Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 3, 2011, стр. 29 – 46.

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОКРУЖНОСТИ СО СДВИГОМ

А. Г. КАМАЛЯН, А. В. САРГСЯН

Ереванский государственный университет
Институт Математики НАН Армении
E-mails: *kamalyan_ armen@yahoo.com*, *ann-sargsyan@yandex.ru*

Аннотация. Работа посвящена исследованию разрешимости характеристических сингулярных интегральных уравнений на окружности со сдвигом Карлемана $\omega(t) = -t$. При дополнительных предположениях на коэффициенты дается явное описание ядра и коядра соответствующих операторов. Метод исследования основан на сведении задачи разрешимости к факторизации некоторой матрицы-функции. Приводится явная факторизация указанной матрицы-функции.

MSC2000 number: 45F99, 47A68.

Ключевые слова: Сингулярные уравнения, сдвиг, факторизация, ядро оператора, коядро.

1. Введение

Пусть $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ – единичная окружность разбивающая комплексную плоскость $\mathbb{C}$ на области $\mathbb{T}_+ = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ и $\mathbb{T}_- = \{z \in \mathbb{C}; |z| > 1\}$. Как известно (см. [1]), сингулярный интегральный оператор S с ядром Коши, определяемый почти всюду на $\mathbb{T}$ по формуле

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1}{\tau - z}\, \varphi(\tau)\, d\tau, \quad t \in \mathbb{T},$$

где интеграл понимается в смысле главного значения, является ограниченным оператором в $L_p = L_p(\mathbb{T})$ для всех $p \in (1; +\infty)$.

Рассмотрим оператор сдвига U и оператор умножения Ξ_d на функцию (матрицу-функцию) d, действующие по формулам

$$(U\varphi)(t) = \varphi(-t), \quad (\Xi_d\varphi)(t) = d(t)\varphi(t), \quad t \in \mathbb{T}.$$

Функцию $U\varphi$ будем обозначать через $\varphi^\wedge$. Пусть $p(z) = \prod\limits_{i=1}^{\nu}(z - \alpha_i)$ – отличный от нуля многочлен на $\mathbb{T}$, тождественно равный единице при $\nu = 0$, а ψ – функция из винеровской алгебры W, т.е. разлагающаяся в абсолютно сходящийся ряд Фурье, инвариантная относительно сдвига ($\psi^\wedge = \psi$).

Настоящая работа посвящена исследованию операторов $F_d, \tilde{F}_d : L_p \to L_p$ ($1 < p < \infty$), определенных равенствами

$$F_d = I + \Xi_d US, \quad \tilde{F}_d = I + US\Xi_d,$$

где I – тождественный оператор, а $d = \frac{p}{p^\wedge}\psi$. Эти уравнения являются сингулярными интегральными уравнениями с сохраняющим ориентацию на $\mathbb{T}$ сдвигом Карлемана $\omega(t) = -t$. Теория сингулярных интегральных операторов со сдвигом Карлемана достаточно полно изложена в [2] - [5]. В настоящее время развита в основном фредгольмова (нетерева) теория этих операторов. Для достаточно широких классов сингулярных интегральных операторов со сдвигом найдены эффективные критерии фредгольмовости и формулы для вычисления индексов этих операторов. Задача определения размерностей ядра, коядра (тем более их описания) и построения обобщенной обратной этих операторов фактически остается открытой. В случае дробно-линейных сдвигов Карлемана в работах [6] - [8] предложен метод сводящий задачу разрешимости сингулярных уравнений со сдвигом на окружности к факторизации некоторой матрицы-функции. В нашем конкретном случае это матрица-функция имеет вид

$$G_{p,\psi} = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\psi^2}{1-\psi^2} & \dfrac{2p}{p^\wedge}\dfrac{\psi}{1-\psi^2} \\ \dfrac{2p^\wedge}{p}\dfrac{\psi}{1-\psi^2} & \dfrac{1+\psi^2}{1-\psi^2} \end{pmatrix}.$$

Матрица-функция $G_{p,\psi}$ входит в класс матриц-функций, факторизация которых исследована в работах [9, 10]. Данное обстоятельство позволяет строить теорию разрешимости указанных уравнений. Важную роль в дальнейшем играют функция $v = (1+\psi)/(1-\psi)$ и числа $\chi = \operatorname{ind} v$, $\nu_- = 2|\chi| - \nu$.

Ниже мы предполагаем выполнение следующих условий:

- d1) $1 - \psi^2(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{T}$;
- d2) многочлены p и $p^\wedge$ не имеют общих корней;
- d3) все корни многочлена находятся либо в $\mathbb{T}_+$ либо в $\mathbb{T}_-$;
- d4) $\nu < |\chi|$.

Условие d1) является необходимым и достаточным условием фредгольмовости операторов F_d и $\tilde{F}_d$ (см. [2]).

2. Факторизация матрицы-функции $G_{p,\psi}$

2.1. Для линейного пространства X через X^n будем обозначать множество n-мерных вектор-столбцов с координатами из X, а через $X^{n\times n}$ множество всех матриц порядка $n\times n$ с компонентами из X.

Определим проекторы $P_\pm = \dfrac{1}{2}(I \pm S)$ и классы функций $L_p^+ = imP_+$, $L_p^- = imP_- \dot{+} \mathbb{C}$. Ниже через τ_k $(k\in\mathbb{Z})$ обозначается функция определенная равенством $\tau_k(t) = t^k$.

Под факторизацией (см. [11, 12]) матрицы-функции $G_{p,\psi}$ в пространстве L_p $(1 < p < \infty)$ мы понимаем представление

$$G_{p,\psi} = (G_{p,\psi})_- \Lambda_{p,\psi} (G_{p,\psi})_+^{-1},$$

где $(G_{p,\psi})_\pm \in \left(L_p^\pm\right)^{2\times 2}$, $(G_{p,\psi})_\pm^{-1} \in \left(L_q^\pm\right)^{2\times 2}$ $(q = p/(p-1))$, $\Lambda = \operatorname{diag}(\tau_{\varkappa_1}, \tau_{\varkappa_2})$, $\varkappa_1 \leqslant \varkappa_2$, $\varkappa_1, \varkappa_2 \in \mathbb{Z}$. Целые числа $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ называются частными индексами матрицы-функции G.

Рассмотрим классы функций

$$W_\pm = L_p^\pm \cap W, \quad \overset{\circ}{W}_- = W \cap imP_-.$$

Из условия d1) следует, что $G_{p,\psi} \in W^{2\times 2}$. Поскольку $\det G_{p,\psi} = 1$, то $G_{p,\psi}$ допускает факторизацию в L_p, причем $(G_{p,\psi})_+^{\pm 1} \in W_+^{2\times 2}$, $(G_{p,\psi})_-^\pm \in W_-^{2\times 2}$, $\varkappa_1 + \varkappa_2 = 0$ (см. [12]).

Далее будем пользоваться следующими обозначениями:

$$(G_{p,\psi})_+ = \begin{pmatrix} g_{11}^+ & g_{12}^+ \\ g_{21}^+ & g_{22}^+ \end{pmatrix}, \quad (G_{p,\psi})_-^{-1} = \begin{pmatrix} g_{11}^- & g_{12}^- \\ g_{21}^- & g_{22}^- \end{pmatrix}.$$

В силу условия d1) функция v допускает факторизацию $v = v_- \tau_\chi v_+^{-1}$, где

$$\chi = \operatorname{ind} v = \frac{1}{2\pi} \operatorname{vararg} v(t)\Big|_{t\in\mathbb{T}}.$$

Заметим, что χ – четное число, а $v_\pm^\wedge = v_\pm$.

Предложенная в [9, 10] схема факторизации основана на представлении $G_{p,\psi} = \tau_{\chi_0} AB$, где $\chi_0 \in \mathbb{Z}$, $A \in W_-^{2\times 2}$, $B \in W_+^{2\times 2}$. Приведем явный вид этого представления при условиях, когда $p^{-1} \in W_-$, $\nu < -\chi$ и выполнены условия d1), d2). В этом случае $\chi_0 = -\chi - \nu$, а матрицы-функции A, B определяются с помощью равенств

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} v_-^{-1}\tau_{\nu_-} + p^\wedge v_- \tau_{-\nu} P_-(\Phi_+) & -pv_-\tau_{-\nu}P_-(\Phi_+) \\ -\tau_{-\nu} v_- p^\wedge & \tau_{-\nu} p v_- \end{pmatrix},$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} v_+ & -v_+P_+(\Phi_+) \\ \dfrac{p^\wedge v_+}{p} & -\dfrac{p^\wedge}{p}v_+P_+(\Phi_+) + \dfrac{1}{pv_+} \end{pmatrix},$$

