**НЕТРИВИАЛЬНЫЕ СВЕРХТОЖДЕСТВА
АССОЦИАТИВНОСТИ В ПОЛУГРУППАХ**

Ю. М. МОВСИСЯН, Т. А. АКОПЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *yurimovsisyan@yahoo.com*

Аннотация. В статье характеризуется класс полугрупп в которых существенно выполняется нетривиальное сверхтождество ассоциативности. Доказывается, что в отличие от тривиального сверхтождества ассоциативности, класс всех полугрупп в которых существенно выполняется нетривиальное сверхтождество ассоциативности – конечное объединение конечно-базируемых многообразий полугрупп. Причем, явно выписываются базисные тождества всех многообразий.

MSC2000 number: 20M07, 08A05, 08A40, 03C05, 03C85.

Ключевые слова: Полугруппа, сверхтождество ассоциативности, существенная выполняемость, многообразие полугрупп.

1. ВВЕДЕНИЕ

Напомним, что сверхтождеством [1] называется формула второго порядка вида:

$$\forall X_1, \dots, X_m \forall x_1, \dots, x_n \quad (\omega_1 = \omega_2) \quad (*)$$

где ω, ω – слова (термы) в алфавите функциональных переменных $X_1, \dots, X_m$ и предметных переменных $x_1, \dots, x_n$. Однако сверхтождество обычно пишется без кванторной приставки: $\omega_1 = \omega_2$. Будем говорить, что сверхтождество $\omega_1 = \omega_2$ выполняется в алгебре (Q, Σ) , если это равенство справедливо когда каждая функциональная переменная X_i заменяется любой операцией той же арности из Σ (предполагается возможность такой замены), а каждая предметная переменная x_j заменяется любым элементом из Q .

Многообразие V удовлетворяет данному сверхтождеству, если каждая алгебра этого многообразия удовлетворяет этому сверхтождеству. В этом случае сверхтождество называется сверхтождеством многообразия V .

Сверхтождество (*) называется нетривиальным, если $m > 1$, и тривиальным, если $m = 1$. Число m называется функциональным рангом сверхтождества (*).

Бинарная алгебра (Q, Σ) называется q -алгеброй (e -алгеброй), если существует операция $A \in \Sigma$ такая, что $Q(A)$ – квазигруппа (группоид с единицей). Бинарную алгебру (Q, Σ) назовем нетривиальной, если $|\Sigma| > 1$. Известно [1, 2] (см. также [3, 4]), что если нетривиальное сверхтождество ассоциативности выполняется в нетривиальной q -алгебре (e -алгебре), тогда оно может быть только функционального ранга 2 и одного из следующих видов:

$$(1.1) \quad X(x, Y(y, z)) = Y(X(x, y), z),$$

$$(1.2) \quad X(x, Y(y, z)) = X(Y(x, y), z),$$

$$(1.3) \quad Y(x, Y(y, z)) = X(X(x, y), z),$$

причем в классе q -алгебр (e -алгебр) из сверхтождества (1.3) следует сверхтождество (1.2), а из (1.2) следует сверхтождество (1.1).

Пусть $Q(\cdot)$ – полугруппа. Следующая функция называется бинарным полиномом (многочленом, термом) полугруппы $Q(\cdot)$:

$$f(x, y) = z_1^{\varepsilon_1} z_2^{\varepsilon_2} \dots z_n^{\varepsilon_n},$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \in \mathbb{N}$, $z_1, z_2, \dots, z_n \in \{x, y\}$ и $z_i \neq z_{i+1}$.

Совокупность всех бинарных полиномов полугруппы $Q(\cdot)$ обозначим через Q_{pol}^2 . Будем говорить, что в полугруппе $Q(\cdot)$ полиномиально выполняется сверхтождество $(*)$, если в бинарной алгебре (Q, Q_{pol}^2) выполняется это сверхтождество. В работе [5] доказывается, что класс всех полугрупп, в которых полиномиально выполняется тривиальное сверхтождество ассоциативности

$$X(x, X(y, z)) = X(X(x, y), z), \quad (*, *)$$

образует конечно-базируемое многообразие (причем указывается базис, содержащий около 1000 тождеств). В работе [6] (см. также [7]) указывается базис тождеств этого многообразия, содержащий 5 тождеств.

Через Q_{epol}^2 обозначим множество всех бинарных полиномов $f(x, y)$ полугруппы $Q(\cdot)$, каждый из которых существенно зависит от обоих аргументов x, y (см. определения 2.1 и 2.2 ниже).

