Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 3, 2011, стр. 3 – 16.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ ОДНОФАЗНОЙ ЗАДАЧИ ПРЕПЯТСТВИЯ

А. АРАКЕЛЯН, Р. БАРХУДАРЯН, М. ПОГОСЯН

Королевский технологический институт, Швеция
Институт математики, НАН Армении
Ереванский государственный университет
E-mail: *avetik@kth.se, rafayel@instmath.sci.am, michael@ysu.am*

Аннотация. В статье рассматривается метод конечных разностей для однофазной задачи препятствия. Получена оценка погрешности для этого приближения.

MSC2010 number: 35R35, 65N06

Ключевые слова: Задача со свободной границей, задача препятствия, метод конечных разностей.

1. Введение

Однофазную (или классическую) задачу препятствия можно описать как задачу определения состояния равновесия упругой мембраны при присутствии препятствия.

Если предположить, что мембрана расположена над областью $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с фиксированным граничным значением φ, а препятствие дано множеством $\{(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R} : y \leq \psi(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, то задача препятствия можно математически сформулировать как задачу минимизации функционала энергии

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \int_\Omega \lambda(x) u(x) dx$$

на множестве всех допустимых “деформаций” мембраны:

$$u \in \mathbb{K}_{\psi,\varphi} = \{v \in H^1(\Omega) : v - \varphi \in H_0^1(\Omega) \text{ и } v(x) \geq \psi(x) \ \text{ п.в. } \ \text{в } \Omega\}.$$

Здесь мы предполагаем, что $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ является ограниченной областью, а $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\lambda \in L^2(\Omega)$ и $\psi \in C^2(\Omega)$ суть данные функции.

Теоретические аспекты однофазной задачи препятствия хорошо изучены (см. [1, 5, 7, 10, 16]). Кроме того, существует обширная литература, посвященная численным методам решения вариационных неравенств, которые, в частности, годны для численного исследования классической задачи препятствия.

Данная работа посвящена методу конечных разностей для приближенного решения однофазной задачи препятствия.

Разностные схемы широко используются для численного решения вариационных неравенств, однофазных задач препятствия эллиптического и параболического типа, и, в частности, для задачи определения стоимости американских опционов (см., например, [17]). Этот метод легко реализуется и имеет достаточно хорошую скорость приближения на практике, так что имеется теоретический и практический интерес на исследование и математическое обоснование сходимости. Но как ни странно, до 2006 года не было никаких результатов сходимости и оценок погрешности. В 2006-ом Чэн и Хю (см. [3]) доказали квадратичную сходимость метода для двумерной классической задачи препятствия при условии, что решение принадлежит классу $C^4(\Omega)$. Это совсем не неожиданный результат, так как для $u \in C^4(\Omega)$, с помощью разложения Тейлора, можно доказать локальную оценку

$$\Delta u(x) - \Delta_h u(x) = O(h^2),$$

где Δ_h - конечно-разностное приближение Δ (определение см. ниже). Но, как известно (см. [1]), в общем случае, даже для бесконечно дифференцируемых препятствий ψ, решение u принадлежит только $C^{1,1}(\Omega)$. Таким образом, в общем случае результат [3] не может быть использован.

Между тем, в 2009 году, метод конечных разностей был применен для одномерной параболической задачи с препятствием в связи с задачей определения стоимости опционов американского типа (см. [8]). Там было доказано, что при некоторых естественных условиях метод конечных разностей сходится к точному решению со скоростью сходимости $o(\sqrt{h} + k)$, где h и k шаги дискретизации пространственного и временного переменного, соответственно.

В данной работе, опираясь на технику статьи [8] (в действительности идея восходит от Н. В. Крылова (см. [11, 12])), мы получим оценку погрешности приближенного решения однофазной задачи препятствия методом конечных разностей.