где $\Phi_+ = \dfrac{2\psi}{v_+^2(1+\psi)^2 p^\wedge}$. Формулы частных индексов и конструкция факторов матрицы-функции $G_{p,\psi}$ в [9, 10] приведены в терминах некоторых матриц $\mathcal{K}_j$ ($j \in \mathbb{Z}$, $j > -\nu_-$). Сравнивая с [9] нетрудно убедиться, что при указанных предположениях, матрицы $\mathcal{K}_j$ могут быть записаны в виде произведения $\mathcal{K}_j = \mathcal{B}_j \mathcal{A}_j$, где

$$\mathcal{B}_j = \begin{pmatrix} \langle B^{-1}\rangle_{-1-j^-} & \langle B^{-1}\rangle_{-2-j^-} & \cdots & \langle B^{-1}\rangle_{-\nu_- -j} \\ \langle B^{-1}\rangle_{-2-j^-} & \langle B^{-1}\rangle_{-3-j^-} & \cdots & \langle B^{-1}\rangle_{-\nu_- -j-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle B^{-1}\rangle_{-\nu-1} & \langle B^{-1}\rangle_{-\nu-2} & \cdots & \langle B^{-1}\rangle_{-(\nu_-+\nu)-j^+} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_j = \begin{pmatrix} \langle A^{-1}\rangle_{\nu_-} & \langle A^{-1}\rangle_{\nu_- -1} & \cdots & \langle A^{-1}\rangle_{1-j^+} \\ 0 & \langle A^{-1}\rangle_{\nu_-} & \cdots & \langle A^{-1}\rangle_{2-j^+} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \langle A^{-1}\rangle_{\nu_-} \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее для $j \in \mathbb{Z}$ и для матрицы-функции (вектор-функции, функции) Φ мы пользуемся следующими обозначениями: $j^\pm = \frac{1}{2}(j \pm |j|)$ и

$$\langle \Phi \rangle_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}} \Phi(z) z^{-k-1} dz, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Определим семейство теплицевых операторов $T_j : \left(L_p^+\right)^2 \to \left(L_p^+\right)^2$ ($j \in \mathbb{Z}$) действуюших по формуле: $T_j\varphi = P_+\left(\tau_{-(j+\chi_0)} G_{p,\psi}\varphi\right)$. Как известно (см. [9])

$$\ker T_j = \left\{ \tau_{j-} B^{-1} P_+ \left(A^{-1} \sum_{k=-(\nu_-+j^+)}^{-1} q_k \tau_k \right); \right. \tag{2.1}$$
$$\left. q_k \in \mathbb{C}^2 (k = -1, \ldots, -(\nu_- + j^+)), \quad q = \left(q^t_{-(\nu_-+j^+)}, \ldots q^t_{-1}\right)^t \in \ker \mathcal{K}_j \right\}$$

для $j > -\nu_-$ и $\ker T_j = \{0\}$ при $j \leqslant -\nu_-$.

2.2. Пусть $p^{-1} \in W_-$, $\nu < -\chi$ и выполнены условия d1) и d2). Из определения B^{-1} следует, что

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_+ & c_+ \end{pmatrix} + B_1, \tag{2.2}$$

где $B_1 \in W_+^{2\times 2}$, а

$$b_+ = \frac{p^\wedge}{p} v_+, \quad c_+ = -\frac{p^\wedge v_+}{p} P_+(\Phi_+) + \frac{1}{p\,v_+} = -b_+ P_+(\Phi_+) + \frac{1}{p\,v_+}.$$

Поскольку $b_+p \in W_+$ и $\langle p\rangle_\nu = 1$, то

$$\langle b_+\rangle_{k-\nu} = -\sum_{m=0}^{\nu_--1} \langle b_+\rangle_{k-m}\langle p\rangle_m\,, \quad -k\in\mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Из этих равенств следует утверждение.

Предложение 2.1. *Если для целого неотрицательного числа ℓ и комплексных чисел $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\ell$ равенства*

$$\sum_{m=0}^{\ell} \langle b_+\rangle_{k-m}\gamma_m = 0$$

справедливы при $k = -1, \ldots, -\nu$, то они справедливы при любом целом отрицательном k. Кроме того либо $\ell \geqslant \nu$, либо $\gamma_0 = \gamma_1 = \cdots = \gamma_\ell = 0$.

В дальнейшем важную роль играет следующее предложение.

Предложение 2.2. *Пусть $p^{-1} \in W$, $\nu < -\chi$ и выполнены условия d1) и d2). Тогда $j = \nu - \nu_- + 1$ является наименьшим целым числом, при котором подпространство $\ker T_j$ нетривиально. Подпространство $\ker T_{\nu-\nu_-+1}$ одномерно и совпадает с множеством вектор-функций вида $\varphi = \gamma\,(pv_+, p^\wedge v_+)^t$, где γ – произвольное комплексное число.*

Доказательство. Из условия $\nu < -\chi$ следует, что $\chi_0 = -\chi - \nu > \chi$ и $\nu_- = -2\chi - \nu > \nu$. Докажем сначала, что $\ker T_j = \{0\}$ при $j \leqslant \nu - \nu_-$. При $j \leqslant -\nu_-$ это равенство доказано в [9]. Пусть теперь $\nu > 0$ и $-\nu_- < j \leqslant \nu - \nu_-$, $\varphi \in \ker T_j$. Тогда из формулы (2.1) следует существование $q = \left(q^t_{-\nu_-}, \ldots, q^t_{-1}\right)^t \in \ker \mathcal{K}_j$ ($q_k \in \mathbb{C}^2$, $k = -\nu_-, \ldots, -1$) такого, что $\varphi = B^{-1}\psi$, где

$$\psi(t) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=-\nu_-}^{-1} \langle A^{-1}\rangle_{m-k}q_k\right) t^{m+j}. \tag{2.4}$$

Поскольку $\psi = B\varphi$, то $\psi \in W^2_+$ и следовательно

$$\sum_{k=-\nu_-}^{-1} \langle A^{-1}\rangle_{m-k}q_k = 0, \quad \text{при } m = 0, 1, \ldots, -j-1\,. \tag{2.5}$$

Учитывая структуру $\langle A^{-1}\rangle_s$ при $s \geqslant 1$, нетрудно убедиться, что $\mathcal{A}_j q = \xi = \left(0, \ldots, 0, \xi^t_0, \ldots, \xi^t_{k-1}\right)^t$, где $k = \nu_- + j$, а $\xi_s = (\eta_s, 0)^t = \sum_{i=-\nu_-}^{-1} \langle A^{-1}\rangle_{-j+s-i}q_i$ ($s = 0, \ldots, k-1$). Из (2.2) следует, что при $s \leqslant -1$ условие $\mathcal{K}_j q = \mathcal{B}_j\mathcal{A}_j q = \mathcal{B}_j\xi = 0$ эквивалентно равенствам

$$\sum_{m=0}^{k-1} \langle b_+\rangle_{s-m}\eta_m = 0 \quad s = -1, \ldots, -\nu + j. \tag{2.6}$$

Так как $k \leqslant \nu$, то в силу предложения 2.1, $\eta_0 = \cdots = \eta_{k-1} = 0$ и потому $\xi_0 = \cdots = \xi_{k-1} = 0$. Из определения чисел ξ_s следует, что равенства (2.5) справедливы при $m = 0, 1, \ldots, \nu_- - 1$. Учитывая, что $\langle A^{-1} \rangle_s = 0$ при $s \geqslant \nu_- + 1$, нетрудно убедиться, что равенства (2.5) справедливы и при $m \geqslant \nu_-$. Из формулы (2.4) следует, что $\varphi = \psi = 0$.

Пусть теперь $0 \leqslant \nu < -\chi$ и $j = \nu - \nu_- + 1$. Определим $\eta_m \in \mathbb{C}$ и $\xi_m \in \mathbb{C}^2$ $(m = 0, \ldots, \nu)$ равенствами $\eta_m = \langle p \rangle_m$, $\xi_m = (\langle p \rangle_m, 0)^t$. Поскольку $\eta_0 = p(0) \neq 0$, то $\xi_0 \neq 0$. В силу (2.3) имеют место равенства (2.6). Отсюда следует, что $\mathcal{B}_j \xi = 0$, где $\xi = (0, \ldots, 0, \xi_0^t, \ldots, \xi_\nu^t)^t \in \mathbb{C}^{2\nu_-}$.

Рассмотрим уравнение $\mathcal{A}_{\nu-\nu_-+1} q = \xi$, где $q = \left(q_{-\nu_-}^t, \ldots, q_{-1}^t\right)^t$. Так как $\langle v_-^{-1} \rangle_0 \neq 0$, то очевидно, что это уравнение разрешимо и потому существует $q \neq 0$ такой, что $\mathcal{K}_{\nu-\nu_-+1} q = 0$. В силу (2.1) вектор-функция

$$\varphi_0 = B^{-1}(z) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=-\nu_-}^{-1} \left(\langle A^{-1} \rangle_{m-k} q_k \right) z^{m+\nu-\nu_-+1} = B^{-1}(z) \left(\xi_0 + \xi_1 z + \cdots + \xi_\nu z^\nu \right)$$

принадлежит $\ker T_{\nu-\nu_-+1}$. Поскольку $\xi_0 + \xi_1 z + \cdots + \xi_\nu z^\nu = (p(z), 0)^t$, то из определения B^{-1} следует, что $\varphi_0 = (pv_+, p^\wedge v_+)^t$.