Будем говорить, что в полугруппе $Q(\cdot)$ существенно выполняется сверхтождество $(*)$, если в алгебре (Q, Q_{epol}^2) выполняется это сверхтождество. В работе [8] доказывается, что класс всех полугрупп, в которых существенно выполняется тривиальное сверхтождество $(*, *)$, образует многообразие, определяемое четырьмя тождествами (см. также [9, 10]).

Однако характеристика полугрупп, в которых существенно выполняется одно из следующих нетривиальных сверхтождеств ассоциативности, оставалось открытой: (1.1)–(1.3),

$$(1.4) \quad Y(Y(x, y), z) = X(x, Y(y, z)),$$

$$(1.5) \quad Y(X(x, y), z) = Y(x, Y(y, z)),$$

$$(1.6) \quad X(Y(x, y), z) = Y(x, Y(y, z)),$$

$$(1.7) \quad Y(Y(x, y), z) = Y(x, X(y, z)),$$

$$(1.8) \quad X(Y(x, y), z) = Z(x, X(y, z)),$$

$$(1.9) \quad X(Y(x, y), z) = Z(x, Y(y, z)),$$

$$(1.10) \quad X(Y(x, y), z) = X(x, Z(y, z)),$$

$$(1.11) \quad X(Y(x, y), z) = Y(x, Z(y, z)),$$

$$(1.12) \quad X(Y(x, y), z) = Z(x, T(y, z));$$

В настоящей работе доказывается, что в отличие от тривиального сверхтождества ассоциативности, класс всех полугрупп, в которых существенно выполняется нетривиальное сверхтождество ассоциативности – конечное объединение конечно-базируемых многообразий полугрупп. Причем, явно выписываются базисные тождества этих многообразий. В результате, классифицируются нетривиальные сверхтождества ассоциативности с точностью до существенной выполнимости. Оказывается, что в смысле существенной выполнимости, в полугруппах каждое нетривиальное сверхтождество ассоциативности эквивалентно одному из сверхтождеств (1.1)–(1.5).

2. СВЕРХТОЖДЕСТВО (1.1) В ПОЛУГРУППАХ

Определение 2.1. Будем говорить, что бинарный многочлен $F(x, y)$ в полугруппе $Q(\cdot)$ существенно зависит от предметной переменной x , если существуют $x_1, x_2, y \in Q$ такие, что $F(x_1, y) \neq F(x_2, y)$.

Точно так же определяется существенная зависимость бинарного многочлена $F(x, y)$ от предметной переменной y .

Определение 2.2. Назовем бинарный многочлен $F(x, y)$ существенным, если он существенно зависит от обеих переменных x и y .

Определение 2.3. Два сверхтождества назовем эквивалентными, если в любой полугруппе $Q(\cdot)$ эти сверхтождества либо одновременно существенно выполняются, либо ни одно из них существенно не выполняется. Будем говорить, что сверхтождество (h_2) вытекает из сверхтождества (h_1) (и обозначим $(h_1) \rightarrow (h_2)$), если во всех полугруппах, где существенно выполняется сверхтождество (h_1) , существенно выполняется также и сверхтождество (h_2) .

Докажем следующую вспомогательную лемму, которой воспользуемся при доказательстве основных результатов.

Рассмотрим следующее множество тождеств:

$$(2.1) \quad \begin{cases} xyz = zxy, \\ x^2yz = xy^2z, \\ x^3yz = x^2yz. \end{cases}$$

Лемма 2.1. Любой существенный многочлен $X(x, y)$ полугруппы $Q(\cdot)$ с тождествами (2.1), равен одному из многочленов множества

$$P = \{xy, yx, x^2y, xy^2, x^2y^2\}.$$

Доказательство. Выражение x^0 будем считать пустым. Если многочлен $X(x, y) = AtBtC$, где $t \in \{x, y\}$ и A, B, C суть слова (могут быть и пустыми), то $X(x, y) = A(tBt)C = At^2BC$. Отсюда вытекает, что любой существенный многочлен может быть представлен в одном из следующих видов: $X(x, y) = x^m y^n$, где $n, m \in \mathbb{N}$ или $X(x, y) = yx$.