2. Метод конечных разностей

Хорошо известно, что классическая (однофазная) задача с препятствием можно преобразовать к задаче минимизации функционала

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \int_\Omega f(x)u(x)dx \tag{2.1}$$

на множестве

$$\mathbb{K} = \{v \in H^1(\Omega) : v - g \in H_0^1,\ v(x) \geq 0 \text{ в } \Omega\}, \tag{2.2}$$

где $f \in L^2(\Omega)$ и $g \in C(\overline{\Omega})$ - заданные функции. Известно также, что последняя может быть сформулирована в виде вполне нелинейной задачи

$$\min\{-\Delta u(x) + f(x), u(x)\} = 0, \quad x \in \Omega.$$

Тогда если обозначить

$$\mathcal{F}(v)(x) = \min\{-\Delta v(x) + f(x), v(x)\},$$

то классическая задача препятствия (2.1)-(2.2) можно записать в виде

$$\begin{cases} \mathcal{F}(u) = 0 & \text{в} \quad \Omega \\ u = g & \text{на} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

Решение этой задачи надо понимать в смысле вязкостого решения (см. напр. [2], [4]). Нетрудно проверить, что решение классической задачи препятствия удовлетворяет уравнению (2.3) как в вязкостном смысле, так и п.в..

Для численного решения мы будем предполагать, что $n = 1$ или 2. В случае $n = 1$ для простоты возьмем $\Omega = (-1, 1)$ а в случае $n = 2$ возьмем $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$, имея ввиду, что изложенный метод будет работать и для более сложных областей.

Пусть $N \in \mathbb{N}$ – натуральное число, $h = 2/N$ и

$$x_i = -1 + ih,\, y_i = -1 + ih, \quad i = 0, 1, ..., N.$$

Обозначим

$$\mathcal{N} = \{i : \ 0 \le i \le N\} \quad \text{или} \quad \mathcal{N} = \{(i, j) : \ 0 \le i, j \le N\},$$

$$\mathcal{N}^o = \{i : \ 1 \le i \le N - 1\} \quad \text{или} \quad \mathcal{N}^o = \{(i, j) : \ 1 \le i, j \le N - 1\},$$

в одномерном и двумерном случае, соответственно, и

$$\partial\mathcal{N} = \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^o.$$

Обозначим через $\Delta_h u$ конечно-разностное приближение оператора Лапласа, то есть, для $n = 1$

$$\Delta_h u(x) = \frac{u(x - h) - 2u(x) + u(x + h)}{h^2},$$

а для $n = 2$

$$\Delta_h u(x_1, x_2) = \frac{u(x_1 - h, x_2) + u(x_1 + h, x_2) + u(x_1, x_2 - h) + u(x_1, x_2 + h) - 4u(x_1, x_2)}{h^2}.$$

Введем следующее обозначение:

$$\mathcal{F}_h(v)(x) = \min\{-\Delta_h v(x) + f(x), v(x)\}, \qquad x \in \Omega_h$$

где

$$\Omega_h = \{\alpha \cdot h : \alpha \in \mathcal{N}^o\}.$$

Будем использовать также следующие обозначения:

$$\partial\Omega_h = \{\alpha \cdot h : \alpha \in \partial\mathcal{N}\} \quad \text{и} \quad \mathcal{H} = \{v = (v_\alpha) : v_\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathcal{N}\}.$$

Обозначим через u_h решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \mathcal{F}_h(u_h) = 0 & \text{в} \quad \Omega_h \\ u_h = g & \text{на} \quad \partial\Omega_h. \end{cases} \tag{2.4}$$

Целью данной работы является доказательство сходимости $u_h \to u$ при $h \to 0$, где u - решение (2.3), и получение оценки погрешности аппроксимации в терминах h.

