
 [t_0, t_1, a_1, a_2, t_2, t_3, \dots, t_{n-2}, t_{n-1}, \alpha, \beta, t_n] &= \\
 &= ([t_0, t_1, a_1, a_2, \dots, a_{n-3}, a_{n-2}, t_{n-2}] t_{n-1} t_n); \\
 [t_0, t_1, a_1, a_2, t_2, t_3, \dots, t_{n-2}, t_{n-1}, \beta, \gamma, t_n] &= \\
 &= (t_n [t_0, t_1, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_{n-2}, t_{n-2}] t_{n-1}); \\
 [t_0, t_1, a_1, a_2, t_2, t_3, \dots, t_{n-2}, t_{n-1}, \gamma, \alpha, t_n] &= \\
 &= (t_{n-1} t_n [t_0, t_1, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_{n-2}, t_{n-2}]).
 \end{aligned}$$

Лемма 2.7. Пусть t – терм над X и $e = a_1 \dots a_n \in I_n(t)$ ($n \geq 0$). Тогда

- (1) $t = \left[t_{[a_1 \dots a_n]}, t_{[a_1 \dots \bar{a}_n]}, a_n, \bar{a}_n, t_{[a_1 \dots \bar{a}_n]}, t_{[a_1 \dots \bar{a}_{n-1}]}, a_{n-1}, \bar{a}_{n-1}, t_{[a_1 \dots \bar{a}_{n-1}]}, t_{[a_1 \dots \bar{a}_{n-2}]}, \right.$
 $\left. a_{n-2}, \bar{a}_{n-2}, \dots, t_{[a_1 \bar{a}_2]}, t_{[\bar{a}_1]}, a_1, \bar{a}_1, t_{[\bar{a}_1]} \right];$
- (2) если v терм над X , то

$$\sigma_{e:v}(t) = \left[v, t_{[a_1 \dots \bar{a}_n]}, a_n, \bar{a}_n, t_{[a_1 \dots \bar{a}_n]}, t_{[a_1 \dots \bar{a}_{n-1}]}, a_{n-1}, \bar{a}_{n-1}, t_{[a_1 \dots \bar{a}_{n-1}]}, t_{[a_1 \dots \bar{a}_{n-2}]}, \right. \\
 \left. a_{n-2}, \bar{a}_{n-2}, \dots, t_{[a_1 \bar{a}_2]}, t_{[\bar{a}_1]}, a_1, \bar{a}_1, t_{[\bar{a}_1]} \right].$$

Доказательство. (1). Индукцией по $\lambda(t)$. Если $\lambda(t) = 1$, то $t = x$ и утверждение очевидно. При $\lambda(t) = 3$ (случай $\lambda(t) = 2$ для тернарных термов невозможен) имеем: $t = (xyz) = \alpha x + \beta y + \gamma z$, $t_{[\alpha]} = x$, $t_{[\beta]} = y$, $t_{[\gamma]} = z$. Поэтому получаем:

$$\begin{aligned} [t_{[\alpha]}, t_{[\bar{\alpha}]}, \alpha, \bar{\alpha}, t_{[\bar{\alpha}]}] &= [x, y, \alpha, \beta, z] = (xyz) = t; \\ [t_{[\beta]}, t_{[\bar{\beta}]}, \beta, \bar{\beta}, t_{[\bar{\beta}]}] &= [y, z, \beta, \gamma, x] = (xyz) = t; \\ [t_{[\gamma]}, t_{[\bar{\gamma}]}, \gamma, \bar{\gamma}, t_{[\bar{\gamma}]}] &= [z, x, \gamma, \alpha, y] = (xyz) = t. \end{aligned}$$

Предположим утверждение верно для $\lambda(t) < m$, докажем для $\lambda(t) = m$. Поскольку t терм, то существуют термы u, v, w такие, что $t = (uvw) = \alpha u + \beta v + \gamma w$. Длина термов u, v, w меньше m , поэтому для них справедливо предположение индукции. Пусть $e = a_1 \dots a_n \in I_n(t)$, тогда $a_1 = \alpha$ или $a_1 = \beta$ или $a_1 = \gamma$. Рассмотрим случай $a_1 = \alpha$. Тогда $a_2 \dots a_n \in I_{n-1}(u)$ и $t = [t_{[\alpha]}, t_{[\bar{\alpha}]}, \alpha, \bar{\alpha}, t_{[\bar{\alpha}]}] = [u, v, \alpha, \beta, w] = (uvw)$. По предположению индукции имеем:

$$u = [u_{[a_2 \dots a_n]}, u_{[a_2 \dots \bar{a}_n]}, a_n, \bar{a}_n, u_{[a_2 \dots \bar{a}_n]}, u_{[a_2 \dots \bar{a}_{n-1}]}, a_{n-1}, \bar{a}_{n-1}, \dots, a_2, \bar{a}_2, u_{[\bar{a}_2]}].$$

Поэтому получим:

$$\begin{aligned} t &= [t_{[\alpha]}, t_{[\bar{\alpha}]}, \alpha, \bar{\alpha}, t_{[\bar{\alpha}]}] = [u, t_{[\bar{a}_1]}, a_1, \bar{a}_1, t_{[\bar{a}_1]}] = [[u_{[a_2 \dots a_n]}, u_{[a_2 \dots \bar{a}_n]}, a_n, \bar{a}_n, \\ &\quad u_{[a_2 \dots \bar{a}_n]}, u_{[a_2 \dots \bar{a}_{n-1}]}, a_{n-1}, \bar{a}_{n-1}, \dots, a_2, \bar{a}_2, u_{[\bar{a}_2]}], t_{[\bar{a}_1]}, a_1, \bar{a}_1, t_{[\bar{a}_1]}], \end{aligned}$$

т.к. $u_{[a_2 \dots a_n]} = t_{[a_1 a_2 \dots a_n]}$, $u_{[a_2 \dots \bar{a}_n]} = t_{[a_1 a_2 \dots \bar{a}_n]}$, $\dots$, $u_{[\bar{a}_2]} = t_{[a_1 \bar{a}_2]}$ и $a_1 = \alpha$, $\bar{a}_1 = \beta$, то

$$\begin{aligned} t &= [t_{[a_1 \dots a_n]}, t_{[a_1 \dots \bar{a}_n]}, a_n, \bar{a}_n, t_{[a_1 \dots \bar{a}_n]}, t_{[a_1 \dots \bar{a}_{n-1}]}, a_{n-1}, \bar{a}_{n-1}, t_{[a_1 \dots \bar{a}_{n-1}]}, t_{[a_1 \dots \bar{a}_{n-2}]}, \\ &\quad = a_{n-2}, \bar{a}_{n-2}, \dots, t_{[a_1 \bar{a}_2]}, t_{[\bar{a}_1]}, a_1, \bar{a}_1, t_{[\bar{a}_1]}]. \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Случаи $a_1 = \beta$ и $a_1 = \gamma$ рассматриваются аналогично.

Утверждение (2) следует из (1). $\square$

3. СОКРАТИМЫЕ МЕДИАЛЬНЫЕ ТЕРНАРНЫЕ ГРУППОИДЫ

В этом параграфе приведены необходимые условия для выполнимости произвольного тождества $u = v$ в классе сократимых медиальных тернарных группоидов. Вопрос о достаточности этих условий для выполнимости тождества $u = v$ в

классе медиальных сократимых тернарных группоидов остается открытым. Отметим, что в случае бинарных сократимых медиальных группоидов аналогичные условия являются необходимыми и достаточными ([15], 2.1.1).