Меньший из частных индексов матрицы-функции $\tau_{-\chi_0} G_{p,\psi}$ равен $\varkappa_1 - \chi_0$. Поскольку с другой стороны наименьшее целое значение j при котором $\ker T_j$ нетривиально, совпадает с $\varkappa_1 - \chi_0 + 1$ (см. например [10, 13, 14]), то $\varkappa_1 = \nu - \nu_- + \chi_0 = (\chi + \nu) < 0$. Следовательно, $\varkappa_1 \neq \varkappa_2$ и потому (см. [10, 13, 14]) $\dim \ker T_{\nu-\nu_-+1} = 1$.

Предложение доказано. □

2.3. Определим функции $\Phi'_+ = \dfrac{-2\psi v_+^2}{(1-\psi)^2 p^\wedge}$, $b'_+ = \dfrac{p^\wedge}{pv_+}$, $c'_+ = \dfrac{-p^\wedge}{pv_+} P_+(\Phi'_+) + \dfrac{v_+}{p}$.

$\Phi_- = \dfrac{-2\psi}{(1-\psi)^2 pv_-^2}$, $\Phi'_- = \dfrac{2\psi v_-^2}{(1+\psi)^2 p}$, $b_- = \dfrac{p}{p^\wedge} v_-$, $b'_- = \dfrac{p}{p^\wedge v_-}$;

$c_- = \alpha \left(b_- \tau_1 P_-(\tau_{\nu-1} \Phi_-) + \dfrac{\tau_\nu}{p^\wedge v_-} \right)$, $c'_- = \alpha \left(b' \tau_1 P_-(\tau_{\nu-1} \Phi'_-) + \dfrac{\tau_\nu v_-}{p^\wedge} \right)$,

где $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\nu$.

Для функции $f \in L_1$, через $\mathcal{H}^+_{n,m}(f)$, $\mathcal{H}^-_{n,m}(f)$ будем обозначать ганкелевы матрицы

$$\mathcal{H}^\pm_{n,m}(f) = \begin{pmatrix} \langle f \rangle_{\mp 1} & \langle f \rangle_{\mp 2} & \cdots & \langle f \rangle_{\mp m} \\ \langle f \rangle_{\mp 2} & \langle f \rangle_{\mp 3} & \cdots & \langle f \rangle_{\mp (m+1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle f \rangle_{\mp n} & \langle f \rangle_{\mp (n+1)} & \cdots & \langle f \rangle_{\mp (n+m-1)} \end{pmatrix}.$$

В случае $p^{-1} \in \overset{\circ}{W}_-$ из формул (2.3) следует, что $\det \mathcal{H}^+_{\nu,\nu}(b_+) \neq 0$ и $\operatorname{rank} \mathcal{H}^+_{n,m}(b_+) = \nu$ как только $n \geqslant \nu$, $m \geqslant \nu$ (см. [15] гл. 16, § 10, а также [16]). Аналогичным образом $\det \mathcal{H}^+_{\nu,\nu}(b'_+) \neq 0$ и $\operatorname{rank} \mathcal{H}^+_{n,m}(b'_+) = \nu$ как только $n \geqslant \nu$ и $m \geqslant \nu$. Поскольку $\nu_- > \nu$, то $\dim\ker \mathcal{H}^+_{\nu+1,\nu_-+1}(b_+) = \dim\ker \mathcal{H}^+_{\nu+1,\nu_-+1}(b'_+) = \nu_- - \nu + 1$. Кроме того, очевидно, что уравнения $\mathcal{H}^+_{\nu+1,\nu_-+1}(b_+)\eta = \xi$, $\mathcal{H}^+_{\nu+1,\nu_-+1}(b'_+)\eta' = \xi'$ $(\eta, \eta' \in \mathbb{C}^{\nu_-+1})$ разрешимы при любых правых частях $\xi, \xi' \in \mathbb{C}^\nu$.

В случае $p^{-1} \in W_+$ и $\nu > 0$ аналогичные утверждения справедливы для матриц $\mathcal{H}^-_{m,n}(b_-)$, $\mathcal{H}^-_{m,n}(b'_-)$. Именно: $\det \mathcal{H}^-_{\nu,\nu}(b_-) \neq 0$, $\det \mathcal{H}^-_{\nu,\nu}(b'_-) \neq 0$; $\operatorname{rank} \mathcal{H}^-_{n,m}(b_-) = \operatorname{rank} \mathcal{H}^-_{n,m}(b'_-) = \nu$ как только $n \geqslant \nu$, $m \geqslant \nu$;

$$\dim\ker \mathcal{H}^-_{\nu+1,\nu_-+1}(b_-) = \dim\ker \mathcal{H}^-_{\nu+1,\nu_-+1}(b'_-) = \nu_- - \nu + 1,$$

уравнения $\mathcal{H}^-_{\nu+1,\nu_-+1}(b_-)\eta = \xi$, $\mathcal{H}^-_{\nu+1,\nu_-+1}(b'_-)(\eta') = \xi'$ $(\eta, \eta' \in \mathbb{C}^{\nu_-+1})$ разрешимы при любых правых частях $\xi, \xi' \in \mathbb{C}^\nu$.

Теорема 2.1. *Пусть $p^{-1} \in W_-$, $\nu < -\chi$ и выполнены условия d1), d2). Тогда факторизационные множители матрицы-функции $G_{p,\psi}$ определяются следующими равенствами:*

$$\Lambda_{p,\psi} = \operatorname{diag}(\tau_{\chi+\nu}, \tau_{-\chi-\nu}),$$

$$(2.7)\quad \begin{aligned} g^+_{11} &= \gamma_1 p v_+, \quad g^+_{12} = \gamma_2 \left(v_+ \sum_{m=0}^{\nu_-} \eta_m \tau_m - \mu_0 v_+ P_+(\Phi_+) \right), \\ g^+_{21} &= \gamma_1 p^\wedge v_+, \quad g^+_{22} = \gamma_2 \left(\frac{p^\wedge v_+}{p} \sum_{m=0}^{\nu_-} \eta_m \tau_m - \mu_0 \frac{p^\wedge}{p} v_+ P_+(\Phi_+) + \frac{\mu_0}{p v_+} \right) \end{aligned}$$

(2.8)

$$\begin{aligned} g^-_{11} &= \frac{1}{\gamma_1 \mu_0} \left(\frac{p^\wedge v_-}{p \tau_{\nu_-}} \sum_{m=0}^{\nu_-} \eta_m \tau_m + \frac{\mu_0 p^\wedge v_-}{p \tau_{\nu_-}} P_-(\Phi_+) + \frac{\mu_0 \tau_\nu}{v_- p} \right), \\ g^-_{12} &= -\frac{v_-}{\gamma_1 \mu_0 \tau_{\nu_-}} \left(\sum_{m=0}^{\nu_-} \eta_m \tau_m + \mu_0 P_-(\Phi_+) \right), \quad g^-_{21} = -\frac{p^\wedge v_-}{\gamma_2 \mu_0 \tau_\nu}, \quad g^-_{22} = \frac{p v_-}{\gamma_2 \mu_0 \tau_\nu} \end{aligned}$$

где μ_0, γ_1, γ_2 - произвольные ненулевые комплексные числа, а $\eta = (\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{\nu_-})^t$, $(\eta_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, \ldots, \nu_-)$ - произвольное решение уравнения

$$\mathcal{H}^+_{\nu+1,\nu_-+1}(b_+)\eta = -\mu_0 \mathcal{H}^+_{\nu+1,1}(c_+).$$

Доказательство. В предложении 2.2 уже доказано, что частные индексы матрицы-функции $G_{p,\psi}$ равны соответственно $\varkappa_1 = \chi + \nu$ и $\varkappa_2 = -(\chi + \nu)$ (т.е. $\chi_0 = -(\chi + \nu)$). Следовательно, частные индексы матрицы-функции $\tau_{-\chi_0} G_{p,\psi}$ совпадают с числами $\varkappa_1 - \chi_0 = 2(\chi + \nu) = \nu - \nu_-$ и $\varkappa_2 - \chi_0 = 0$. Определим матрицы

$$\mathcal{K}'_{\nu-\nu_-+1} = \left(\langle A^{-1} \rangle_{2\nu_- - \nu - 1}, \ldots, \langle A^{-1} \rangle_{\nu_- - \nu} \right) \quad \text{и} \quad \mathcal{K}'_1 = \left(\langle A^{-1} \rangle_{\nu_-}, \ldots, \langle A^{-1} \rangle_0 \right).$$

В силу результатов работы [10] существует факторизационная пара векторов $q = \left(q^t_{-\nu_-}, \ldots, q^t_{-1} \right)^t \in \mathbb{C}^{2\nu_-}$ $(q_i \in \mathbb{C}^2, i = -\nu_-, \ldots, -1)$, $h = \left(h^t_{-(\nu_-+1)}, \ldots, h^t_{-1} \right)^t$ $(h_i \in$