Повсюду далее будем считать, что

$$\begin{aligned} &g \in C(\partial\Omega) \ \text{ и } \ g(x) > 0, x \in \partial\Omega; \\ &f \in C^3(\overline{\Omega}) \ \text{ и } \ f(x) > 0, x \in \Omega. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть f и g удовлетворяют условиям* (2.5), *а функции u и u_h суть решения* (2.3) *и* (2.4), *соответственно. Тогда существует константа $C_0 > 0$, не зависящая от h, такая что*

$$|u(x) - u_h(x)| \leq C_0 \cdot h^{4/11}, \quad x \in \Omega_h.$$

3. Технические леммы

3.1. Принцип сравнения для непрерывных и дискретных нелинейных уравнений.

Лемма 3.1. *(Принцип сравнения) Пусть Ω-ограниченная область и $v_1, v_2 \in W^{2,\infty}(\Omega)$. Если $\mathcal{F}(v_1) \leq \mathcal{F}(v_2)$ п.в. в Ω и $v_1 \leq v_2$ на $\partial\Omega$, то $v_1 \leq v_2$ в Ω.*

Доказательство. Обозначим

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega |\ v_1(x) > v_2(x)\}.$$

Если множество

$$\Omega_2 = \{x \in \Omega_1 : -\Delta v_1(x) > -\Delta v_2(x)\}$$

имеет положительную меру Лебега, то получим противоречие, так как $\mathcal{F}(v_1)(x) > \mathcal{F}(v_2)(x)$ в Ω_2. Следовательно, $-\Delta v_1(x) \leq -\Delta v_2(x)$ п.в. в Ω_1. Но в этом случае из слабого принципа максимума следует, что $v_2 \geq v_1$ в Ω_1, что противоречит определению Ω_1. Таким образом, $\Omega_1 = \emptyset$. $\square$

Лемма 3.2. *Пусть $v_1, v_2 \in \mathcal{H}$. Если $\mathcal{F}_h(v_1) \leq \mathcal{F}_h(v_2)$ в Ω_h и $v_1 \leq v_2$ на $\partial\Omega_h$, то $v_1 \leq v_2$ в Ω_h.*

Доказательство этой леммы можно найти в статье [15], где автор доказывает принцип сравнения для схем более общего типа (так называемых вырожденных эллиптических схем).

3.2. **Регуляризация и оценка погрешности.** Пусть $\beta \in C^\infty(\mathbb{R})$ функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\beta(z) = 0, \quad z \geq 0, \qquad \beta(z) = -z - 1, \; z \leq -2;$$
$$\beta'(z) \leq 0, \qquad \beta''(z) \geq 0, \; z \in \mathbb{R}$$

и $\beta_\varepsilon(z) = \beta\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)$, $z \in \mathbb{R}$. Обозначим через u^ε решение следующей вспомогательной задачи:

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon + f = \beta_\varepsilon(u^\varepsilon) & \text{в } \Omega, \\ u^\varepsilon = g & \text{на } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Из стандартной теории следует, что задача (3.1) имеет единственное решение u^ε и кроме того $u^\varepsilon \in C^4(\Omega)$.

Обозначим

$$M = \max\left\{\max_{x\in\overline{\Omega}} f(x), 1\right\}.$$

Лемма 3.3. *Если* u^ε*-решение задачи* (3.1)*, тогда*

(i) $\beta_\varepsilon(u^\varepsilon(x)) \leq M$ *для всех* $x \in \Omega$*;*

(ii) $u^\varepsilon(x) \geq -(M+1)\varepsilon$ *для всех* $x \in \Omega$.

Доказательство. Рассмотрим только случай $n = 2$, так как доказательство для $n = 1$ получается аналогично.

(i) Имеем $u^\varepsilon(x) = g(x) > 0$ для $x \in \partial\Omega$. Если $u^\varepsilon(x) \geq 0$ для всех $x \in \Omega$, то из определения функции β получим $\beta_\varepsilon(u^\varepsilon) = 0 < M$. В противном случае, если

$$u^\varepsilon(x_0) = \min_{x\in\overline{\Omega}} u^\varepsilon(x) < 0,$$

тогда $D^2u^\varepsilon(x_0) \geq 0$ (т.е. матрица $D^2u^\varepsilon(x_0)$ неотрицательно полуопределена), и следовательно $\Delta u^\varepsilon(x_0) \geq 0$.