Пусть $Q()$ – тернарный группоид. Правой (левой, средней) трансляцией при помощи элементов a, b называется отображение $R_{a,b} : Q \rightarrow Q$ ($L_{a,b} : Q \rightarrow Q$, $S_{a,b} : Q \rightarrow Q$), определяемое равенством: $R_{a,b}(x) = (xab)$ ($L_{a,b}(x) = (abx)$, $S_{a,b}(x) = (axb)$).

Тернарный группоид $Q()$ называется сократимым, если трансляции $R_{a,b}$, $L_{a,b}$, $S_{a,b}$ инъективны для всех $a, b \in Q$.

Конгруэнция θ тернарного группоида $Q()$ называется сократимой, если для любых $a, b \in Q$ выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} (R_{a,b}(x), R_{a,b}(y)) \in \theta &\rightarrow (x, y) \in \theta, \\ (L_{a,b}(x), L_{a,b}(y)) \in \theta &\rightarrow (x, y) \in \theta, \\ (S_{a,b}(x), S(y)) \in \theta &\rightarrow (x, y) \in \theta. \end{aligned}$$

Если θ сократимая конгруэнция тернарного группоида $Q()$, тогда фактор группойд Q/θ будет сократимым группоидом.

Обозначим через M_X множество тождеств над X выполняющихся во всех медиальных сократимых тернарных группоидах. M_X – наименьшая конгруэнция W_X такая, что W_X/M_X – медиальный сократимый тернарный группоид. M_X вполне инвариантная конгруэнция W_X . Фактор группоид W_X/M_X – свободный медиальный группоид ранга $Card(X)$.

Если $e = a_1 \dots a_n \in E$, тогда упорядоченная тройка

$$(Card\{i \mid a_i = \alpha\}, \quad Card\{i \mid a_i = \beta\}, \quad Card\{i \mid a_i = \gamma\})$$

целых неотрицательных чисел называется весом e . Для каждой упорядоченной тройки (k, l, m) целых неотрицательных чисел, обозначим через $E_{k,l,m}$ множество всех $e \in E$ веса (k, l, m) . Для каждого $t \in W_X$ положим $I_{k,l,m} = E_{k,l,m} \cap I(t)$.

Если $t \in W_X$, $k, l, m \geq 0$ и $x \in X$, то положим

$$P_{k,l,m}(x, t) = Card\{e \in I_{k,l,m}(t) \mid t_{[e]} = x\}$$

т.е. число вхождений x веса (k, l, m) в t .

Для каждого непустого множества X определим бинарное отношение R_X на W_X следующим образом:

$$(u, v) \in R_X \leftrightarrow P_{k,l,m}(x, u) = P_{k,l,m}(x, v)$$

для всех $x \in X$ и всех троек k, l, m целых неотрицательных чисел.

Непосредственной проверкой доказывается следующая лемма.

Лемма 3.1. Пусть $t, u, v \in W_X$, $k, l, m \geq 0$ и $x \in X$. Тогда

$$P_{k,l,m}(x, (tuv)) = P_{k-1,l,m}(x, t) + P_{k,l-1,m}(x, u) + P_{k,l,m-1}(x, v)$$

где $P_{-1,l,m}(x, t) = P_{k,-1,m}(x, u) = P_{k,l,-1}(x, v) = 0$.

Лемма 3.2. Пусть $t \in W_X$, $k, l, m \geq 0$, $x \in X$ и пусть g эндоморфизм W_X . Тогда

$$(3.1) \quad P_{k,l,m}(x, g(t)) = \sum_{y \in X} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \sum_{\nu=0}^m P_{i,j,\nu}(y, t) \cdot P_{k-i,l-j,m-\nu}(x, g(y)).$$

Доказательство. Индукцией по длине терма t . Если $\lambda(t) = 1$, то $t = x$. Все первые сомножители в правой части равенства (3.1), кроме $P_{0,0,0}(x, x) = 1$, равны нулю, поэтому сумма равна $P_{k,l,m}(x, g(x))$. Базис индукции установлен. Пусть $t = (uvw)$ и для термов u, v, w лемма верна. Тогда согласно лемме 3.1 будем иметь:

$$\begin{aligned} P_{k,l,m}(x, g(t)) &= P_{k,l,m}(x, g(uvw)) = P_{k,l,m}(x, (g(u)g(v)g(w))) = \\ &= P_{k-1,l,m}(x, g(u)) + P_{k,l-1,m}(x, g(v)) + P_{k,l,m-1}(x, g(w)) = \\ &= \sum_{y \in X} \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^l \sum_{\nu=0}^m P_{i,j,\nu}(y, u) \cdot P_{(k-1)-i,l-j,m-\nu}(x, g(y)) + \\ &\quad + \sum_{y \in X} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{\nu=0}^m P_{i,j,\nu}(y, v) \cdot P_{k-i,(l-1)-j,m-\nu}(x, g(y)) + \\ &\quad + \sum_{y \in X} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \sum_{\nu=0}^{m-1} P_{i,j,\nu}(y, w) \cdot P_{k-i,l-j,(m-1)-\nu}(x, g(y)) = \\ &= \sum_{y \in X} \left(\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^l \sum_{\nu=0}^m P_{i,j,\nu}(y, u) \cdot P_{(k-1)-i,l-j,m-\nu}(x, g(y)) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{\nu=0}^m P_{i,j,\nu}(y, v) \cdot P_{k-i,(l-1)-j,m-\nu}(x, g(y)) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \sum_{\nu=0}^{m-1} P_{i,j,\nu}(y, w) \cdot P_{k-i, l-j, (m-1)-\nu}(x, g(y)) \Big) = \\
& = \sum_{y \in X} \Big(\sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \sum_{\nu=0}^m P_{i-1, j, \nu}(y, u) \cdot P_{k-i, l-j, m-\nu}(x, g(y)) + \\
& \quad + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \sum_{\nu=0}^m P_{i, j-1, \nu}(y, v) \cdot P_{k-i, l-j, m-\nu}(x, g(y)) + \\
& \quad + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \sum_{\nu=0}^m P_{i, j, \nu-1}(y, w) \cdot P_{k-i, l-j, m-\nu}(x, g(y)) \Big) = \\
& = \sum_{y \in X} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \sum_{\nu=0}^m (P_{i-1, j, \nu}(y, u) + P_{i, j-1, \nu}(y, v) + P_{i, j, \nu-1}(y, w)) \times \\
& \quad \times P_{k-i, l-j, m-\nu}(x, g(y)) = \sum_{y \in X} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \sum_{\nu=0}^m P_{i, j, \nu}(y, t) \cdot P_{k-i, l-j, m-\nu}(x, g(y)).
\end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

Предложение 3.1. R_X вполне инвариантная конгруэнция W_X и $M_X \subseteq R_X$.

Доказательство. Доказывается с использованием лемм 3.1 и 3.2 аналогично [15, Лемма 2.1.14]. $\square$

4. КОММУТАТИВНЫЕ МЕДИАЛЬНЫЕ ТЕРНАРНЫЕ ГРУППОИДЫ

В этом параграфе устанавливается разрешимость эквациональной теории коммутативных медиальных тернарных группоидов. В изложении следуем [15].

Тернарный группоид называется коммутативным, если удовлетворяет тождеству

$$(x_1 x_2 x_3) = (x_{\tau(1)} x_{\tau(2)} x_{\tau(3)})$$

где τ произвольная подстановка из S_3 .

Лемма 4.1. В коммутативном медиальном тернарном группоиде выполняется тождество

$$((x_1 x_2 x_3) (x_4 x_5 x_6) (x_7 x_8 x_9)) = ((x_{\tau(1)} x_{\tau(2)} x_{\tau(3)}) (x_{\tau(4)} x_{\tau(5)} x_{\tau(6)}) (x_{\tau(7)} x_{\tau(8)} x_{\tau(9)}))$$

где τ — произвольная подстановка из S_9 .