$\mathbb{C}^2$, $i = -(\nu_- + 1), \ldots, -1$). Эти векторы определяются из уравнений $\mathcal{K}_{\nu-\nu_-+1}q = 0$, $\mathcal{K}_1 h = 0$ таким образом, что отличные от нуля векторы $\mathcal{K}'_{\nu-\nu_-+1}q$, $\mathcal{K}'_1 h$ – линейно независимы. Если построить вектор-функции φ_1, φ_2 по формулам

$$\varphi_1(t) = t^{\nu-\nu_-+1} B^{-1}(t) \sum_{m=0}^{\nu_-} \left(\sum_{k=-\nu_-}^{-1} \langle A^{-1} \rangle_{m-k} q_k \right) t^m, \tag{2.9}$$

$$\varphi_2(t) = B^{-1}(t) \sum_{m=0}^{\nu_-} \left(\sum_{k=-(\nu_-+1)}^{-1} \langle A^{-1} \rangle_{m-k-1} h_k \right) t^m, \tag{2.10}$$

то матрица-функция (φ_1, φ_2) может быть выбрана в качестве фактора $(G_{p,\psi})_+$. Обратно, как бы не был выбран $(G_{p,\psi})_+$, существует факторизационная пара q, h такая, что первый и второй столбец $(G_{p,\psi})_+$ восстанавливаются по формулам (2.9), (2.10) соответственно.

В предложении 2.2 по существу доказывается, что $\varphi_1 = \gamma_1(pv_+, p^\wedge v_+)^t$ ($\gamma_1 \neq 0$). Кроме того, вторая компонента вектора $\mathcal{K}'_{\nu-\nu_-+1}q$ равна нулю. Отсюда в частности следует, что вторая компонента вектора $\mathcal{K}'_1 h$ должна быть отлична от нуля.

Обозначим $\xi = \mathcal{A}_1 h$. Пусть $\xi = (\xi_0^t, \xi_1^t, \ldots, \xi_\nu^t)^t$, и $\xi_k = (\eta_k, \mu_k)^t$ ($\eta_k, \mu_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \ldots, \nu_-$). Из определения $\mathcal{A}_1$ и структуры $\langle A^{-1} \rangle_s$ ($s = 0, 1, \ldots$) следует, что $\mu_1 = \cdots = \mu_{\nu_-} = 0$. Но поскольку $\mathcal{K}'_1 h = \xi_0$, то $\mu_0 \neq 0$. При таком выборе ξ легко видеть, что уравнение $\mathcal{A}_1 h = \xi$ разрешимо. Таким образом нахождение решения уравнения $\mathcal{K}_1 h = 0$, обладающего тем свойством, что вторая компонента вектора $\mathcal{K}'_1 h$ отлична от нуля, эквивалентно нахождению решения уравнения $\mathcal{B}_1 \xi = 0$ вида $\xi = \left(\xi_0^t, \xi_1^t, \ldots, \xi_{\nu_-}^t\right)^t$, где $\xi_0 = (\eta_0, \mu_0)^t$, $\xi_k = (\eta_k, 0)^t$ ($k = 1, \ldots, \nu_-$), $\mu_\nu, \eta_s \in \mathbb{C}$ ($s = 0, \ldots, \nu_-$), $\mu_0 \neq 0$. В свою очередь, последнее уравнение эквивалентно уравнению $\mathcal{H}^+_{\nu+1,\nu_-+1}(b_+)\eta = -\mu_0 \mathcal{H}^+_{\nu+1,1}(c_+)$, где $\eta = (\eta_0, \ldots, \eta_{\nu_-})^t$. Последовательное решение этого уравнения и уравнения $\mathcal{A}_1 h = \xi$ при некотором $\mu_0 \neq 0$ определяет вектор $h = \left(h^t_{-\nu_--1}, \ldots, h^t_{-1}\right)^t$ с $h_k = \left(h_k^1, 0\right)^t$ ($k = -\nu_- - 1, \ldots, -2$) и $h_{-1} = \left(h^1_{-1}, h^2_{-1}\right)^t$. Из формулы (2.10) следует, что второй столбец $(G_{p,\psi})_+$ имеет вид $\varphi_2(z) = \gamma_2 B^{-1}(z) \left(\sum_{m=0}^{\nu_-} \eta_m z^m, \mu_0 \right)^t$. Отсюда и из равенства $\varphi_1 = \gamma_1(pv_+, p^\wedge v_+)^t$ в силу определения B^{-1} окончательно получим формулы (2.7). Непосредственным подсчетом нетрудно убедиться, что $\det(G_{p,\psi})_+ = \gamma_2\gamma_1\mu_0$. Из равенства $\det G = \det(G_{p,\psi})_- \det \Lambda_{p,\psi} \cdot (\det G_{p,\psi})_+^{-1}$

следует, что $\det(G_{p,\psi})_-^{-1} = \dfrac{1}{\gamma_1\gamma_2\mu_0}$. Отсюда имеем

$$(G_{p,\psi})_- = \gamma_1\gamma_2\mu_0 \begin{pmatrix} g_{22}^- & -g_{12}^- \\ -g_{21}^- & g_{11}^- \end{pmatrix}.$$

Сравнивая это равенство с $(G_{p,\psi})_- = G_{p,\psi}(G_{p,\psi})_+\Lambda_{p,\psi}^{-1}$ с помощью несложных преобразований нетрудно получить формулы (2.8) для g_{ij}^- $(i,j = 1,2)$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 2.2. *Пусть $p^{-1} \in W_-$, $\nu < \chi$ и выполнены условия d1), d2). Тогда факторизационные множители матрицы-функции $G_{p,\varphi}$ определяются следующими равенствами:*

$$\Lambda_{p,\psi} = \operatorname{diag}(\tau_{-\chi+\nu}, \tau_{\chi-\nu}),$$

$$(2.11)\qquad \begin{aligned} &g_{11}^+ = -\frac{\gamma_1 p}{v_+}, \quad g_{21}^+ = \frac{\gamma_1 p^\wedge}{v_+},\\ &g_{12}^+ = -\gamma_2\left(\frac{p}{p^\wedge v_+}\sum_{m=0}^{\nu_-}(-1)^m\eta'_m\tau_m - \frac{\mu_0 p}{p^\wedge v_+}P_+\left({\Phi'}_+^\wedge\right) + \frac{\mu_0 v_+}{p^\wedge}\right),\\ &g_{22}^+ = \gamma_2\left(\frac{1}{v_+}\sum_{m=0}^{\nu_-}(-1)^m\eta'_m\tau_m - \frac{\mu_0}{v_+}P_+\left({\Phi'}_+^\wedge\right)\right) \end{aligned}$$

(2.12)

$$\begin{aligned} &g_{11}^- = \frac{1}{\gamma_1\mu_0 v_-\tau_{\nu_-}}\left(\sum_{m=0}^{\nu_-}(-1)^m\eta'_m\tau_m + \mu_0 P_-\left({\Phi'}_+^\wedge\right)\right),\\ &g_{12}^- = \frac{1}{\gamma_1\mu_0}\left(\frac{p}{p^\wedge v_-\tau_{\nu_-}}\sum_{m=0}^{\nu_-}(-1)^m\eta'_m\tau_m + \frac{\mu_0 p}{p^\wedge v_-\tau_{\nu_-}}P_-\left({\Phi'}_+^\wedge\right) + \frac{\mu_0 v_-\tau_\nu}{p^\wedge}\right),\\ &g_{21}^- = -\frac{p^\wedge}{\gamma_2\mu_0 v_-\tau_\nu}, \quad g_{22}^- = -\frac{p}{\gamma_2\mu_0 v_-\tau_\nu}, \end{aligned}$$

где μ_0, γ_1, γ_2 – произвольные ненулевые комплексные числа, а $\eta' = (\eta'_0, \eta'_1, \dots, \eta'_{\nu_-})^t$, ($\eta'_i \in \mathbb{C}$, $i = 0,\dots,\nu_-$) – произвольное решение уравнения $\mathcal{H}^+_{\nu+1,\nu_-+1}(b'_+)\eta' = -\mu_0\mathcal{H}^+_{\nu+1,1}(c'_+)$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу-функцию $G_{p,-\psi}$. Она удовлетворяет всем условиям теоремы 2.1. При этом необходимо вместо $\chi, v_\pm, b_+, c_+, \Phi$ рассматривать $-\chi, \dfrac{1}{v_\pm}, b'_+, c'_+, \Phi'$. Воспользуемся теоремой 2.1 и с соответствующими изменениями построим факторизацию $G_{p,-\psi} = (G_{p,-\psi})_-\Lambda_{p,-\psi}(G_{p,-\psi})_+^{-1}$. С другой стороны легко убедиться, что $G_{p,\psi} = J_0 G^\wedge_{p,-\psi} J_0^{-1}$, где