Так как функция β убывающая, из определений u^ε и M получим, что для любого $x \in \Omega$,

$$\beta_\varepsilon(u^\varepsilon(x)) \leq \beta_\varepsilon(u^\varepsilon(x_0)) = -\Delta u^\varepsilon(x_0) + f(x_0) \leq f(x_0) \leq M.$$

(ii) Так как $\beta(z) = -z - 1$ для $z \leq -2$, то $\beta\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) = -\frac{z}{\varepsilon} - 1$ для $z \leq -2\varepsilon$, следовательно, $z = -\varepsilon\left(\beta_\varepsilon(z) + 1\right)$ для $z \leq -2\varepsilon$. Отсюда следует, что

$$u^\varepsilon = -\varepsilon\left(\beta_\varepsilon(u^\varepsilon) + 1\right), \quad \text{если} \quad u^\varepsilon \leq -2\varepsilon,$$

и используя (i), получим

$$u^\varepsilon \geq -\varepsilon(M+1), \quad \text{если} \quad u^\varepsilon \leq -2\varepsilon.$$

В случае, когда $u^\varepsilon \geq -2\varepsilon$, снова получим $u^\varepsilon \geq -\varepsilon(M+1)$, так как $M \geq 1$ по определению. Следовательно, для всех $x \in \Omega$, $u^\varepsilon(x) \geq -\varepsilon(M+1)$. $\square$

Лемма 3.4. *Для функции u^ε верны следующие оценки:*

(i) $-(M+1)\varepsilon \leq \mathcal{F}(u^\varepsilon)(x) \leq 0$ *для всех* $x \in \Omega$;

(ii) $0 \leq u(x) - u^\varepsilon(x) \leq \dfrac{3}{2}(M+1)\varepsilon$ *для всех* $x \in \Omega$.

Доказательство. (i) Прежде всего, по определению $\mathcal{F}$ и u^ε, имеем

$$\mathcal{F}(u^\varepsilon) = \min\{-\Delta u^\varepsilon + f, u^\varepsilon\} = \min\{\beta_\varepsilon(u^\varepsilon), u^\varepsilon\}.$$

Легко видеть, что $\mathcal{F}(u^\varepsilon) \leq 0$ для всех $x \in \Omega$. Действительно,

- если $u^\varepsilon \geq 0$, тогда $\beta_\varepsilon(u^\varepsilon) = 0$, и следовательно $\mathcal{F}(u^\varepsilon) = \min\{0, u^\varepsilon\} = 0$;
- если $u^\varepsilon < 0$, тогда $\mathcal{F}(u^\varepsilon) = \min\{\beta_\varepsilon(u^\varepsilon), u^\varepsilon\} \leq u^\varepsilon < 0$.

С другой стороны, учитывая, что $\beta_\varepsilon(u^\varepsilon) \geq 0$ (поскольку β неотрицательная всюду) и пользуясь оценкой пункта (ii) Леммы 3.3, получаем

$$\mathcal{F}(u^\varepsilon) = \min\{\beta_\varepsilon(u^\varepsilon), u^\varepsilon\} \geq -(M+1)\varepsilon.$$

(ii) Из пункта (i) имеем $\mathcal{F}(u^\varepsilon) \leq 0 = \mathcal{F}(u)$ в Ω и $u^\varepsilon = u$ на $\partial\Omega$. Тогда в силу Леммы 3.1 получим, что $u^\varepsilon \leq u$ в Ω.
Обозначим

$$\ell(x) = \frac{(M+1)\varepsilon}{2n}\left(3n - |x|^2\right), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда

$$\Delta\ell(x) = -(M+1)\varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}^n; \tag{3.2}$$

$$(M+1)\varepsilon \leq \ell(x) \leq \frac{3}{2}(M+1)\varepsilon, \quad x \in [-1,1]^n. \tag{3.3}$$