Доказательство. Непосредственной проверкой. $\square$

Для любого непустого множества X обозначим, через C_X множество всех тождеств над X выполняющихся во всех коммутативных медиальных тернарных группоидах. C_X наименьшая конгруэнция W_X такая, что W_X/C_X – коммутативный медиальный группоид, она будет вполне инвариантной конгруэнцией, а 3-группоид W_X/C_X – свободным коммутативным группоидом ранга $Card(x)$.

Для $t \in W_X$, $x \in X$ и $n \geq 0$ положим

$$P_n(x, t) = Card\{e \in I_n(t) \mid t_{[e]} = x\}.$$

Таким образом $P_n(x, t)$ – число вхождений x глубины n в t .

Лемма 4.2. Пусть $n \geq 0$, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ и

$u_0, \dots, u_{2n}, v_0, \dots, v_{2n}, w_0, \dots, w_{2n} \in W_X$. Тогда

- (1) $(([u_0, u_1, a_1, \bar{a}_1, u_2, u_3, a_2, \bar{a}_2, \dots, a_n, \bar{a}_n, u_{2n}] [v_0, v_1, b_1, \bar{b}_1, v_2, v_3, b_2, \bar{b}_2, \dots, b_n, \bar{b}_n, v_{2n}] [w_0, w_1, c_1, \bar{c}_1, w_2, w_3, c_2, \bar{c}_2, \dots, c_n, \bar{c}_n, w_{2n}]), ([v_0, u_1, a_1, \bar{a}_1, u_2, u_3, a_2, \bar{a}_2, \dots, a_n, \bar{a}_n, u_{2n}] [u_0, v_1, b_1, \bar{b}_1, v_2, v_3, b_2, \bar{b}_2, \dots, b_n, \bar{b}_n, v_{2n}] [w_0, w_1, c_1, \bar{c}_1, w_2, w_3, c_2, \bar{c}_2, \dots, c_n, \bar{c}_n, w_{2n}]))) \in C_X$.
- (2) $(([u_0, u_1, a_1, \bar{a}_1, u_2, u_3, a_2, \bar{a}_2, \dots, a_n, \bar{a}_n, u_{2n}] [v_0, v_1, b_1, \bar{b}_1, v_2, v_3, b_2, \bar{b}_2, \dots, b_n, \bar{b}_n, v_{2n}] [w_0, w_1, c_1, \bar{c}_1, w_2, w_3, c_2, \bar{c}_2, \dots, c_n, \bar{c}_n, w_{2n}]), ([w_0, u_1, a_1, \bar{a}_1, u_2, u_3, a_2, \bar{a}_2, \dots, a_n, \bar{a}_n, u_{2n}] [v_0, v_1, b_1, \bar{b}_1, v_2, v_3, b_2, \bar{b}_2, \dots, b_n, \bar{b}_n, v_{2n}] [u_0, w_1, c_1, \bar{c}_1, w_2, w_3, c_2, \bar{c}_2, \dots, c_n, \bar{c}_n, w_{2n}]))) \in C_X$.
- (3) $(([u_0, u_1, a_1, \bar{a}_1, u_2, u_3, a_2, \bar{a}_2, \dots, a_n, \bar{a}_n, u_{2n}] [v_0, v_1, b_1, \bar{b}_1, v_2, v_3, b_2, \bar{b}_2, \dots, b_n, \bar{b}_n, v_{2n}] [w_0, w_1, c_1, \bar{c}_1, w_2, w_3, c_2, \bar{c}_2, \dots, c_n, \bar{c}_n, w_{2n}]), ([u_0, u_1, a_1, \bar{a}_1, u_2, u_3, a_2, \bar{a}_2, \dots, a_n, \bar{a}_n, u_{2n}] [w_0, v_1, b_1, \bar{b}_1, v_2, v_3, b_2, \bar{b}_2, \dots, b_n, \bar{b}_n, v_{2n}] [v_0, w_1, c_1, \bar{c}_1, w_2, w_3, c_2, \bar{c}_2, \dots, c_n, \bar{c}_n, w_{2n}]))) \in C_X$.

Доказательство. (1). Индукцией по n . При $n = 0$ утверждение следует из закона коммутативности. Допустим утверждение верно для чисел меньших n , докажем для n . Имеем

$$\begin{aligned} & [u_0, u_1, a_1, \bar{a}_1, u_2, u_3, \dots, a_n, \bar{a}_n, u_{2n}] = \\ & = ([u_0, u_1, a_1, \bar{a}_1, u_2, u_3, \dots, a_{n-1}, \bar{a}_{n-1}, u_{2(n-1)}] u_{2n-1} u_{2n}) \\ & \quad [v_0, v_1, b_1, \bar{b}_1, v_2, v_3, \dots, b_n, \bar{b}_n, v_{2n}] = \\ & = ([v_0, v_1, b_1, \bar{b}_1, v_2, v_3, \dots, b_{n-1}, \bar{b}_{n-1}, v_{2(n-1)}] v_{2n-1} v_{2n}) \\ & \quad [w_0, w_1, c_1, \bar{c}_1, w_2, \dots, c_n, \bar{c}_n, w_{2n}] = \end{aligned}$$

$$= ([w_0, w_1, c_1, \bar{c}_1, w_2, w_3, \dots, c_{n-1}, \bar{c}_{n-1}, w_{2(n-1)}] w_{2n-1} w_{2n}) .$$

Согласно предположению индукции имеем

$$\begin{aligned} & (([u_0, u_1, a_1, \bar{a}_1, u_2, \dots, a_{n-1}, \bar{a}_{n-1}, u_{2(n-1)}][v_0, v_1, b_1, \bar{b}_1, v_2, \dots, b_{n-1}, \bar{b}_{n-1}, v_{2(n-1)}] \\ & [w_0, w_1, c_1, \bar{c}_1, w_2, \dots, c_{n-1}, \bar{c}_{n-1}, w_{2(n-1)}]), ([v_0, u_1, a_1, \bar{a}_1, u_2, \dots, a_{n-1}, \bar{a}_{n-1}, u_{2(n-1)}] \\ & [u_0, v_1, b_1, \bar{b}_1, v_2, \dots, b_{n-1}, \bar{b}_{n-1}, v_{2(n-1)}] [w_0, w_1, c_1, \bar{c}_1, w_2, \dots, c_{n-1}, \bar{c}_{n-1}, w_{2(n-1)}])) \\ & \in C_X, \end{aligned}$$

так как C_X конгруэнция и 3-группоид коммутативный, получаем требуемое утверждение. Утверждения (2) и (3) доказываются аналогично. $\square$

Лемма 4.3. Пусть $t \in W_X$, $n \geq 0$ и $e, f \in I_n(t)$. Тогда $(t, \tau_{e,f}[t]) \in C_X$, где $\tau_{e,f}$ транспозиция определенная на $I_n(t)$, переставляющая e и f .

Доказательство. Индукцией по длине t . Если $t \in X$, т.е. при $n = 0$, то $t = \tau_{e,f}[t]$ и доказывать нечего. Пусть $t = (uvw)$ и $n \geq 1$. Положим $e = a_1 \dots a_n$, $f = b_1 \dots b_n$. Возможны девять случаев.