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$G_{p,\psi} = J_0(G_{p,-\psi})^\wedge\Lambda^\wedge_{p,-\psi}(G_{p,-\psi})_+^{-1}J_0^{-1} = (-1)^{\varkappa_2}J_0(G_{p,-\psi})_-^\wedge\Lambda_{p,-\psi}\left(J_0(G_{p,-\psi})_+^\wedge\right)^{-1}$

и можем взять

$$(G_{p,\psi})_+ = J_0(G_{p,-\psi})_+^{\wedge} \quad \text{и} \quad (G_{p,\psi})_- = (-1)^{\varkappa_2} J_0(G_{p,-\psi})_-^{\wedge}.$$

Учитывая, что $(-1)^{\varkappa_2} = (-1)^{\nu}$ (т.к. $\varkappa_2 = \chi - \nu$, а χ – четное) и $J_0^{-1} = -J_0$, получим $(G_{p,\psi})_-^{-1} = (-1)^{\nu+1}(G_{p,-\psi})_-^{-1\wedge} J_0$. Из этих формул с учетом равенств $(-1)^{\nu_-} = (-1)^{\nu}$ и $SW = WS$ следуют (2.11) и (2.12). Теорема доказана. □

2.4. Рассмотрим теперь случай $p^{-1} \in W_+$. Определим функцию ψ_* и многочлен p_* с помощью равенств $\psi_* = (-1)^{\nu}\bar{\psi}$, $p_*(z) = (-1)^{\nu} \prod_{i=1}^{\nu} \left(z + \frac{1}{\bar{\alpha}_i}\right)$. Очевидно, что из условия $p^{-1} \in W_+$ следует $p_*^{-1} \in W_-$. Функцию v_* определим равенством $v_* = \dfrac{1+\psi_*}{1-\psi^*}$. Из d1) следует, что $1 - \psi_*^2(x) \neq 0$ $(t \in T)$. Пусть представление $v_* = v_{*-}\tau_{\chi_*}v_{*+}^{-1}$ является факторизацией функции v_*. В случае когда ν – четное число, имеет место равенство $v_* = \bar{v}$ и потому в этом случае

$$\chi_* = -\chi, \quad v_{*-}(z) = \frac{1}{v_-\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \quad v_{*+}(z) = \frac{1}{v_-\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}.$$

В случае когда ν – нечетное число, справедливо равенство $v_* = \dfrac{1}{\bar{v}}$ и поэтому

$$\chi_* = \chi, \quad v_{*-}(z) = \overline{v_+\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \quad v_{*+}(z) = \overline{v_-\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}.$$

Поскольку $|\chi_*| = |\chi|$, то условие d4) эквивалентно условию $\nu < |\chi_*|$. Таким образом к матрице-функции G_{p_*,ψ_*} применимы теоремы 2.1 и 2.2. Пусть представление

$$G_{p_*,\psi_*} = (G_{p_*,\psi_*})_- \Lambda_{p_*,\psi_*} (G_{p_*,\psi_*})_+^{-1}$$

является факторизацией G_{p_*,ψ_*} и $\Lambda_{p_*,\psi_*} = \operatorname{diag}(\tau_{-\varkappa_*}, \tau_{\varkappa_*})$, $(G_{p_*,\psi_*})_+ = \left(g_{*ij}^{+}\right)_{ij=1}^{2}$, $(G_{p_*,\psi_*})_-^{-1} = \left(g_{*ij}^{-}\right)_{ij=1}^{2}$. Из теорем 2.1 и 2.2 следует, что $\varkappa_* = |\chi_*| - \nu = |\chi| - \nu = \varkappa_2$. Кроме того, число ν_{*-} определенное равенством $\nu_{*-} = 2|\chi_*| - \nu$ в силу $|\chi_*| = |\chi|$ равно ν_-.

Матрица-функция $G_{p,\psi}$ совпадает с сопряженной к G_{p_*,ψ_*} матрицей-функцией $G^*_{p_*,\psi_*}$. Поэтому (см. [11, 12]) представление

$$G_{p,\psi} = (G_{p_*,\psi_*})^* = ((G_{p_*,\psi_*})_+ J)^{-1*} J\Lambda^*_{p_*,\psi_*} JJ(G_{p_*,\psi_*})_-^*,$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

является факторизацией $G_{p,\psi}$. Отсюда следует, что

$$(G_{p,\psi})_+(z) = \left(((G_{p_*,\psi_*})_-)^{-1}\right)^* \left(\frac{1}{\bar{z}}\right) J, \quad (G_{p,\psi})_-^{-1}(z) = J.((G_{p_*,\psi_*})_+)^* \left(\frac{1}{\bar{z}}\right).$$

С помощью этих формул и теорем 2.1, 2.2 нетрудно убедиться в справедливости следующих утверждений.

Теорема 2.3. *Пусть $p^{-1} \in W_+$, $\nu < -\chi$, ν-нечетное число и выполнены условия d1), d2). Тогда факторизационные множители матрицы-функции $G_{p,\psi}$ определяются следующими равенствами:*

$$\Lambda_{p,\psi} = diag\,(\tau_{\chi+\nu,-\chi-\nu})\,, \quad g_{11}^+ = \frac{p\,v_+}{\alpha\gamma_2\mu_0}, \quad g_{21}^+ = \frac{p^\wedge v_+}{\alpha\gamma_2\mu_0}$$

$$g_{12}^+ = \frac{1}{\gamma_1\mu_0}\left(-\frac{p}{p^\wedge}v_+\tau_{\nu_-}\sum_{m=0}^{\nu_-}\eta_m\tau_{-m} + \alpha\mu_0\frac{p}{p^\wedge}\tau_{\nu+1}P_+(\tau_{\nu-1}\Phi_+) + \frac{\mu_0}{v_+p^\wedge}\right)$$

$$g_{22}^+ = -\frac{v_+\tau_{\nu_-}}{\gamma_1\mu_0}\left(\sum_{m=0}^{\nu_-}\eta_m\tau_{-m} + \alpha\mu_0\tau_1P_+(\tau_{\nu-1}\Phi_-)\right)$$

$$g_{11}^- = \gamma_2\left(v_-\sum_{m=0}^{\nu_-}\eta_m\tau_{-m} + \alpha\mu_0P_-(\tau_{\nu-1}\Phi_-)\right)$$

$$g_{12}^- = \gamma_2\left(-\frac{pv_-}{p^\wedge}\sum_{m=0}^{\nu_-}\eta_m\tau_{-m} - \alpha\mu_0\frac{p}{p^\wedge}v_-\tau_1P_-(\tau_{\nu-1}\Phi_-) + \frac{\mu_0\alpha\tau_\nu}{p^\wedge v_-}\right),$$

$$g_{21}^- = \frac{\gamma_1p^\wedge v_-}{\alpha\tau_\nu}, \quad g_{22}^- = -\frac{\gamma_1p\,v_-}{\alpha\tau_\nu},$$

где μ_0, γ_1, γ_2 – произвольные ненулевые комплексные числа, а $\eta = (\eta_0, \ldots, \eta_{\nu_-})^t$ ($\eta_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, \ldots, \nu_-$) – произвольное решение уравнения

$$\mathcal{H}_{\nu+1,\nu_-+1}^-(b_-)\,\eta = -\mu_0\mathcal{H}_{\nu+1,1}^-(c_-)\,.$$

Теорема 2.4. *Пусть $p^{-1} \in W_+$, $\nu < \chi$, ν-четное число и выполнены условия d1), d2). Тогда факторизационные множители матрицы-функции $G_{p,\psi}$ определяются следующими равенствами:*

$$\Lambda_{p,\psi} = diag\,(\tau_{-\chi+\nu,\chi-\nu})\,, \quad g_{11}^+ = -\frac{p}{\alpha\gamma_1\mu_0v_+}, \quad g_{21}^+ = \frac{p^\wedge}{\alpha\gamma_2\mu_0v_+}$$

$$g_{12}^+ = \frac{1}{\gamma_1\mu_0}\left(\frac{p\tau_{\nu_-}}{p^\wedge v_+}\sum_{m=0}^{\nu_-}\eta_m\tau_{-m} + \frac{\alpha\mu_0p\tau_{\nu_-+1}}{p^\wedge v_+}P_+(\tau_{\nu-1}\Phi'_-) + \frac{\alpha\mu_0v_+}{p^\wedge}\right)$$

$$g_{22}^+ = -\frac{\tau_{\nu_-}}{\gamma_1\mu_0v_+}\left(\sum_{m=0}^{\nu_-}\eta_m\tau_{-m} + \alpha\mu_0\tau_1P_+(\tau_{\nu-1}\Phi'_-)\right)$$

$$g_{11}^- = \gamma_2\left(\frac{1}{v_-}\sum_{m=0}^{\nu_-}\eta_m\tau_{-m} - \frac{\alpha\mu_0\tau_1}{v_-}P_-(\tau_{\nu-1}\Phi'_-)\right)$$

$$g_{12}^{-}=\gamma_2\left(\frac{p}{p^{\wedge}v_-}\sum_{m=0}^{\nu_-}\eta_m\tau_{-m}-\frac{\alpha\mu_0 p}{p^{\wedge}}\tau_\nu P_-(\tau_{\nu-1}\Phi'_-)+\frac{\mu_0\alpha\tau_\nu v_-}{p^{\wedge}}\right),$$

$$g_{21}^{-}=\frac{\gamma_1 p^{\wedge}}{\alpha\tau_\nu v_-},\quad g_{22}^{-}=\frac{\gamma_1 p}{\alpha\tau_\nu v_-},$$