Пусть $X(x, y)$ – любой существенный многочлен полугруппы $Q(\cdot)$. Если $X(x, y) = yx$, то лемма доказана. Если $X(x, y) \neq yx$, то этот многочлен можно привести к виду: $X(x, y) = x^m y^n$, где $m, n \in \mathbb{N}$. Если $m, n \leq 2$, то $X(x, y) \in P$. Предположим, что $n \geq 3$ (если $m \geq 3$, то этот случай доказывается аналогично). В третьем тождестве (2.1) принимая $z = y$, получим $x^3 y^2 = x^2 y^2$. Поскольку из первого тождества следует $x^2 z = z x^2$, то $x^2 y^3 = y^3 x^2 = y^2 x^2 = x^2 y^2$. Если $m \geq 2$, то $X(x, y) = x^m y^n = x^{m-2} x^2 y^3 y^{n-3} = x^{m-2} x^2 y^2 y^{n-3} = x^m y^{n-1}$.

А если $m = 1$, то $X(x, y) = xy^n = xy^3 y^{n-3} = (xy^2 y) y^{n-3} = (x^2 y y) y^{n-3} = x^2 y^{n-1}$, т.е. сводится к предыдущему случаю. Такими шагами степени переменных в многочлене $X(x, y)$ можно снизить до двух. Тогда многочлен $X(x, y)$ будет равным одному из многочленов множества P . $\square$

Теорема 2.1. В полугруппе $Q(\cdot)$ существенно выполняется сверхтождество (1.1) тогда и только тогда, когда эта полугруппа удовлетворяет одному из следующих систем тождеств:

$$(2.2) \quad \begin{cases} xyz = zxy, \\ x^2yz = xy^2z, \\ x^3yz = x^2yz, \end{cases}$$

$$(2.3) \quad \{ xy = x^2, \}$$

$$(2.4) \quad \{ xy = y^2, \}$$

$$(2.5) \quad \begin{cases} xyz = xzy = zxy, \\ x^2y = x^3, \end{cases}$$

$$(2.6) \quad \begin{cases} xyz = xzy = zxy, \\ x^2y = y^3. \end{cases}$$

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим случай, когда многочлен xy несущественный. В этом случае $xy = x^2$ или $xy = y^2$ и выполняется условие (2.3) или (2.4). Пусть многочлен xy существенный. Тогда и многочлен yx будет существенным. Принимая в (1.1) $X(x, y) = xy$ и $Y(x, y) = yx$, будем иметь $yxz = yzx$, т.е. $xyz = xzy$. Принимая в (1.1) $X(x, y) = yx$ и $Y(x, y) = xy$, будем иметь $zxy = xzy$, т.е. $xzy = zxy$. Итак, $xyz = xzy = zxy$. Рассмотрим случай, когда многочлен x^2y несущественный. Тогда, или $x^2y = x^3$, или $x^2y = y^3$. Следовательно, имеет место (2.5) или (2.6).

Теперь предположим, что многочлены xy , yx , x^2y существенные. В этом случае $xy^2 = xyy = yxy = yux = y^2x$ и поэтому многочлен xy^2 существенный.

Принимая в (1.1) $X(x, y) = xy$ и $Y(x, y) = xy^2$, будем иметь $xy^2z = xy^2z^2$.

Следовательно

$$x^2yz = x^2zy = zx^2y = zx^2y^2 = zy^2x^2 = zy^2x = zxy^2 = xzy^2 = xy^2z.$$

Тем самым доказаны первое и второе тождества в (2.2).

Докажем третье тождество в (2.2). Принимая $z = x$ во втором тождестве (2.2), получим

$$x^2y^2 = xxy^2 = xy^2x = x^2yx = x^2xy = x^3y,$$

т.е. $x^3yz = x^2y^2z = zx^2y^2 = zx^2y = x^2yz$, которое и есть третье тождество.

Достаточность. А) Пусть в полугруппе $Q(\cdot)$ имеет место (2.2). Согласно лемме 2.1, любой существенный многочлен $X(x, y)$ принадлежит множеству

$$P = \{xy, yx, x^2y, xy^2, x^2y^2\}.$$

Рассмотрим эти случаи в отдельности.

(1) При $X(x, y) = xy$ сверхтождество (1.1) принимает вид $X(Y(x, y), z) = Y(x, X(y, z))$ и сводится к равенству: $Y(x, y)z = Y(x, yz)$. Проверим справедливость полученного равенства при всех значениях $Y(x, y) \in P$.

1.1. $Y(x, y) = xy \rightarrow xyz = xyz;$

1.2. $Y(x, y) = yx \rightarrow yxz = yxz;$

1.3. $Y(x, y) = x^2y \rightarrow x^2yz = x^2yz;$

1.4. $Y(x, y) = xy^2 \rightarrow xy^2z = xy^2z^2;$

1.5. $Y(x, y) = x^2y^2 \rightarrow x^2y^2z = x^2y^2z^2;$

(2) При $X(x, y) = yx$ сверхтождество (1.1) принимает вид $zY(x, y) = Y(x, zy)$.