- (1) $a_1 = b_1 = \alpha$. Тогда $\tau_{e,f}[t] = (\tau_{a_2 \dots a_n, b_2 \dots b_n}[u]vw)$. По индуктивному предположению имеем $(u, \tau_{a_2 \dots a_n, b_2 \dots b_n}[u]) \in C_X$, следовательно $(t, \tau_{e,f}[t]) \in C_X$, так как C_X конгруэнция.
- (2) $a_1 = b_1 = \beta$. Аналогично (1).
- (3) $a_1 = b_1 = \gamma$. Аналогично (1).
- (4) $a_1 = \alpha, b_1 = \beta$. Тогда

$$\tau_{e,f}[t] = (\sigma_{a_2 \dots a_n: t_{[f]}}(u) \sigma_{b_2 \dots b_n: t_{[e]}}(v) w).$$

Согласно лемме 2.7 имеем:

$$t = \left(\left[u_{[a_2 \dots a_n]}, u_{[a_2 \dots \bar{a}_n]}, a_n, \bar{a}_n, u_{[a_2 \dots \bar{a}_n]}, u_{[a_2 \dots \bar{a}_{n-1}]}, a_{n-1}, \bar{a}_{n-1}, \dots, a_2, \bar{a}_2, u_{[\bar{a}_2]} \right] \right. \\ \left. \left[v_{[b_2 \dots b_n]}, v_{[b_2 \dots \bar{b}_n]}, b_n, \bar{b}_n, v_{[b_2 \dots \bar{b}_n]}, v_{[b_2 \dots \bar{b}_{n-1}]}, b_{n-1}, \bar{b}_{n-1}, \dots, b_2, \bar{b}_2, v_{[\bar{b}_2]} \right] w \right),$$

и

$$\tau_{e,f}[t] = \left(\left[v_{[b_2 \dots b_n]}, u_{[a_2 \dots \bar{a}_n]}, a_n, \bar{a}_n, u_{[a_2 \dots \bar{a}_n]}, u_{[a_2 \dots \bar{a}_{n-1}]}, a_{n-1}, \bar{a}_{n-1}, \dots, a_2, \bar{a}_2, u_{[\bar{a}_2]} \right] \right. \\ \left. \left[u_{[a_2 \dots a_n]}, v_{[b_2 \dots \bar{b}_n]}, b_n, \bar{b}_n, v_{[b_2 \dots \bar{b}_n]}, v_{[b_2 \dots \bar{b}_{n-1}]}, b_{n-1}, \bar{b}_{n-1}, \dots, b_2, \bar{b}_2, v_{[\bar{b}_2]} \right] w \right).$$

Следовательно, согласно лемме 4.2, получим $(t, \tau_{e,f}[t]) \in C_X$.

Остальные случаи

$$(5) \ a_1 = \beta, b_1 = \alpha,$$

$$(6) \ a_1 = \alpha, b_1 = \gamma,$$

$$(7) \ a_1 = \gamma, b_1 = \alpha,$$

$$(8) \ a_1 = \beta, b_1 = \gamma,$$

$$(9) \ a_1 = \gamma, b_1 = \beta,$$

рассматриваются аналогично. $\square$

Лемма 4.4. Пусть $t \in W_X$, $n \geq 0$ и p подстановка множества $I_n(t)$. Тогда $(t, p[t]) \in C_X$.

Доказательство. Следует из леммы 4.3, поскольку любая подстановка представима в виде произведения транспозиций. $\square$

Определим бинарное отношение S_X на W_X следующим образом

$$(u, v) \in S_X \leftrightarrow P_n(x, u) = P_n(x, v),$$

для всех $x \in X$ и всех $n \geq 0$.

Непосредственно из определения следует следующая лемма.

Лемма 4.5. Пусть $t, v, w \in W_X$, $n \geq 0$ и $x \in X$. Тогда

$$P_n(x, (tvw)) = P_{n-1}(x, t) + P_{n-1}(x, v) + P_{n-1}(x, w),$$

где $P_{-1}(x, t) = 0$.

Лемма 4.6. Пусть $t \in W_X$, $n \geq 0$, $x \in X$ и g эндоморфизм W_X . Тогда

$$P_n(x, g(t)) = \sum_{y \in X} \sum_{i=0}^n P_i(y, t) \cdot P_{n-i}(x, g(y)).$$

Доказательство. Индукцией по длине t . Если $\lambda(t) = 1$, то $t = x$. В этом случае все первые сомножители суммы

$$\sum_{y \in X} \sum_{i=0}^n P_i(y, t) \cdot P_{n-i}(x, g(y))$$

равны нулю, кроме одного, при $y = x$, а также $P_i(x, x) = 0$ ($i > 0$), $P_0(x, x) = 1$. Следовательно, эта сумма будет равна $P_n(x, g(t))$. Базис индукции установлен.

Пусть $t = (uvw)$ и для термов u, v, w лемма верна. Согласно лемме 4.5 и предположению индукции получим:

$$\begin{aligned}
 P_n(x, g(uvw)) &= P_n(x, (g(u)g(v)g(w))) = P_{n-1}(x, g(u)) + P_{n-1}(x, g(v)) + \\
 &+ P_{n-1}(x, g(w)) = \sum_{y \in X} \sum_{i=0}^{n-1} P_i(y, u) \cdot P_{n-1-i}(x, g(y)) + \sum_{y \in X} \sum_{i=0}^{n-1} P_i(y, v) \times \\
 &\times P_{n-1-i}(x, g(y)) + \sum_{y \in X} \sum_{i=0}^{n-1} P_i(y, w) \cdot P_{n-1-i}(x, g(y)) = \\
 &= \sum_{y \in X} \left(\sum_{i=0}^{n-1} P_i(y, u) \cdot P_{n-1-i}(x, g(y)) + \sum_{i=0}^{n-1} P_i(y, v) \cdot P_{n-1-i}(x, g(y)) + \right. \\
 &+ \left. \sum_{i=0}^{n-1} P_i(y, w) \cdot P_{n-1-i}(x, g(y)) \right) = \sum_{y \in X} \left(\sum_{i=0}^{n-1} P_{i-1}(y, u) \cdot P_{n-i}(x, g(y)) + \right. \\
 &+ \sum_{i=0}^{n-1} P_{i-1}(y, v) \cdot P_{n-i}(x, g(y)) + \left. \sum_{i=0}^{n-1} P_{i-1}(y, w) \cdot P_{n-i}(x, g(y)) \right) = \\
 &= \sum_{y \in X} \sum_{i=0}^n (P_{i-1}(y, u) + P_{i-1}(y, v) + P_{i-1}(y, w)) \cdot P_{n-i}(x, g(y)) = \\
 &= \sum_{y \in X} \sum_{i=0}^n P_i(y, (uvw)) \cdot P_{n-i}(x, g(y)).
 \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

Предложение 4.1. S_X вполне инвариантная сократимая конгруэнция W_X и $C_X \subseteq S_X$.

Доказательство. Следует из лемм 4.5 и 4.6. $\square$

Далее будем считать, что X – счетное множество. Для каждого $n \geq 0$ определим линейный порядок на E_n следующим образом:

$$\begin{aligned}
 a_1 \cdots a_n < b_1 \cdots b_n &\leftrightarrow \exists k \in \{1, \dots, n\} \text{ st } a_1 = b_1, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}, \\
 (a_k = \alpha \& b_k = \beta) \bigvee (a_k = \alpha \& b_k = \gamma) &\bigvee (a_k = \beta \& b_k = \gamma).
 \end{aligned}$$

Определим множество термов T следующим образом: когда $n \geq 0$, $e, f \in I_n(t)$, $e < f$ и $t_{[f]} = x_j$ для некоторого j , тогда $t_{[e]} = x_i$ для некоторого $i \in \{1, \dots, j\}$.

Лемма 4.7. Для любого терма $t \in W_X$ существует терм $r \in T$ такой, что $(t, r) \in C_X$.