где μ_0, γ_1, γ_2 *– произвольные ненулевые комплексные числа, а* $\eta=(\eta_0,\dots,\eta_{\nu_-})^t$ $(\eta_i\in\mathbb{C},\ i=0,\dots,\nu_-)$ *– произвольное решение уравнения*

$$\mathcal{H}_{\nu+1,\nu_-+1}^{-}\left(b'_-\right)\eta=-\mu_0\mathcal{H}_{\nu+1,1}^{-}\left(c'_-\right).$$

Теорема 2.5. *Пусть* $p^{-1}\in W_+$, $\nu<-\chi$, ν*-четное число и выполнены условия d1), d2). Тогда факторизационные множители матрицы-функции* $G_{p,\psi}$ *определяются следующими равенствами:*

$$\Lambda_{p,\psi}=diag\left(\tau_{\chi+\nu,-\chi-\nu}\right),\quad g_{11}^{+}=-\frac{p\,v_+}{\alpha\gamma_2\mu_0},\quad g_{21}^{+}=-\frac{p^{\wedge}v_+}{\alpha\gamma_2\mu_0}$$

$$g_{12}^{+}=\frac{v_+\tau_{\nu_-}}{\gamma_1\mu_0}\left(\sum_{m=0}^{\nu_-}(-1)^m\eta'_m\tau_{-m}+\alpha\mu_0\tau_1P_+(\tau_{\nu-1}\Phi_-^{\wedge})\right)$$

$$g_{22}^{+}=\frac{1}{\gamma_1\mu_0}\left(\frac{p^{\wedge}}{p}v_+\tau_{\nu_-}\sum_{m=0}^{\nu_-}(-1)^m\eta'_m\tau_{-m}+\frac{\alpha\mu_0p^{\wedge}}{p}v_+\tau_{\nu_-+1}P_+(\tau_{\nu-1}\Phi_-^{\wedge})+\frac{\alpha\mu_0}{v_+p}\right)$$

$$g_{11}^{-}=-\gamma_2\left(\frac{p^{\wedge}}{p}v_-\sum_{m=0}^{\nu_-}(-1)^m\eta'_m\tau_{-m}-\frac{\alpha\mu_0p^{\wedge}v_-\tau_1}{p}P_-(\tau_{\nu-1}\Phi_-^{\wedge})+\frac{\alpha\mu_0\tau_\nu}{v_-p}\right)$$

$$g_{12}^{-}=\gamma_2\left(v_-\sum_{m=0}^{\nu_-}(-1)^m\eta'_m\tau_{-m}-\alpha\mu_0v_-\tau_1P_-(\tau_{\nu-1}\Phi_-^{\wedge})\right),$$

$$g_{21}^{-}=-\frac{\gamma_1p^{\wedge}v_-}{\alpha\tau_\nu},\quad g_{22}^{-}=\frac{\gamma_1v_-p}{\alpha\tau_\nu},$$

где μ_0, γ_1, γ_2 *– произвольные ненулевые комплексные числа, а* $\eta'=(\eta'_0,\dots,\eta'_{\nu_-})$ $(\eta'_i\in\mathbb{C},\ i=0,\dots,\nu_-)$ *– произвольное решение уравнения*

$$\mathcal{H}_{\nu+1,\nu_-+1}^{-}\left(b_-\right)\eta'=-\mu_0\mathcal{H}_{\nu+1,1}^{-}\left(c_-\right).$$

Теорема 2.6. *Пусть* $p^{-1}\in W_+$, $\nu<\chi$, ν*-нечетное число и выполнены условия d1), d2). Тогда факторизационные множители матрицы-функции* $G_{p,\psi}$ *определяются следующими равенствами:*

$$\Lambda_{p,\psi}=diag\left(\tau_{-\chi+\nu,\chi-\nu}\right),\quad g_{11}^{+}=\frac{p}{\alpha\mu_0\gamma_2v_+},\quad g_{21}^{+}=-\frac{p^{\wedge}}{\alpha\gamma_2\mu_0v_+}$$

$$g_{12}^{+}=\frac{\tau_{\nu_-}}{\gamma_1\mu_0v_+}\left(\sum_{m=0}^{\nu_-}(-1)^m\eta'_m\tau_{-m}-\alpha\mu_0\tau_1P_+(\tau_{\nu-1}\Phi'_-)\right)$$

$$g_{22}^{+}=\frac{1}{\gamma_1\mu_0}\left(-\frac{p^{\wedge}\tau_{\nu_-}}{pv_+}\sum_{m=0}^{\nu_-}(-1)^m\eta'_m\tau_{-m}+\frac{\alpha\mu_0p^{\wedge}}{pv_+}\tau_{\nu_-+1}P_+\left(\tau_{\nu_--1}\Phi'^{\wedge}_-\right)-\frac{\alpha\mu_0v_+}{p}\right)$$

$$g_{11}^{-}=-\gamma_2\left(-\frac{p^{\wedge}}{pv_-}\sum_{m=0}^{\nu_-}(-1)^m\eta_m'\tau_{-m}-\frac{\alpha\mu_0}{pv_-}p^{\wedge}\tau_1 P_-\left(\tau_{\nu-1}\Phi'^{\wedge}_-\right)-\frac{\alpha\mu_0\tau_\nu v_-}{p}\right)$$

$$g_{12}^{-}=\gamma_2\left(\frac{1}{v_-}\sum_{m=0}^{\nu_-}(-1)^m\eta_m'\tau_{-m}-\frac{\alpha\mu_0\tau_1}{v_-}P_-\left(\tau_{\nu-1}\Phi'^{\wedge}_-\right)\right),$$

$$g_{21}^{-}=-\frac{\gamma_1 p^{\wedge}}{\alpha\tau_\nu v_-},\quad g_{22}^{-}=\frac{\gamma_1 p}{\alpha\tau_\nu v_-},$$

где μ_0, γ_1, γ_2 - произвольные ненулевые комплексные числа, а $\eta'=(\eta_0',\dots,\eta_{\nu_-}')$ ($\eta_i'\in\mathbb{C}$, $i=0,\dots,\nu_-$) - произвольное решение уравнения

$$\mathcal{H}^{-}_{\nu+1,\nu_-+1}\left(b'_-\right)\eta'=-\mu_0\mathcal{H}^{-}_{\nu+1,1}\left(c'_-\right).$$

3. Интегральные операторы

3.1. Если $p^{-1}\in W$, то при выполнении условия d1) оператор F_d фредгольмов и поэтому обладает обобщенным обратным (см. [1]).
Рассмотрим действующий в L_p^2 матричный сингулярный оператор $M_d=\Xi_{\mathcal{C}}P_++\Xi_{\mathcal{D}}P_-$, где матрицы-функции $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ определены равенствами:

$$\mathcal{C}=\begin{pmatrix}1 & d\\ d^{\wedge} & 1\end{pmatrix},\quad \mathcal{D}=\begin{pmatrix}1 & -d\\ -d^{\wedge} & 1\end{pmatrix}.$$

Как известно (см. [17]), оператор $\mathcal{M}_d$ связан с операторами F_d и $F_d'=I-\Xi_d US$ следующим операторным тождеством

$$\begin{pmatrix}I & U\\ I & -U\end{pmatrix}\mathcal{M}_d\begin{pmatrix}I & I\\ U & -U\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}F_d & 0\\ 0 & F_d'\end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

При $p^{-1}\in W$ и выполнении условия d1), обобщенный обратный к $\mathcal{M}_d$ оператор может быть определен по формуле (см. [18]):

$$\mathcal{M}_d^{(-1)}=\left(\Xi_{(G_{p,\psi})_+}P_++\Xi_{(G_{p,\psi})_-}P_-\right)\left(\Lambda_{p,\psi}^{-1}P_++P_-\right)\Xi_{(G_{p,\psi})_-^{-1}\mathcal{D}^{-1}}.$$

Из (3.1) следует, что оператор $F_d^{(-1)}$ может быть восстановлен с помощью равенства

$$\begin{pmatrix}F_d^{(-1)} & *\\ * & *\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}I & U\\ I & -U\end{pmatrix}\mathcal{M}_d^{(-1)}\begin{pmatrix}I & I\\ U & -U\end{pmatrix}.$$