Учитывая (3.2), получим

$$\mathcal{F}(u-\ell) = \min\{-\Delta u + \Delta\ell + f, u-\ell\} = \min\{-\Delta u - (M+1)\varepsilon + f, u-\ell\}.$$

Теперь рассмотрим два случая:
1. Если $u = 0$, т.е. u касается препятствия, то

$$\min\{-\Delta u - (M+1)\varepsilon + f, u-\ell\} =$$
$$= \min\{-\Delta u - (M+1)\varepsilon + f, -\ell\} \leq -\ell \leq -(M+1)\varepsilon.$$

2. Если $u > 0$, то $-\Delta u + f = 0$, то есть

$$\min\{-\Delta u - (M+1)\varepsilon + f, u - \ell\} = \min\{-(M+1)\varepsilon, u - \ell\} \leq -(M+1)\varepsilon.$$

Отсюда заключаем, что

$$\mathcal{F}(u - \ell) \leq -(M+1)\varepsilon,$$

что, в сочетании с (i) Леммы 3.3, даст нам $\mathcal{F}(u - \ell) \leq \mathcal{F}(u^\varepsilon)$, $\forall x \in \Omega$. Если x принадлежит границе $\partial\Omega$, имеем (так как $\ell(x) \geq (M+1)\varepsilon > 0$ в Ω)

$$u(x) - \ell(x) = g(x) - \ell(x) \leq g(x) = u^\varepsilon(x),$$

и снова используя Лемму 3.1, получим, что $u(x)-\ell(x) \leq u^\varepsilon(x)$, $\forall x \in \Omega$. И наконец, из (3.3) получим

$$u(x) - u^\varepsilon(x) \leq \ell(x) \leq \frac{3}{2}(M+1)\varepsilon, \quad x \in [\,-1, 1]^n.$$

Лемма доказана. □

Доказательство следующей оценки Шаудера можно найти в [9, стр. 286].

Теорема 3.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - открытое, ограниченное множество и $f \in C^\alpha(\Omega)$ для некоторой $\alpha \in (0,1)$. Тогда существует постоянная $C_1 > 0$ такая, что если v является слабым решением уравнения $-\Delta v = f$ в Ω, то $v \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ и*

$$\|v\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C_1 \cdot \left(\|f\|_{C^\alpha(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)}\right). \tag{3.4}$$

В дальнейшем нам понадобится только следующий слабый вариант этого результата.

Следствие 3.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - открытое, ограниченное множество и $f \in C^1(\overline{\Omega})$. Тогда существует константа $C_2 > 0$ такая, что если v решение (классическое) уравнения $-\Delta v = f$ в Ω, то*

$$\|v\|_{C^2(\Omega)} \leq C_2 \cdot \left(\|f\|_{C^1(\Omega)} + \|v\|_{C^0(\Omega)}\right). \tag{3.5}$$

Следующая теорема является обобщением известного интерполяционного неравенства Ландау-Колмогорова на случай негладких областей и для функций многих переменных. Доказательство этого результата можно найти в [13] (см. также [14]):

Теорема 3.2. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ - ограниченная область, обладающая свойством внешнего конуса (см. [6]) и пусть $v \in L^\infty(D)$ и $D^2v \in L^\infty(D)$. Тогда существуют постоянные $C_3, C_4 > 0$ такие что*

$$\|Dv\|_{C^0(D)} \leq C_3\|D^2v\|^{1/2}_{C^0(D)} \cdot \|v\|^{1/2}_{C^0(D)} + C_4\|v\|_{C^0(D)}. \tag{3.6}$$

Следствие 3.2. *При условиях теоремы 3.2, существуют постоянные* $C_4, C_5 > 0$ *такие, что*

$$\|Dv\|_{C^0(D)} \le \delta\|D^2v\|_{C^0(D)} + \left(C_4 + \frac{C_5}{\delta}\right)\|v\|_{C^0(D)} \tag{3.7}$$

для любого $\delta > 0$.