Доказательство. Определим последовательность термов $t^{(0)}, t^{(1)}, t^{(2)}, \dots$ следующим образом: $t^{(0)} = t$; $t^{(n+1)} = p[t^{(n)}]$, где p подстановка $I_{n+1}(t^n)$ такая, что когда $e, f \in I_{n+1}(t^{(n)})$, $e < f$ и $t_{[p(f)]}^{(n)} = x_j$ для некоторого j , тогда $t_{[p(e)]}^{(n)} = x_i$ для некоторого $i \leq j$. Существует натуральное число $c \in N$ такое, что $t^{(c)} = t^{(c+1)} = \dots$. Согласно лемме 4.4 получим $(t, t^{(c)}) \in C_X$. Остается доказать, что $t^{(c)} \in T$. Индукцией по n докажем, что если $0 \leq m \leq n$, $e, f \in I_m(t^{(n)})$, $e < f$ и $t_{[f]}^{(n)} = x_j$ для некоторого j , тогда $t_{[e]}^{(n)} = x_i$ для некоторого $i \leq j$. При $n = 0$ утверждение очевидно. Предположим условие выполняется для $n \geq 0$ и пусть $0 \leq m \leq n+1$, $e, f \in I_m(t^{(n+1)})$, $e < f$ и $t_{[f]}^{(n+1)} = x_j$. Имеем $t^{(n+1)} = p[t^{(n)}]$ для подстановки p множества $I_{n+1}(t^{(n)})$. Если $m \leq n$, то согласно лемме 2.6 (3), имеем $t_{[f]}^{(n)} = x_j$ и по индуктивному предположению получим $t_{[e]}^{(n)} = x_i$ для некоторого $i \leq j$ и следовательно, согласно лемме 2.6 (3), получаем $t_{[e]}^{(n+1)} = x_i$. Если $m = n+1$, тогда $t_{[p(f)]}^{(n)} = t_{[f]}^{(n+1)} = x_j$, согласно лемме 2.6 (2), так, что $t_{[p(e)]}^{(n)} = x_i$ для некоторого $i \leq j$ (согласно выбору p); отсюда получаем $t_{[e]}^{(n+1)} = x_i$, согласно лемме 2.6 (2). $\square$

Лемма 4.8. Пусть $t, w \in T$ и $(t, w) \in C_X$. Тогда $t = w$.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что $I_n(t) = I_n(w)$ ($n \geq 0$) и если $e \in I_n(t)$, $x \in X$, тогда $t_{[e]} = x \leftrightarrow w_{[e]} = x$. Доказательство проведем индукцией по n .

Для $n = 0$ утверждение очевидно. Пусть $n \geq 1$. Согласно индуктивному предположению имеем:

$$a_1 \cdots a_n \in I_n(t) \leftrightarrow t_{[a_1 \cdots a_{n-1}]} \notin X \leftrightarrow w_{[a_1 \cdots a_{n-1}]} \notin X \leftrightarrow a_1 \cdots a_n \in I_n(w).$$

Таким образом $I_n(t) = I_n(w)$.

Далее, пусть $e \in I_n(t)$. Допустим $I_n(t) = \{e_1, \dots, e_m\}$, где $m \geq 0$ и $e_1 < \dots < e_m$. Имеем $e = e_i$ для некоторого $i \in \{1, \dots, m\}$. Если j положительное целое число, то поскольку $t \in T$ имеем:

$$t_{[e]} = x_j \leftrightarrow P_n(x_1, t) + \dots + P_n(x_{j-1}, t) < i \leq P_n(x_1, t) + \dots + P_n(x_j, t).$$

Аналогично, так как $w \in T$, имеем:

$$w_{[e]} = x_j \leftrightarrow P_n(x_1, w) + \dots + P_n(x_{j-1}, w) < i \leq P_n(x_1, w) + \dots + P_n(x_j, w).$$

Так как $P_n(x, t) = P_n(x, w)$ для всех $x \in X$ получим: $t_{[e]} = x_j \leftrightarrow w_{[e]} = x_j$. $\square$

Лемма 4.9. $C_X = S_X$.

Доказательство. Согласно предложению 4.1 имеем $C_X \subseteq S_X$. Пусть $(t, w) \in S_X$. Согласно лемме 4.7, существуют термы $r, s \in T$, такие, что $(t, r) \in C_X$ и $(w, s) \in C_X$. На основании леммы 4.8 получаем $r = s$ и следовательно $(t, w) \in C_X$. $\square$

Предложение 4.2. *Если X – произвольное непустое множество, то $C_X = S_X$.*

Доказательство. См. [15, лемма 2.1.17, 2.1.18]. $\square$

Теорема 4.1. *Пусть X произвольное непустое множество и u, v термы над X . Тогда $(u, v) \in C_X$ тогда и только тогда, когда $P_n(x, u) = P_n(x, v)$ для всех $x \in X$ и всех целых неотрицательных чисел n .*

Доказательство. Следует из предложения 4.2. $\square$

Заметим, что для проверки $(u, v) \in C_X$ достаточно проверить равенство $P_n(x, u) = P_n(x, v)$ для всех $x \in \text{var}(u) \cup \text{var}(v)$ и всех $n \in \{0, \dots, \text{Max}(\partial(u), \partial(v))\}$.

Следствие 4.1. *Любой свободный коммутативный медиальный тернарный группоид – сократимый группоид.*

5. СТРОЕНИЕ СВОБОДНОГО КОММУТАТИВНОГО МЕДИАЛЬНОГО ТЕРНАРНОГО ГРУППОИДА

Для любого непустого множества X группоид W_X/C_X – свободный коммутативный медиальный тернарный группоид ранга $\text{Card}(x)$. Согласно теореме 4.1 его описание носит в некотором смысле конструктивный характер. В данном параграфе мы дадим более явное описание свободного коммутативного медиального тернарного группоида.

Пусть X – непустое множество. Обозначим через CF'_X свободную алгебру над X в многообразии алгебр сигнатуры $\{+, 0, \alpha\}$ (состоящей из одной бинарной, одной унарной и одной нульарной операций символов) определяемую тождествами:

$$(x + y) + z = x + (y + z),$$

$$x + y = y + x,$$

$$x + 0 = x,$$

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,$$

$$\alpha 0 = 0.$$

Каждый элемент $u \in CF'_X$ может быть представлен в виде $u = \sum_{i=1}^r \alpha^{n_i} x_i$, где r и n_i – целые неотрицательные числа, а $x_i \in X (i = 1, \dots, r)$. Данное выражение единственно с точностью до порядка слагаемых.

Определим тернарную операцию на CF'_X следующим образом:

$$(uvw) = \alpha u + \alpha v + \alpha w.$$

Множество CF'_X относительно этой операции будет тернарным группоидом, который обозначим через: CF_X . Для любого $u = \sum_{i=1}^r \alpha^{n_i} x_i \in CF_X$ положим $\partial(u) = \text{Max}(n_i \mid i = 1, \dots, r)$.

Обозначим через CG_X подгруппоид CF_X порожденный множеством X .

Теорема 5.1 (ср. с [15], 4.2.1). *Пусть X – произвольное непустое множество. Группоид CG_X будет свободным коммутативным медиальным тернарным группоидом над X . Элемент $u = \sum_{i=1}^r \alpha^{n_i} x_i \in CF_X$ принадлежит CG_X тогда и только тогда, когда*

$$(5.1) \quad \sum_{k=0}^{\partial(u)} 3^{-k} \text{Card} \{i \mid n_i = k\} = 1.$$

Доказательство теоремы разобьем на несколько лемм.