Отсюда, полагая $\det(G_{p,\psi})_-=1$ (т.е. взяв в теоремах 2.1-2.6 $\mu_0=\gamma_1=\gamma_2=1$), непосредственным подсчетом нетрудно убедиться, что

$$F_d^{(-1)}=M_{11}+M_{12}U+UM_{21}+UM_{22}U, \tag{3.2}$$

где

$$M_{1i}=(\Xi_{g_{11}^+}P_++\Xi_{g_{22}^-}P_-)(\Xi_{\tau_\varkappa}P_++P_-)\Xi_{a_{1i}}+(\Xi_{g_{12}^+}P_+-\Xi_{g_{12}^-}P_-)(\Xi_{\tau_{-\varkappa}}P_++P_-)\Xi_{a_{2i}},$$

$$M_{2i}=(\Xi_{g_{21}^+}P_+-\Xi_{g_{21}^-}P_-)(\Xi_{\tau_\varkappa}P_++P_-)\Xi_{a_{1i}}+(\Xi_{g_{22}^+}P_++\Xi_{g_{11}^-}P_-)(\Xi_{\tau_{-\varkappa}}P_++P_-)\Xi_{a_{2i}},$$

$i = 1, 2$, а

$$\varkappa = |\chi| - \nu,$$

$$a_{i1} = \frac{1}{2\,(1-\psi^2)} \cdot \left(g_{i1}^- + g_{i2}^- d^\wedge\right), \quad a_{i2} = \frac{1}{2\,(1-\psi^2)} \cdot \left(g_{i1}^- d + g_{i2}^-\right), \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, в случае когда $p^{-1} \in W$, при выполнении условий d1) и d2) оператор $F_d^{(-1)}$, определенный по формуле (3.2), является обобщенным обратным к F_d. Здесь $g_{ij}^{\pm}$ в зависимости от знака χ, четности числа ν и от $p^{-1} \in W_-$ либо $p^{-1} \in W_+$ восстанавливаются по формулам полученным в теоремах 2.1-2.6 ($\mu_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = 1$). Заметим, что аналогично (3.1) нетрудно убедиться в тождестве

$$\left(\begin{array}{cc} I & U \\ I & -U \end{array}\right) \tilde{\mathcal{M}}_{d^\wedge} \left(\begin{array}{cc} I & I \\ U & -U \end{array}\right) = 2 \left(\begin{array}{cc} \tilde{F}_d & 0 \\ 0 & \tilde{F}_d' \end{array}\right), \tag{3.3}$$

где $\tilde{\mathcal{M}}_{d^\wedge} = P_+ \Xi_{\mathcal{C}^\wedge} + P_- \Xi_{\mathcal{D}^\wedge}$, $\tilde{F}_d' = I - US\Xi_d$. Учитывая, что оператор

$$\tilde{\mathcal{M}}_{d^\wedge}^{(-1)} = \Xi_{\mathcal{D}^{\wedge -1}(G_{p^\wedge,\psi})_+} \left(P_+ \Xi_{\Lambda_{p^\wedge,\psi}^{-1}} + P_-\right) \left((-1)^\nu P_+ \Xi_{(G_{p^\wedge,\psi})_-^{-1}} + P_- \Xi_{(G_{p^\wedge,\psi})_+^{-1}}\right)$$

является обобщенно обратным к $\tilde{\mathcal{M}}_{d^\wedge}$, в силу (3.3) обобщенный обратный $\tilde{F}_d^{(-1)}$ к оператору $\tilde{F}_d$, может быть восстановлен из равенства

$$\left(\begin{array}{cc} \tilde{F}_d^{(-1)} & * \\ * & * \end{array}\right) = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{cc} 1 & U \\ 1 & -U \end{array}\right) \tilde{\mathcal{M}}_{d^\wedge}^{(-1)} \left(\begin{array}{cc} 1 & I \\ U & -U \end{array}\right).$$

3.2. Сначала докажем следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Пусть* $p^{-1} \in W$ *и выполнены условия d1), d2). Если* $\varkappa_2 > 0$, *то*

a) множество $\ker F_d$ *совпадает с функциями вида*

$$y = \frac{\psi h}{1-\psi^2} \left(\psi g_{11}^+ + \frac{p}{p^\wedge} g_{21}^+\right),$$

где h *- произвольный многочлен, удовлетворяющий условиям*

$$\deg h < \varkappa_2 \quad \text{и} \quad g_{11}^{+\wedge} h^\wedge = g_{21}^+ h;$$

b) множество $\ker \tilde{F}_d$ *совпадает с функциями вида*

$$y = \frac{h}{1-\psi^2} \left(g_{11}^{+\wedge} + \frac{p^\wedge}{p} \psi g_{21}^{+\wedge}\right),$$

где h *- произвольный многочлен, удовлетворяющий условиям*

$$\deg h < \varkappa_2 \quad \text{и} \quad g_{11}^{+\wedge} h^\wedge = g_{21}^+ h.$$

Если $\varkappa_2 = 0$, *то подпространства* $\ker F_d$, $\ker \widetilde{F}_d$ *тривиальны.*

Доказательство. Пользуясь равенством $G_{p,\psi} = \mathcal{D}^{-1}\mathcal{C}$, представим оператор $\mathcal{M}_d$ в виде произведения $\mathcal{M}_d = \Xi_d \mathcal{M}_0$, где $\mathcal{M}_0 = \Xi_{G_{p,\psi}} P_+ + P_-$. Очевидно, что $\ker \mathcal{M}_d = \ker \mathcal{M}_0$. Пусть $\varkappa_2 > 0$ и h произвольный многочлен с $\deg h < \varkappa_2$, а вектор-функция ℓ определена равенством $\ell = (h, 0)^t$. Множество $\ker \mathcal{M}_0$ (см. [11]) совпадает с множеством вектор-функций вида

$$(I - P_- \Xi_{G_{p,\psi}})(G_{p,\psi})_+ \ell = ((G_{p,\psi})_+ - (G_{p,\psi})_- \Lambda_{p,\psi})\ell = (E_2 - G_{p,\psi})(G_{p,\psi})_+ \ell,$$

где E_2 – единичная квадратная матрица второго порядка. Это множество совпадает со множеством вектор-функций вида $\varphi = (y, u)^t$, где

$$y = \left(\psi g_{11}^+ + \frac{p}{p^\wedge} g_{21}^+\right) \frac{\psi h}{1 - \psi^2}\,, \quad u = \left(\frac{p^\wedge}{p} g_{11}^+ + \psi g_{21}^+\right) \frac{\psi h}{1 - \psi^2}\,. \tag{3.4}$$

Из тождества (3.1) следует, что y принадлежит $\ker F$ тогда и только тогда, когда вектор-функция $\varphi = (y, y^\wedge)^t$ принадлежит $\ker \mathcal{M}$. Из (3.4) следует, что условие $u = y^\wedge$ эквивалентно равенству

$$\Phi^\wedge = \frac{p}{p^\wedge} \psi \Phi\,, \tag{3.5}$$

где $\Phi = g_{11}^{+\wedge} h^\wedge - g_{21}^+ h$. Замечая, что одновременно справедливо равенство $\Phi = \dfrac{p^\wedge}{p} \psi \Phi^\wedge$, нетрудно убедиться, что равенство (3.5) в свою очередь эквивалентно тождеству $\Phi = 0$. Утверждение а) доказано. Утверждение б) доказывается с помощью аналогичных рассуждений. Случай $\varkappa_2 = 0$ очевиден. □

Предложение 3.1 вместе с теоремами 2.1-2.6 позволяет дать следующее описание ядер операторов F_d, $\tilde{F}_d$. Ниже $[x]$ – целая часть числа $x \in R$.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия d1) - d4). Тогда*

a) если $\chi < 0$, то система функций

$$y_k = \frac{\psi p v_+ \tau_{2k}}{1 - \psi}, \quad k = 0, \dots, \left[\frac{-\chi - \nu - 1}{2}\right]$$

является базисом пространства $\ker F_d$*, а система функций*

$$u_k = \frac{p^\wedge v_+ \tau_{2k}}{1 - \psi}, \quad k = 0, \dots, \left[\frac{-\chi - \nu - 1}{2}\right]$$

является базисом пространства $\ker \tilde{F}_d$*;*

b) если $\chi > \nu + 1$, то система функций

$$y_k = \frac{\psi}{1 + \psi} \frac{p \tau_{2k-1}}{v_+}, \quad k = 1, \dots, \left[\frac{\chi - \nu}{2}\right]$$

является базисом пространства $\ker F_d$*, а система функций*

$$u_k = \frac{p^\wedge \tau_{2k-1}}{(1 + \psi) v_+}, \quad k = 1, \dots, \left[\frac{\chi - \nu}{2}\right]$$

является базисом пространства $\ker \tilde{F}_d$*;*

c) если $\chi = \nu + 1$*, то пространства* $\ker F_d$ *и* $\ker \widetilde{F}_d$ *тривиальны.*