(3) При $X(x, y) = x^2y$ сверхтождество (1.1) принимает вид $(Y(x, y))^2z = Y(x, y^2z)$.

Справедливость сверхтождества (1.1) доказывается подстановкой в полученные тождества всевозможных значений $Y(x, y) \in P$.

(4) Пусть $X(x, y) = xy^2$. Необходимо доказать, что $Y(x, y)z^2 = Y(x, yz^2)$. Из

(1) имеем $Y(x, y)z = Y(x, yz) \rightarrow Y(x, y)z^2 = Y(x, yz^2)$.

(5) Пусть $X(x, y) = x^2y^2$. Необходимо доказать, что $(Y(x, y))^2z^2 = Y(x, y^2z^2)$.

Из (3) имеем $(Y(x, y))^2z = Y(x, y^2z) \rightarrow (Y(x, y))^2z^2 = Y(x, y^2z^2)$.

Б) Если выполнены условия (2.3) или (2.4), то не существует существенного многочлена.

В) Пусть имеет место условие (2.5). В этом случае, только многочлены xy и yx могут быть существенными, а по первому тождеству (2.5), сверхтождество (1.1) существенно выполняется в $Q(\cdot)$.

Г) Пусть имеет место условие (2.6). В этом случае, только многочлены xy и yx могут быть существенными, а по первому тождеству (2.6) сверхтождество (1.1) существенно выполняется в $Q(\cdot)$. $\square$

3. СВЕРХТОЖДЕСТВО (1.2) В ПОЛУГРУППАХ

Теорема 3.1. *В полугруппе $Q(\cdot)$ существенно выполняется сверхтождество (1.2) тогда и только тогда, когда эта полугруппа удовлетворяет одному из следующих систем тождеств:*

$$(3.1) \quad \begin{cases} xyz = zxy, \\ x^2yz = xy^2z, \\ x^3yz = x^2yz, \end{cases}$$

$$(3.2) \quad \{ \quad xy = x^2 \quad ,$$

$$(3.3) \quad \{ \quad xy = y^2 \quad ,$$

$$(3.4) \quad \begin{cases} xyz = zxy, \\ x^2y = x^3, \end{cases}$$

$$(3.5) \quad \begin{cases} xyz = zxy, \\ x^2y = y^3. \end{cases}$$

Доказательство. Необходимость. Если многочлен xy несущественный, то выполняется условие (3.2) или (3.3). Пусть многочлен xy существенный. Тогда и многочлен yx будет существенным. Принимая в (1.2) $X(x, y) = xy$ и $Y(x, y) = yx$, будем иметь $yxz = xzy$ и $xyz = yzx = zxy$. Рассмотрим случай, когда многочлен x^2y несущественный. Тогда, или $x^2y = x^3$ или $x^2y = y^3$. Следовательно, в полугруппе $Q(\cdot)$ удовлетворяется или (3.4) или (3.5). Предположим, что многочлены xy , yx , x^2y существенные. Принимая в (1.2) $X(x, y) = xy$ и $Y(x, y) = x^2y$, будем иметь $x^2yz = xy^2z$.

Тем самым доказаны первое и второе тождество в (3.1). Докажем третье тождество в (3.1). Принимая $z = y$ во втором тождестве (3.1), получим

$$x^2y^2 = xy^3 = xuy^2 = y^2xy = y^2yx = y^3x.$$

Так как $x^2y^2 = x^2yy = yx^2y = yux^2 = y^2x^2$, получим $x^2y^2 = y^2x^2 = x^3y$. Принимая в (1.2) $X(x, y) = x^2y$ и $Y(x, y) = xy$, будем иметь: $xyxuz = x^2yz$, т.е. $x^2yz = (xyx)yz = x^2y^2z = x^3yz$, которое и есть третье тождество.

Достаточность. Пусть в полугруппе $Q(\cdot)$ имеет место условие (3.1). Согласно лемме 2.1, любой существенный многочлен $X(x, y)$ принадлежит множеству $P = \{xy, yx, x^2y, xy^2, x^2y^2\}$.

Обсудим эти случаи в отдельности.

(1) При $X(x, y) = xy$ сверхтождество (1.2) принимает вид $Y(x, y)z = xY(y, z)$.

Справедливость сверхтождества (1.2) доказывается подстановкой в полученное тождество всевозможных значений $Y(x, y) \in P$.