Лемма 5.1. *Обозначим через h единственный гомоморфизм W_X на CG_X такой, что $h(x) = x$ для всех $x \in X$. Если $t \in W_X$, то*

$$h(t) = \sum_{e \in I^*(t)} \alpha^{\partial(e)} t_{[e]}.$$

Если $u, v \in W_X$, то $h(u) = h(v)$ тогда и только тогда, когда $P_n(x, u) = P_n(x, v)$ для всех $x \in X$ и $n \geq 0$.

Доказательство. Первое утверждение докажем индукцией по длине t . Если $\lambda(t) = 1$, то $t = x$ и утверждение очевидно. Допустим $t = (uvw)$ и для термов

u, v, w верно утверждение. Тогда

$$\begin{aligned} h(t) &= h(u)h(v)h(w) = \alpha h(u) + \alpha h(v) + \alpha h(w) = \\ &= \alpha \sum_{e \in I^*(u)} \alpha^{\partial(e)} u_{[e]} + \alpha \sum_{e \in I^*(v)} \alpha^{\partial(e)} v_{[e]} + \alpha \sum_{e \in I^*(w)} \alpha^{\partial(e)} w_{[e]} = \\ &= \sum_{e \in I^*(u)} \alpha^{\partial(e)+1} u_{[e]} + \sum_{e \in I^*(v)} \alpha^{\partial(e)+1} v_{[e]} + \sum_{e \in I^*(w)} \alpha^{\partial(e)+1} w_{[e]} = \sum_{e \in I^*(t)} \alpha^{\partial(e)} t_{[e]}. \end{aligned}$$

Второе утверждение непосредственно следует из первого. $\square$

Лемма 5.2. CG_X свободный коммутативный медиальный тернарный группоид над X .

Доказательство. Следует из леммы 5.1 и теоремы 4.1. $\square$

Обозначим через L_X множество всех $u = \sum_{i=1}^r \alpha^{n_i} x_i \in CF_X$ таких, что

$$\sum_{k=0}^{\partial(u)} 3^{-k} \text{Card} \{i \mid n_i = k\} = 1.$$

Очевидно $0 \notin L_X$.

Лемма 5.3. Пусть $u \in CF_X$, $x, y, z, a \in X$ и $n \geq 0$. То $u + \alpha^n x \in L_X$ тогда и только тогда, когда $u + \alpha^{n+1}y + \alpha^{n+1}z + \alpha^{n+1}a \in L_X$.

Доказательство. Сумма (5.1) для $u + \alpha^{n+1}y + \alpha^{n+1}z + \alpha^{n+1}a$ получается из суммы (5.1) для $u + \alpha^n x$, если к ней добавить $3^{-(n+1)} \cdot 3$ и вычесть $3^{-n} \cdot 1$, т.е. $3^{-(n+1)} \cdot 3 - 3^{-n} = 0$. $\square$

Лемма 5.4. $CG_X \subseteq L_X$.

Доказательство. Ясно, что $X \subseteq L_X$. Поэтому достаточно доказать, что L_X подгруппоид CF_X . Пусть

$$u = \sum_{i=1}^r \alpha^{n_i} x_i \in L_X, \quad v = \sum_{j=1}^s \alpha^{m_j} y_j \in L_X, \quad w = \sum_{\mu=1}^p \alpha^{l_\mu} z_\mu \in L_X.$$

Имеем

$$t = (uvw) = \sum_{i=1}^r \alpha^{n_i+1} x_i + \sum_{j=1}^s \alpha^{m_j+1} y_j + \sum_{\mu=1}^p \alpha^{l_\mu+1} z_\mu,$$

и

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=0}^{\partial(t)} 3^{-k} \text{Card}(\{i \mid n_i + 1 = k\} \cup \{j \mid m_j + 1 = k\} \cup \{\mu \mid l_\mu + 1 = k\}) = \\
 & = \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} \text{Card}\{i \mid n_i + 1 = k\} + \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} \text{Card}\{j \mid m_j + 1 = k\} + \\
 & \quad \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} \{\mu \mid l_\mu + 1 = k\} = \sum_{k=-1}^{\infty} 3^{-(k+1)} \text{Card}\{i \mid n_i = k\} + \\
 & \quad \sum_{k=-1}^{\infty} 3^{-(k+1)} \text{Card}\{j \mid m_j = k\} + \sum_{k=-1}^{\infty} 3^{-(k+1)} \{\mu \mid l_\mu = k\} = \\
 & \quad = 3^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} \text{Card}\{i \mid n_i = k\} + \\
 & \quad 3^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} \text{Card}\{j \mid m_j = k\} + 3^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} \{\mu \mid l_\mu = k\} = 3^{-1} + 3^{-1} + 3^{-1} = 1.
 \end{aligned}$$

Таким образом $(uvw) \in L_X$. $\square$

Лемма 5.5. Пусть $u = \sum_{i=1}^r \alpha^{n_i} x_i \in L_X$ и $r = 1$. Тогда $u \in X$ и $n_i = 0$.

Доказательство. Очевидно. $\square$

Лемма 5.6. Пусть $u = \sum_{i=1}^r \alpha^{n_i} x_i \in L_X$ и $r \geq 3$. Тогда $\text{Card}\{i \mid n_i = \partial(u)\} \geq 3$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. $\text{Card}\{i \mid n_i = \partial(u)\} \leq 2$. Тогда

$$\text{Card}\{i \mid n_i = \partial(u)\} = 1 \quad \text{или} \quad \text{Card}\{i \mid n_i = \partial(u)\} = 2.$$

В этих случаях получим

$$1 = \sum_{k=0}^{\partial(u)} 3^{-k} \text{Card}\{i \mid n_i = k\} = \sum_{k=0}^{\partial(u)-1} 3^{-k} \text{Card}\{i \mid n_i = k\} + 3^{-\partial(u)} \cdot 1$$

или

$$1 = \sum_{k=0}^{\partial(u)} 3^{-k} \text{Card}\{i \mid n_i = k\} = \sum_{k=0}^{\partial(u)-1} 3^{-k} \text{Card}\{i \mid n_i = k\} + 3^{-\partial(u)} \cdot 2,$$

следовательно

$$3^{\partial(u)} = 1 + \sum_{k=0}^{\partial(u)-1} 3^{\partial(u)-k} \text{Card}\{i \mid n_i = k\}$$

или

$$3^{\partial(u)} = 2 + \sum_{k=0}^{\partial(u)-1} 3^{\partial(u)-k} \text{Card}\{i \mid n_i = k\}.$$

В обоих случаях равенство возможно только при $\partial(u) = 0$, т.е. когда $u = x$ или $r = 1$. $\square$

Лемма 5.7. $L_X \subseteq CG_X$.

Доказательство. Пусть $u = \sum_{i=1}^r \alpha^{n_i} x_i \in L_X$. Индукцией по r докажем, что $u \in CG_X$. Для $r = 1$ утверждение следует из леммы 5.5. (Отметим, что случай $r = 2$ невозможен, так как, в этом случае $u \notin L_X$. Действительно, если $u = \alpha^k x_1 + \alpha^m x_2 \in L_X$, то $3^{-k} \cdot 1 + 3^{-m} \cdot 1 = 1$ или $3^{k-m} + 1 = 3^k$ (если $k \geq m$), что невозможно). Допустим $r \geq 3$. Положим $n = \partial(u)$. Согласно лемме 5.6 имеем $\text{Card}\{i \mid n_i = \partial(u)\} \geq 3$, поэтому существуют три различных целых числа $c, d, m \in \{1, \dots, r\}$ такие, что $n_c = n_d = n_m = n$. Положим

$$v = \sum_{i \neq c, d, m} \alpha^{n_i} x_i + \alpha^{n-1} x_c$$

(очевидно $n \geq 1$). Легко видеть, что $v \in L_X$. Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\partial(v)} 3^{-k} \text{Card}\{i \mid n_i = k\} &= \sum_{k=0}^{\partial(u)} 3^{-k} \text{Card}\{i \mid n_i = k\} - 3^{-n} \cdot 3 + 3^{-(n-1)} = \\ &= \sum_{k=0}^{\partial(u)} 3^{-k} \text{Card}\{i \mid n_i = k\} = 1. \end{aligned}$$

Длина v меньше r , следовательно согласно индуктивному предположению $v \in CG_X$.