Доказательство. Из теорем 2.1, 2.3, 2.5 следует, что при $\chi < 0$ условия $g_{11}^{+\wedge} h^{\wedge} = g_{21}^{+} h$ и $g_{11}^{+} h^{\wedge} = g_{21}^{+\wedge} h$ эквивалентны тому, что h – четный многочлен. Аналогично, из теорем 2.2, 2.4, 2.6 следует, что при $\chi > 0$ условия $g_{11}^{+\wedge} h^{\wedge} = g_{21}^{+} h$ и $g_{11}^{+} h^{\wedge} = g_{21}^{+\wedge} h$ эквивалентны тому, что h – нечетный многочлен. Пользуясь тем, что $\varkappa_2 = |\chi| - \nu$, из теорем 2.1, 2.3, 2.5 и предложения 3.1 получим доказательство утверждения a) и соответственно из теорем 2.2, 2.4, 2.6 и предложения 3.1 получим доказательство утверждений b) и c). Теорема доказана. □

3.3. Как известно (см. [1]) сопряженным оператором к сингулярному интегральному оператору S действующему в L_p $(1 < p < \infty)$ является вновь оператор S действующий в L_q $(q = p/(p-1))$. Учитывая также что U^* совпадает с U, а Ξ_d^* с $\Xi_{\bar{d}}$ (но действующих уже в L_q), легко видеть, что $F_d^* = \tilde{F}_{\bar{d}}$, $\tilde{F}_d^* = F_{\bar{d}}$, где операторы $\tilde{F}_{\bar{d}}$, $F_{\bar{d}}$ действуют уже в пространстве L_q. Но для $z \in \mathbb{T}$ имеет место

$$\overline{d(z)} = \frac{\overline{p(z)}}{\overline{p^{\wedge}(z)}} \overline{\psi(z)} = \frac{p_*^{\wedge}(z)}{p_*(z)} \psi_*(z),$$

где многочлен p_* и функция ψ_* определены в п. 2.4. Обозначив $d_* = \dfrac{p_*^{\wedge}}{p_*} \psi_*$, мы можем записать $F_d^* = \tilde{F}_{d_*}$, $\tilde{F}_d^* = F_{d_*}$. Рассмотрим уравнения $F_d y = f$, $\tilde{F}_d y = f$. Первое из этих уравнений разрешимо тогда и только тогда, когда f ортогональна $\ker \tilde{F}_{d_*}$. Соответственно второе уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда f ортогональна $\ker F_{d_*}$.

Пользуясь связью между $\chi_*, p_*, p_*^{\wedge}, \psi_*, v_{*+}$ и $\chi, p, p^{\wedge}, \psi, v_-$ (см. п. 2.4) на основе теоремы 3.1 нетрудно убедится в справедливости следующего результата.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия d1) - d4). Тогда*

a) если $\chi < 0$ *и* ν *– нечетное число, то для разрешимости уравнения* $F_d = f$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{f(z) p(-z) v_-(z)}{(1 + \psi(z)) z^{2k+\nu}} \, dz = 0, \quad k = 0, \ldots, \left[\frac{-\chi - \nu - 1}{2} \right],$$

а для разрешимости уравнения $\tilde{F}_d y = f$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{f(z) \psi(z) p(z) v_-(z)}{(1 + \psi(z)) z^{2k+\nu}} \, dz = 0, \quad k = 0, \ldots, \left[\frac{-\chi - \nu - 1}{2} \right];$$

b) если $\chi > 0$ и ν – четное число, то для разрешимости уравнения $F_d = f$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{f(z)p(-z)}{(1-\psi(z))v_-(z)z^{2k+\nu}}\,dz = 0, \quad k = 0, \dots, \left[\frac{\chi-\nu-1}{2}\right],$$

а для разрешимости уравнения $\tilde{F}_d y = f$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{f(z)\psi(z)p(z)}{(1-\psi(z))v_-(z)z^{2k+\nu}}\,dz = 0, \quad k = 0, \dots, \left[\frac{\chi-\nu-1}{2}\right];$$

c) если $\chi < 0$ и ν – четное число, то для разрешимости уравнения $F_d = f$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{f(z)p(-z)v_-(z)}{(1+\psi(z))z^{2k+\nu-1}}\,dz = 0, \quad k = 1, \dots, \left[\frac{-\chi-\nu}{2}\right],$$

а для разрешимости уравнения $\tilde{F}_d y = f$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{f(z)\psi(z)p(z)v_-(z)}{(1+\psi(z))z^{2k+\nu-1}}\,dz = 0, \quad k = 1, \dots, \left[\frac{-\chi-\nu}{2}\right];$$

d) если $\chi > 0$ и ν – нечетное число, то для разрешимости уравнения $\tilde{F}_d y = f$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{f(z)p(-z)}{(1-\psi(z))v_-(z)z^{2k+\nu-1}}\,dz = 0, \quad k = 1, \dots, \left[\frac{\chi-\nu}{2}\right],$$

а для разрешимости уравнения $\tilde{F}_d y = f$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{f(z)\psi(z)p(z)}{(1-\psi(z))v_-(z)z^{2k+\nu-1}}\,dz = 0, \quad k = 1, \dots, \left[\frac{\chi-\nu}{2}\right];$$

e) если $\chi = \nu + 1$, то уравнения $F_d y = f$ и $\widetilde{F}_d y = f$ разрешимы для любого $f \in L_p$.

Следствие 3.1. *При выполнении условий d1) - d4) операторы F_d и $\widetilde{F}_d$ обратимы (односторонне обратимы) тогда и только тогда, когда $\chi = \nu + 1$.*

Заметим, что при замене условия d4) на $\nu = |\chi|$, операторы F_d, $F_{\tilde{d}}$ становятся обратимыми. Этот случай подробно исследован в работе [19].

Abstract. The paper is devoted to investigation of the solvability of some characteristic singular integral equations on the circle with the Carleman shift $\omega(t) = -t$. Under some additional requirements on the coefficients, an explicit description of the kernels and the cokernels of the corresponding operators is given. The investigation method is based on the reduction of the solvability problem to the found explicit factorization of some matrix function.

Список литературы

[1] I. Gohberg, N. Krupnik, One-demensional Linear Singular Integral Operators, Operator Theory, Advances and Applications, **53**, Birkhauser Verlag (1992).

[2] Г. С. Литвинчук, Краевые Задачи и Сингулярные Интегральные Уравнения со Сдвигом. Наука, Москва (1997).

[3] Ю. И. Карлович, В. Г. Кравченко, Г. С. Литвинчук, "Теория Нетера сингулярных интегральных операторов со сдвигом", Изв. вузов. матем., no 4, 3 – 27 (1983).

[4] Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко, Уравнение с Инволютивными Операторами и их Приложения, Издательство Ростовского университета (1988).

[5] V. G. Kravchenko, G. S. Litvinchuk, Introduction to the Theory of Singular Integral Operations with Shift, vol. 289 of Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publishers (1994).

[6] Г. В. Дрекова, В. Г. Кравченко, "Размерность и структура ядра и коядра сингулярного интегрального оператора с дробно-линейным сдвигом Карлемана и сопряжением", ДАН СССР **315**, no. 2, 271 – 274 (1990).

[7] В. Г. Кравченко, А. К. Шаев, "Теория разрешимости сингулярных интегральных уравнений с дробно-линейным сдвигом Карлемана", ДАН СССР, **316**, no. 2, 288 – 292 (1991).

[8] V. Kravchenko, A. Lebre, J. Rodrigues, "Factorization of Singular Integral Operators with a Carleman Shift via Factorization of Matrix Functions", Operator Theory: Advances and Applications, **142**, 189 – 211, Birkhäuser Verlag, Basel (2003).

[9] А. Г. Камалян, А. В. Саргсян, "О частных индексах одного класса матриц-функций второго порядка", Изв. НАН Армении, Математика, **42**, no. 3, 39 – 48 (2007).

[10] A. V. Sargsyan, "On factorization of a class of second order matrix-functions, Proceedings of the YSU Phys. and Mathem. Sciences", no. 1, 9 – 15 (2010).

[11] K. Clancey, I. Gohberg, Factorization of Matrix Functions and Singular Integral Operators, Birkhauser Verlag, Basel (1981).

[12] G. S. Litvinchuk and I. M. Spitkovskii, Factorization of Measurable Matrix Functions, Akademie-Verlag, Berlin (1987).

[13] А. Г. Камалян, "Некоторые свойства ядер теплицевых операторов", Докл. НАН Армении, **107**, no. 4, 316 – 322 (2007).

[14] А. Г. Камалян, "Индексная факторизация матриц-функций", Докл. НАН Армении, **108**, no. 1, 5 – 11 (2008).

[15] Ф. Р. Гантмахер, Теория Матриц, Наука, Москва (1988).

[16] А. Г. Камалян, "Явная обобщенная факторизация ограниченных матриц-функций", Изв. НАН Армении, **32**, no. 21, 19 – 32 (1997).

[17] И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, "Об одномерных сингулярных интегральных операторах со сдвигом", Изв. АН Арм. ССР, Математика, **8**, no. 1, 3 – 12 (1973).

[18] З. Прёсдорф, "Линейные интегральные уравнения", Итоги науки и техн. ВИНИТИ Совр. проблемы мат., **27**, 5 – 130 (1988).

[19] A. V. Sargsyan, "Invertibility of some singular integral operators with shift", Proceeding of the YSU Phys. and Mathem. Sciences (в печати).

Поступила 29 декабря 2010