(2) Пусть $X(x, y) = yx$. Необходимо доказать, что $zY(x, y) = Y(y, z)x$. По первому тождеству (3.1) $zX(x, y) = Y(x, y)z$ и $Y(y, z)x = xY(y, z)$, а по пункту 1: $Y(x, y)z = xY(y, z)$, т.е. $zY(x, y) = Y(y, z)x$, что и требовалось доказать.

(3) При $X(x, y) = x^2y$ сверхтождество (1.2) принимает вид $x^2Y(y, z) = (Y(x, y))^2z$.

(4) При $X(x, y) = xy^2$ сверхтождество (1.2) принимает вид $x(Y(y, z))^2 = Y(x, y)z^2$.

(5) При $X(x, y) = x^2y^2$ сверхтождество (1.2) принимает вид $x^2(Y(y, z))^2 = (Y(x, y))^2z^2$.

Справедливость сверхтождества (1.2) доказывается подстановкой в полученные тождества всевозможных значений $Y(x, y) \in P$.

В остальных случаях, т.е. в условиях (3.2)–(3.5), справедливость сверхтождества (1.2) доказывается точно также, как доказывается справедливость (1.1) в пунктах Б)–Г) теоремы 2.1. $\square$

4. СВЕРХТОЖДЕСТВО (1.3) В ПОЛУГРУППАХ

Теорема 4.1. *В полугруппе $Q(\cdot)$ существенно выполняется сверхтождество (1.3) тогда и только тогда, когда эта полугруппа удовлетворяет одному из следующих систем тождеств:*

$$(4.1) \quad \begin{cases} xyz = zxy, \\ x^2yz = xyz, \end{cases}$$

$$(4.2) \quad \{ xy = x^2, \}$$

$$(4.3) \quad \{ xy = y^2, \}$$

$$(4.4) \quad \begin{cases} xyz = zyx, \\ x^2y = x^3, \end{cases}$$

$$(4.5) \quad \begin{cases} xyz = zyx, \\ x^2y = y^3. \end{cases}$$

Доказательство. Необходимость. Если многочлен xy несущественный, то выполняется условие (4.2) или (4.3). Пусть многочлен xy существенный. Тогда и многочлен yx будет существенным. Принимая в (1.3) $X(x, y) = xy$ и $Y(x, y) = yx$, будем иметь $xyz = zyx$.

Пусть многочлен x^2y несущественный. Тогда, или $x^2y = x^3$ или $x^2y = y^3$. Следовательно, удовлетворяется или (4.4) или (4.5).

Предположим, что многочлены xy, yx, x^2y существенные. В этом случае $xy^2 = xyu = yux = y^2x$ и поэтому многочлен xy^2 существенный. Принимая в (1.3) $X(x, y) = xy^2$ и $Y(x, y) = xy$, будем иметь $xy^2z^2 = xyz$. Следовательно,

$$xyz = xy^2z^2 = x(yyz^2) = xz^2y^2 = xzy,$$

т.е. $xyz = zyx = zxy$. Тем самым доказано первое тождество в (4.1).

Для доказательства второго тождества в (4.1) заметим, что

$$x^3yz = xx^2yz = xx^2y^2z^2 = xy^2z^2x^2 = xy^2zx = x^2y^2z = xyz,$$

т.е.

$$\begin{aligned} x^2yz &= xxyz = xx^3yz = x^4yz = x^3xyz = x^3x^3yz = x^6yz = x^4x^2yz = \\ &= (x^2)^2x^2(yz) = x^2x(yz) = x^3yz = xyz, \end{aligned}$$

которое и есть второе тождество.

Достаточность. Пусть в полугруппе $Q(\cdot)$ имеет место условие (4.1). Согласно лемме 2.1, любой существенный многочлен $X(x, y)$ принадлежит множеству $P = \{xy, yx, x^2y, xy^2, x^2y^2\}$. Но

$$x^2y^2 = xxy^2 = y^2xx = yxx = yx^2 = x^2y \quad \text{и} \quad xy^2 = xyy = x^2yy = x^2y^2 = x^2y,$$

поэтому $P = \{xy, yx, x^2y\}$. Кроме того

$$xyz = x^2yz = x(xyz) = xzxy = xz(xy) = xyxz = xzyx = x^2zy = xzy$$

и $zyx = xzy = xyz$. Обсудим все случаи в отдельности.