Обозначим через h единственный гомоморфизм из W_X на CG_X такой, что $h(x) = x$ для всех $x \in X$. Имеем $v = h(t)$ для некоторого $t \in W_X$. Согласно лемме 5.1 имеем

$$v = h(t) = \sum_{e \in I^*(t)} \alpha^{\partial(e)} t_{[e]}.$$

Поэтому существует $e \in I_{n-1}(t)$ такой, что $t_{[e]} = x_c$. Положим $w = \sigma_{e: x_c x_d x_m}(t)$. Из леммы 5.1 следует, что $h(w) = u$ и следовательно $u \in CG_X$. $\square$

Теорема 5.1 следует из лемм 5.2, 5.4, 5.7.

6. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОММУТАТИВНЫХ МЕДИАЛЬНЫХ ТЕРНАРНЫХ ГРУППОИДОВ

Будем говорить, что n -арный группоид $Q(A)$ имеет линейное представление, если существуют коммутативный моноид $S(+, 0)$ и система его коммутирующих

эндоморфизмов $\{f_i \mid i = 1, \dots, n\}$, такие что $Q \subseteq S$ и операция A может быть представлена в виде

$$A(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n) + a$$

для всех $x_1, \dots, x_n \in Q$, где a некоторый фиксированный элемент S .

Линейное представление называется точным, если $Q = S$ и выпуклым, если $a = 0$.

Теорема 6.1 (ср. с [15], 4.3.1). *Пусть $G(\cdot)$ – коммутативный медиальный тернарный группоид. Тогда он имеет выпуклое линейное представление $S(+, 0, f, g, h)$ такое, что $f = g = h$ и f – автоморфизм $S(+)$, т.е. существуют коммутативный моноид $S(+, 0)$ и его автоморфизм f такие, что $G \subseteq S$ и $(xyz) = f(x) + f(y) + f(z)$ для всех $x, y, z \in G$.*

Доказательство теоремы разобьем на несколько лемм.

Пусть $A[\cdot]$ коммутативный медиальный тернарный группоид. Обозначим через h единственный гомоморфизм из CG_A на $A[\cdot]$ такой, что $h(x) = x$ для всех $x \in A$.

Определим бинарное отношение R на CF_A следующим образом:

$(u, v) \in R$ тогда и только тогда, когда существуют $w \in CF_A$, $x, y, z, a \in A$ и $c \geq 0$ такие, что $u = w + \alpha^c x$, $v = w + \alpha^{c+1} y + \alpha^{c+1} z + \alpha^{c+1} a$ и $x = [yza]$.

Далее, определим бинарное отношение $\bar{R}$ на CF_A следующим образом:

$(u, v) \in \bar{R}$ тогда и только тогда, когда существуют $m \geq 0$ и $u_0, \dots, u_m \in CF_A$ такие, что $u_0 = u$, $u_m = v$ и $(u_{i-1}, u_i) \in R \cup R^{-1}$ для всех $i \in \{1, \dots, m\}$.

Лемма 6.1. *Следующие утверждения справедливы:*

- (1) $\bar{R}$ конгруэнция алгебры $CF_A(+, 0, \alpha)$;
- (2) Если $u, v \in CF_A$ и $(\alpha u, \alpha v) \in \bar{R}$, то $(u, v) \in \bar{R}$;
- (3) Если $(u, v) \in \bar{R}$, тогда $u \in CG_A$ тогда и только тогда, когда $v \in CG_A$;
- (4) Если $x, y, z, a \in A$ и $x = [yza]$, то $(x, (yza)) \in \bar{R}$.

Доказательство. (1). Очевидно $\bar{R}$ – отношение эквивалентности. Покажем, что $\bar{R}$ – конгруэнция. Пусть $(u, v) \in \bar{R}$, тогда существуют $m \geq 0$ и $u_0, \dots, u_m \in CF_A$ такие, что $u_0 = u$, $u_m = v$ и $(u_{i-1}, u_i) \in R \cup R^{-1}$ для всех $i \in \{1, \dots, m\}$. Ясно, что $u_0 + t = u + t$, $u_m + t = v + t$. Остается показать, что $(u_{i-1} + t, u_i + t) \in R \cup R^{-1}$ для всех $i \in \{1, \dots, m\}$. Так как $(u_{i-1}, u_i) \in R \cup R^{-1}$, то $u_{i-1} = w + \alpha^c x$,

$u_i = w + \alpha^{c+1}y + \alpha^{c+1}z + \alpha^{c+1}a$, поэтому $u_{i-1} + t = (w + t) + \alpha^c x$, $u_i + t = (w + t) + \alpha^{c+1}y + \alpha^{c+1}z + \alpha^{c+1}a$, что означает $(u + t, v + t) \in \overline{R}$. Аналогично проверяется, что если $(u, v) \in \overline{R}$, то $(\alpha u, \alpha v) \in \overline{R}$.

(2). Пусть $(\alpha u, \alpha v) \in \overline{R}$, тогда $u_0 = \alpha u$, $u_m = \alpha v$ и $(u_{i-1}, u_i) \in R \cup R^{-1}$ для всех $i \in \{1, \dots, m\}$. Ясно, что $\alpha u'_0 = \alpha u$, $\alpha u'_m = \alpha v$ и $(\alpha u'_{i-1}, \alpha u'_i) \in R \cup R^{-1}$, поэтому $\alpha u'_{i-1} = w + \alpha^c x$, $\alpha u'_i = w + \alpha^{c+1}y + \alpha^{c+1}z + \alpha^{c+1}a$, следовательно w так-же начинается с α , поэтому получаем $u'_{i-1} = w' + \alpha^{c-1}x$, $u'_i = w' + \alpha^c y + \alpha^c z + \alpha^c a$, что означает $(u'_{i-1}, u'_i) \in R \cup R^{-1}$ и $u = u'_0, \dots, v = u'_m$, т.е. $(u, v) \in \overline{R}$.

(3). Следует из леммы 5.3.

(4). Пусть $x, y, z, a \in A$ и $x = [yza]$. Имеем $x = 0 + x$, $(yza) = 0 + \alpha y + \alpha z + \alpha a$, т.е. $(x, (yza)) \in \overline{R}$ ($c = 0, u_0 = x, u_1 = (yza)$). $\square$

Лемма 6.2. Пусть $(u, v) \in R$ и $u, v \in CG_A$. Тогда $h(u) = h(v)$.