Теперь перейдем к доказательству сходимости разностной схемы. Для этого нам нужны оценки частных производных четвертого порядка функции u^ε в терминах ε для контроля разности между лапласианом u^ε и приближением этого лапласиана конечными разностями.

Лемма 3.5. *Если функции* f *и* g *удовлетворяют условиям* (2.5)*, и* u^ε *- решение уравнения* (3.1)*, то*

$$\left|\frac{\partial^4 u^\varepsilon(x)}{\partial x_i^4}\right| \le \frac{C_6}{\varepsilon^{9/2}}, \quad \text{для} \quad x \in \Omega \quad i = 1, ..., n,$$

где C_6 *- постоянная, не зависящая от* ε.

Доказательство. Прежде всего заметим, что мы можем считать $\varepsilon \in (0,1)$, так как нам нужно перейти к пределу $\varepsilon \to 0+$.

В ходе доказательства символами C_i будем обозначать положительные постоянные, которые *не зависят от* ε. В частности, обозначим $C_f = \|f\|_{C^3(\Omega)}$ и $C_\beta = \|\beta\|_{C^3(\mathbb{R})}$.

Пусть u^ε-решение уравнения (3.1). Известно, что $u^\varepsilon \in C^4(\Omega)$. Обозначим

$$f_\varepsilon(x) = \beta_\varepsilon(u^\varepsilon(x)) - f(x) :$$

Тогда, $f_\varepsilon \in C^3(\Omega)$ и

$$-\Delta u^\varepsilon = f_\varepsilon \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{3.8}$$

Чтобы получить оценки частных производных u^ε четвертого порядка, сначала дважды продифференцируем обе стороны (3.8) относительно переменной x_i, и получим

$$-\Delta\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u^\varepsilon = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}f_\varepsilon.$$

Тогда, используя оценку (3.5), мы будем иметь

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u^\varepsilon\right\|_{C^2(\Omega)} \le C_2\left(\left\|\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}f_\varepsilon\right\|_{C^1(\Omega)} + \left\|\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u^\varepsilon\right\|_{C^0(\Omega)}\right) \le$$

$$\le C_2\left(\left\|\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}f_\varepsilon\right\|_{C^1(\Omega)} + \|u^\varepsilon\|_{C^2(\Omega)}\right). \tag{3.9}$$

Теперь нужно оценить $\left\|\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f_\varepsilon\right\|_{C^1(\Omega)}$ и $\|u^\varepsilon\|_{C^2(\Omega)}$, чтобы получить оценку для $\left\|\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u^\varepsilon\right\|_{C^2(\Omega)}$, и в частности, для $\left\|\frac{\partial^4}{\partial x_i^4} u^\varepsilon\right\|_{C^0(\Omega)}$.

Имеем,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f_\varepsilon = \beta_\varepsilon''(u^\varepsilon)\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}\right)^2 + \beta_\varepsilon'(u^\varepsilon)\cdot\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Отсюда следует, что

(3.10)

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f_\varepsilon\right\|_{C^1(\Omega)} \le \left\|\beta_\varepsilon''(u^\varepsilon)\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}\right)^2\right\|_{C^1(\Omega)} + \left\|\beta_\varepsilon'(u^\varepsilon)\cdot\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_i^2}\right\|_{C^1(\Omega)} + \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right\|_{C^1(\Omega)}.$$