- (1) При $X(x, y) = xy$ сверхтождество (1.3) принимает вид $Y(x, Y(y, z)) = xyz$. Справедливость сверхтождества (1.3) доказывается подстановкой в полученное тождество всевозможных значений $Y(x, y) \in P$.
- (2) При $X(x, y) = yx$ сверхтождество (1.3) принимает вид $Y(x, Y(y, z)) = zyx = xyz$. Поэтому этот случай совпадает с предыдущим.
- (3) При $X(x, y) = x^2y$ сверхтождество (1.3) принимает вид $Y(x, Y(y, z)) = x^2y^2z = xyz$. Поэтому этот случай совпадает с предыдущим случаем.

В остальных случаях, т.е. в условиях (4.2)–(4.5), справедливость сверхтождества (1.3) доказывается точно также, как доказывается справедливость (1.1) в пунктах Б) - Г) теоремы 2.1. □

5. СВЕРХТОЖДЕСТВА (1.4) И (1.6) В ПОЛУГРУППАХ

Теорема 5.1. *В полугруппе $Q(\cdot)$ существенно выполняется сверхтождество (1.6) тогда и только тогда, когда эта полугруппа удовлетворяет одному из*

следующих систем тождеств:

$$(5.1) \quad \begin{cases} xyz = zxy, \\ x^2yz = xyz, \end{cases}$$

$$(5.2) \quad \{ xy = x^2, \}$$

$$(5.3) \quad \{ xy = y^2, \}$$

$$(5.4) \quad \begin{cases} xyz = zxy, \\ x^2y = x^3, \end{cases}$$

$$(5.5) \quad \begin{cases} xyz = zxy, \\ x^2y = y^3. \end{cases}$$

Доказательство. Необходимость. Если многочлен xy несущественный, то как и в предыдущих теоремах, выполняется условие (5.2) или (5.3). Если же многочлен xy существенный, тогда и многочлен yx будет существенным, поэтому принимая в (1.6) $X(x, y) = xy$ и $Y(x, y) = yx$, будем иметь $xyz = zxy$.

Пусть многочлен x^2y несущественный. Тогда, или $x^2y = x^3$ или $x^2y = y^3$. Следовательно удовлетворяется или (5.4) или (5.5). Предположим, что многочлены xy , yx , x^2y существенные. В этом случае

$$xy^2 = xyu = yxu = yux = y^2x$$

и поэтому многочлен xy^2 существенный. Принимая в (1.6) $X(x, y) = xy^2$ и $Y(x, y) = xy$, будем иметь $xyz^2 = xyz$, т.е. $z^2xy = zxy$, что совпадает со вторым тождеством из (5.1).

Достаточность. Пусть в полугруппе $Q(\cdot)$ имеет место условие (5.1). Согласно лемме 2.1, любой существенный многочлен этой полугруппы принадлежит множеству $P = \{xy, yx, x^2y, xy^2, x^2y^2\}$. Но $x^2y^2 = xxy^2 = y^2xx = yx^2 = x^2y$ и $xy^2 = xyy = x^2yy = x^2y^2 = x^2y$, поэтому $P = \{xy, yx, x^2y\}$. Обсудим все три случая в отдельности.

- (1) При $Y(x, y) = xy$ сверхтождество (1.6) принимает вид $X(xy, z) = xyz$.
- (2) При $Y(x, y) = yx$ сверхтождество (1.6) принимает вид $X(yx, z) = zyx$.
- (3) При $Y(x, y) = x^2y$ сверхтождество (1.6) принимает вид $X(x^2y, z) = x^2y^2z$.

Справедливость сверхтождества (1.6) доказывается подстановкой в полученных тождествах всевозможных значений $Y(x, y) \in P$.

В остальных случаях, т.е. в условиях (5.2)–(5.5), справедливость сверхтождества (1.6) доказывается точно также, как доказывается справедливость сверхтождества (1.1) в пунктах Б)–Г) теоремы 2.1. $\square$

Предложение 5.1. *В полугруппе $Q(\cdot)$ существенно выполняется сверхтождество (1.4) тогда и только тогда, когда в этой полугруппе существенно выполняется сверхтождество (1.6), т.е. сверхтождества (1.4) и (1.6) эквивалентны.*