Доказательство. Имеем $u = w + \alpha^c x$, $v = w + \alpha^{c+1}y + \alpha^{c+1}z + \alpha^{c+1}a$ для некоторого $w \in CF_A$, $c \geq 0$ и $x, y, z, a \in A$ таких, что $x = [yza]$. Обозначим через g гомоморфизм W_A на CG_A такой, что $g(x) = x$ для всех $x \in A$. Существует $t \in W_A$ такой, что $g(t) = u$. Согласно лемме 5.1 существует $e = a_1 \dots a_c \in I_c(t)$ такой, что $t_{[e]} = x$. Согласно лемме 2.7 имеем

$$\begin{aligned} t &= [t_{[e]}, t_{[a_1 \dots \bar{a}_c]}, a_c, \bar{a}_c, t_{[a_1 \dots \bar{a}_c]}, t_{[a_1 \dots \bar{a}_{c-1}]}, a_{c-1}, \bar{a}_{c-1}, t_{[a_1 \dots \bar{a}_{c-1}]}, t_{[a_1 \dots \bar{a}_{c-2}]}, \\ &\quad a_{c-2}, \bar{a}_{c-2}, \dots, t_{[a_1 \bar{a}_2]}, t_{[\bar{a}_1]}, a_1, \bar{a}_1, t_{[\bar{a}_1]}] = \\ &= [t_{[e]}, t_{2c}, a_c, \bar{a}_c, t_{2c-1}, t_{2c-2}, a_{c-1}, \bar{a}_{c-1}, t_{2c-3}, t_{2c-4}, a_{c-1}, \bar{a}_{c-1}, \dots, t_3, t_2, a_1, \bar{a}_1, t_1], \end{aligned}$$

для некоторых термов $t_1, t_2, \dots, t_{2c} \in W_A$. Положим $u_i = g(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, 2c$. Тогда $u_1, \dots, u_{2c} \in CG_A$, поэтому будем иметь

$$\begin{aligned} u &= g(t) = g(((\dots((xt_{2c}t_{2c-1})t_{2c-2}t_{2c-3})\dots)t_2t_1)) = \\ &= (((\dots((xu_{2c}u_{2c-1})u_{2c-2}u_{2c-3})\dots)u_2u_1)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u &= \alpha^c x + \alpha^c u_{2c} + \alpha^c u_{2c-1} + \alpha^{c-1} u_{2c-2} + \alpha^{c-1} u_{2c-3} + \dots + \alpha u_2 + \alpha u_1, \\ v &= \alpha^{c+1} y + \alpha^{c+1} z + \alpha^{c+1} a + \alpha^c u_{2c} + \alpha^c u_{2c-1} + \alpha^{c-1} u_{2c-2} + \alpha^{c-1} u_{2c-3} + \dots + \alpha u_1. \end{aligned}$$

Таким образом получаем

$$\begin{aligned} h(u) &= [[\dots [[xh(u_{2c})h(u_{2c-1})]h(u_{2c-2})h(u_{2c-3})]\dots]h(u_2)h(u_1)] = \\ &= [[\dots [[[yza]h(u_{2c})h(u_{2c-1})]h(u_{2c-2})h(u_{2c-3})]\dots]h(u_2)h(u_1)] = h(v). \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 6.3. Пусть $x, y \in A$ и $(x, y) \in \bar{R}$. Тогда $x = y$.

Доказательство. Из леммы 6.1 (3) следует, что $x, y \in CG_A$, поэтому согласно лемме 6.2 имеем $h(x) = h(y)$, т.е. $x = y$. $\square$

Лемма 6.4. Тернарный группоид $A[]$ имеет выпуклое линейное представление $S(+, 0, f, f, f)$ такое, что f – инъективный эндоморфизм $S(+)$.

Доказательство. Из определения $\bar{R}$ и леммы 6.3 следует, что алгебра изоморфная алгебре $CF_A(+, 0, \alpha, \alpha, \alpha)/\bar{R}$ будет выпуклым линейным представлением группоида $A[]$. Согласно лемме 6.1 (2) соответствующий эндоморфизм инъективен. $\square$

Теорема 6.1 следует из леммы 6.4 и следующего предложения [15, Предложение 1.1.1]:

Предложение 6.1. Пусть Δ – сигнатура, а $F^{(1)}, \dots, F^{(n)}$ – символы унарных операций из Δ . Пусть A будет Δ -алгеброй такой, что операции $F_A^{(i)}$ инъективные эндоморфизмы A для всех $i = 1, \dots, n$. Тогда существует Δ -алгебра B со следующими свойствами:

- (1) A подалгебра B и существует цепь $B_0 \subseteq B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$ подалгебр B такая, что B_i изоморфны A для всех $i = 0, 1, \dots$ и B объединение этой цепи;
- (2) $F_B^{(i)}$ автоморфизмы B для всех $i = 0, 1, \dots, n$;
- (3) алгебры A, B удовлетворяют одним и тем же тождествам.

Abstract. The paper studies the class of commutative medial ternary groupoids. A construction of ternary semiterms is given and proved that the equational theory of medial commutative ternary groupoids is solvable, namely, an algorithm is found, which in all medial commutative ternary groupoids verifies the validity of the identity

$u = v$ for any pair (u, v) of terms. A construction of free medial commutative ternary groupoids is given, and it is proved that any medial commutative ternary groupoid has a convex linear representation.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. Dorn, "Untersuchungen Überverallgemeinerten Gruppenbegriff", Math. Zeitscher., Bd. 29, 1 – 19 (1928).
- [2] E. L. Post, "Polyadic groups", Trans. Amer. Math. Soc. **48**, №2, 208 – 350 (1940).
- [3] С. А. Чунихин, "К теории неассоциативных n -групп с постулатом К.", ДАН СССР, **48**, №1, 7 – 10 (1945).
- [4] В. Д. Белоусов, А. С. Бектенов, "Пространственные сети и их координатизация I", Ткани и квазигруппы, Калинин: КГУ, 157 – 166 (1981).
- [5] В. Д. Белоусов, А. С. Бектенов, "Пространственные сети и их координатизация II", Ткани и квазигруппы, Калинин: КГУ, 30 – 45 (1982).
- [6] А. А. Гварамия, "Квазимногообразия автоматов. Связи с квазигруппами", Сиб. мат. журнал, XXVI, №3, 11 – 30 (1985).
- [7] А. И. Мальцев, Итеративные алгебры Поста, Изд. НГУ, Новосибирск (1976).
- [8] В. М. Глушков, Г. Е. Цейтлин, Е. Л. Ющенко, Алгебра, языки, программирование, Наукова думка, Киев (1974).
- [9] В. Д. Белоусов, n -арные квазигруппы, Штиинца, Кишинев (1972).
- [10] С. А. Русаков, Алгебраические n -арные системы. Силовская теория n -ых групп, Наука і техника, Минск (1992).
- [11] J. Usan, n -Groups in the light of the neutral operations, Mathematica Moravica, Special Vol.(2003).
- [12] Ю. М. Мовсисян, Введение в теорию алгебр со сверхтождествами, Изд. ЕГУ, Ереван (1986).
- [13] A. Marini, V. Shcherbacov, "On autotopies and automorphisms of n -ary linear quasigroups", Algebra and Discrete Mathematics, **2**, 59 – 83 (2004).
- [14] J. Jezek, T. Kepka, "Equational theories of medial groupoids", Algebra Universalis, **17**, 174 – 190 (1983).
- [15] J. Jezek, T. Kepka, Medial groupoids, Rozprawy CSAV 93/2, Academia, Praha (1983).
- [16] J. Jezek, T. Kepka, "Free entropic groupoids", CMUC, **22**, 223 – 233 (1981).
- [17] А. Г. Куроп, Общая алгебра, Наука, Москва (1974).
- [18] A. B. Romanowska, J. D. H. Smith, Modes, World Scientific, Singapore (2002).
- [19] Ю. М. Мовсисян, "Сверхтождества в алгебрах и многообразиях", Успехи Математических Наук, **53(1)**, 61 – 114 (1998).
- [20] J. D. H. Smith, "Entropy, character theory and centrality of finite quasigroups", Math.Proc.CambridgePhilos. Soc., **108**, 435 – 443 (1990).

Поступила 12 октября 2010