Доказательство. Сверхтождества (1.6) запишем в виде

$$X(Y(z, y), x) = Y(z, X(y, x)).$$

Заменяя здесь многочлен $X(x, y)$ на $X(y, x)$ (поскольку эти два многочлена существенны или не существенны одновременно) и многочлен $Y(x, y)$ – на $Y(y, x)$ получим:

$$X(x, Y(y, z)) = Y(Y(x, y), z),$$

что является сверхтождеством (1.4). □

6. СВЕРХТОЖДЕСТВА (1.5) И (1.7) В ПОЛУГРУППАХ

Теорема 6.1. *В полугруппе $Q(\cdot)$ существенно выполняется сверхтождество (1.5) тогда и только тогда, когда эта полугруппа удовлетворяет одному из следующих систем тождеств:*

$$(6.1) \quad \begin{cases} xyz = zxy, \\ x^2yz = xyz, \end{cases}$$

$$(6.2) \quad \begin{cases} xy = x^2, \end{cases}$$

$$(6.3) \quad \begin{cases} xy = y^2, \end{cases}$$

$$(6.4) \quad \begin{cases} xyz = xzy = zxy, \\ x^2y = x^3, \end{cases}$$

$$(6.5) \quad \begin{cases} xyz = xzy = zxy, \\ x^2y = y^3. \end{cases}$$

Доказательство. Необходимость. Если многочлен xy несущественный, то выполняется условие (6.2) или (6.3). Если же многочлен xy существенный, тогда и многочлен yx будет существенным и принимая в (1.5) $X(x, y) = yx$ и $Y(x, y) = xy$, будем иметь $yxz = xyz$. Подставляя в (1.5) $X(x, y) = xy$ и $Y(x, y) = yx$, будем иметь $zxy = zyx$, т.е. $xyz = xzy = zxy$.

Пусть многочлен x^2y несущественный. Тогда, или $x^2y = x^3$ или $x^2y = y^3$. Следовательно, удовлетворяется или (6.4) или (6.5). Предположим, что многочлены xy , yx , x^2y существенные. Принимая в (1.5) $X(x, y) = x^2y$ и $Y(x, y) = xy$, будем иметь $x^2yz = xyz$, отсюда и вытекает второе тождество в (6.1).

Достаточность. Пусть в полугруппе $Q(\cdot)$ имеет место условие (6.1). Согласно лемме 2.2, любой существенный многочлен $X(x, y)$ принадлежит множеству $P = \{xy, yx, x^2y, xy^2, x^2y^2\}$. Но $x^2y^2 = xxy^2 = y^2xx = yxx = yx^2 = x^2y$ и $xy^2 = xyu = x^2yu = x^2y^2 = x^2y$, поэтому $P = \{xy, yx, x^2y\}$. Еще имеем, что $xyz = x^2yz = x(xyz) = xzxy = xz(xy) = xyxz = xzyx = x^2zy$ и $zyx = xzy = xyz$. Сейчас обсудим эти случаи в отдельности.

(1) При $Y(x, y) = xy$ сверхтождество (1.5) принимает вид $X(x, y)z = xyz$.

(2) При $Y(x, y) = yx$ сверхтождество (1.5) принимает вид $zX(x, y) = xyz$.

Справедливость сверхтождества (1.5) доказывается подстановкой в полученных тождествах всевозможных значений $Y(x, y) \in P$.

(3) При $Y(x, y) = x^2y$ сверхтождество (1.5) принимает вид $(X(x, y))^2z = xyz$.

Согласно случаю 1, получим

$$X(x, y)^2 = (X(x, y)X(x, y))z = (xyX(x, y))z = (xyxy)z = x^2y^2z = xyz.$$

В остальных случаях, т.е. в условиях (6.2)–(6.5), справедливость сверхтождества (1.5) доказывается точно также, как доказывается справедливость сверхтождества (1.1) в пунктах Б)–Г) теоремы 2.1. $\square$

Предложение 6.1. *В полугруппе $Q(\cdot)$ существенно выполняется сверхтождество (1.7) тогда и только тогда, когда в этой полугруппе существенно выполняется сверхтождество (1.5), т.е. сверхтождества (1.7) и (1.5) эквивалентны.* $\square$

Доказательство. Сверхтождества (1.5) запишем в виде

$$Y(X(z, y), x) = Y(z, Y(y, x)).$$

Заменяя здесь многочлен $X(x, y)$ на $X(y, x)$, получим

$$Y(X(y, z), x) = Y(z, Y(y, x)).$$

Наконец, заменяя здесь многочлен $Y(x, y)$ на $Y(y, x)$, получим

$$Y(x, X(y, z)) = Y(Y(x, y), z),$$

что является сверхтождеством (1.7). $\square$

7. СВЕРХТОЖДЕСТВА АССОЦИАТИВНОСТИ РАНГА 3, 4 В ПОЛУГРУППАХ

Теперь рассмотрим сверхтождества ассоциативности, ранга 3 или 4, т.е. рассмотрим сверхтождества (1.8)–(1.12) в полугруппах.

Предложение 7.1. *В полугруппе $Q(\cdot)$ существенно выполняется сверхтождество (1.8) тогда и только тогда, когда в этой полугруппе существенно выполняется сверхтождество (1.5), т.е. сверхтождества (1.8) и (1.5) эквивалентны.*

Доказательство. Необходимость. В сверхтождестве (1.8) полагая $Z(x, y) = X(x, y)$ получим сверхтождество (1.5):

$$X(Y(x, y), z) = X(x, X(y, z)).$$

Достаточность. Если в полугруппе $Q(\cdot)$ существенно выполняется сверхтождество (1.5), тогда с помощью теорем 6.1 и 5.1, а также предложения 6.1 выводим, что в $Q(\cdot)$ существенно выполняются и сверхтождества (1.3) и (1.7). Поэтому в полугруппе $Q(\cdot)$ существенно выполняется сверхтождество:

$$X(Y(x, y), z) = X(x, X(y, z)) = Z(Z(x, y), z) = Z(x, X(y, z)),$$

что является сверхтождеством (1.8). □

Аналогично доказываются следующие предложения.

Предложение 7.2. *В полугруппе $Q(\cdot)$ существенно выполняется сверхтождество (1.9) тогда и только тогда, когда в этой полугруппе существенно выполняется сверхтождество (1.6), т.е. сверхтождества (1.9) и (1.6) эквивалентны.*

Предложение 7.3. *В полугруппе $Q(\cdot)$ существенно выполняется сверхтождество (1.10) тогда и только тогда, когда в этой полугруппе существенно выполняется сверхтождество (1.5), т.е. сверхтождества (1.10) и (1.5) эквивалентны.*

Предложение 7.4. *В полугруппе $Q(\cdot)$ существенно выполняется сверхтождество (1.11) тогда и только тогда, когда в этой полугруппе существенно выполняется сверхтождество (1.7), т.е. сверхтождества (1.11) и (1.7) эквивалентны.*

Предложение 7.5. *В полугруппе $Q(\cdot)$ существенно выполняется сверхтождество (1.12) тогда и только тогда, когда в этой полугруппе существенно выполняется сверхтождество (1.7), т.е. сверхтождества (1.12) и (1.7) эквивалентны.*

Следствие. Любое сверхтождество ассоциативности ранга 2, 3 или 4 эквивалентно одному из сверхтождеств (1.1) – (1.5). Причем выполнены следующие импликации:

$$(1.5) \rightarrow (1.1) \rightarrow (1.2),$$

$$(1.5) \rightarrow (1.4) \rightarrow (1.2),$$

$$(1.5) \rightarrow (1.3).$$

Abstract. The paper gives a characterization of the class of semigroups in which the nontrivial associative hyperidentity is essentially satisfied. It is proved that, in difference to the case of trivial associative hyperidentity, the class of all semigroups, in which a nontrivial associative hyperidentity is essentially satisfied, is a finite union of finitely based varieties of semigroups, and the basis identities of all varieties are explicitly inscribed.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. М. Мовсисян, Введение в Теорию Алгебр со Сверхтождествами, Изд-во Ереванского госуниверситета (1986).
- [2] Ю. М. Мовсисян, Сверхтождества и Сверхмногообразия в Алгебрах, Изд-во Ереванского госуниверситета (1990).
- [3] Ю. М. Мовсисян, “Сверхтождества в алгебрах и многообразиях”, Успехи мат. Наук, **53**, (1(319)), 61 – 114 (1998).
- [4] Yu. M. Movsisyan, “Hyperidentities and hypervarieties”, Scientiae Mathematicae Japonicae, **54**, no. 3, 595 – 640 (2001).
- [5] K. Denecke, J. Koppitz, “Hyperassociative varieties of semigroups”, Semigroup Forum, **49**, 41 – 49 (1994).
- [6] L. Polak, “On hyperassociativity”, Algebra Universalis, **36**, 363 – 378 (1996).
- [7] L. Polak, “All solid varieties of semigroups”, Journal of Algebra, **219**, 421 – 436 (1999).
- [8] G. Paseman, A small basis for Hyperassociativity, preprint, Berkeley (1993).
- [9] K. Denecke and Sh. L. Wismath, Hyperidentities and Clones, Gordon and Breach Science Publishers (2000).
- [10] J. Koppitz and K. Denecke, M-Solid Varieties of Algebras, Springer (2006).

Поступила 25 августа 2010