Прежде всего,

$$\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right\|_{C^1(\Omega)} \le \|f\|_{C^3(\Omega)} = C_f. \tag{3.11}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
\left\|\beta_\varepsilon'(u^\varepsilon)\cdot\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_i^2}\right\|_{C^1(\Omega)} &= \left\|\beta_\varepsilon'(u^\varepsilon)\cdot\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_i^2}\right\|_{C^0(\Omega)} + \left\|D\left(\beta_\varepsilon'(u^\varepsilon)\cdot\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_i^2}\right)\right\|_{C^0(\Omega)} \le \\
&\le \|\beta_\varepsilon'(u^\varepsilon)\|_{C^0(\Omega)}\cdot\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_i^2}\right\|_{C^0(\Omega)} + \sum_{j=1}^n\left\|\beta_\varepsilon''(u^\varepsilon)\cdot\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_i^2}\right\|_{C^0(\Omega)} + \\
&+ \sum_{j=1}^n\left\|\beta_\varepsilon'(u^\varepsilon)\cdot\frac{\partial^3 u^\varepsilon}{\partial x_i^2\partial x_j}\right\|_{C^0(\Omega)} \le \\
&\le \left\|\frac{1}{\varepsilon}\beta'\left(\frac{u^\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right\|_{C^0(\Omega)}\cdot\left\|D^2 u^\varepsilon\right\|_{C^0(\Omega)} + \sum_{j=1}^n\left\|\frac{1}{\varepsilon}\beta'\left(\frac{u^\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right\|_{C^0(\Omega)}\cdot\left\|D^3 u^\varepsilon\right\|_{C^0(\Omega)} + \\
&+ \sum_{j=1}^n\left\|\frac{1}{\varepsilon^2}\beta''\left(\frac{u^\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right\|_{C^0(\Omega)}\cdot\|Du^\varepsilon\|_{C^0(\Omega)}\cdot\left\|D^2 u^\varepsilon\right\|_{C^0(\Omega)},
\end{aligned}$$

и следовательно,

$$\begin{aligned}
\left\|\beta_\varepsilon'(u^\varepsilon)\cdot\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_i^2}\right\|_{C^1(\Omega)} &\le \frac{C_\beta}{\varepsilon}\cdot\left\|D^2 u^\varepsilon\right\|_{C^0(\Omega)} + \\
&+ \frac{C_7}{\varepsilon^2}\cdot\|Du^\varepsilon\|_{C^0(\Omega)}\cdot\left\|D^2 u^\varepsilon\right\|_{C^0(\Omega)} + \frac{C_8}{\varepsilon}\cdot\left\|D^3 u^\varepsilon\right\|_{C^0(\Omega)}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Аналогично, для первого слагаемого в правой части (3.10), имеем

$$\begin{aligned}
\left\|\beta_\varepsilon''(u^\varepsilon)\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}\right)^2\right\|_{C^1(\Omega)} &\le \frac{C_\beta}{\varepsilon^2}\cdot\|Du^\varepsilon\|^2_{C^0(\Omega)} + \\
&+ \frac{C_9}{\varepsilon^3}\cdot\|Du^\varepsilon\|^3_{C^0(\Omega)} + \frac{C_{10}}{\varepsilon^2}\cdot\|Du^\varepsilon\|_{C^0(\Omega)}\cdot\left\|D^2 u^\varepsilon\right\|_{C^0(\Omega)}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Теперь мы последовательно получим оценки для производных u^ε соответственно первого, второго и третьего порядка. Здесь необходимо подчеркнуть, что эти оценки далеко не оптимальные.

Оценка для $\|D^2u^\varepsilon\|_{C^0(\Omega)}$. Используя (3.8) и (3.5), получим

$$\|u^\varepsilon\|_{C^2(\Omega)} \le C_2\left(\|f_\varepsilon\|_{C^1(\Omega)} + \|u^\varepsilon\|_{C^0(\Omega)}\right). \tag{3.14}$$

Прежде всего, из (ii) Леммы 3.4 следует, что существует постоянная $C_{11} > 0$, не зависящая от ε такая, что

$$\|u^\varepsilon\|_{C^0(\Omega)} \le C_{11}.$$

Теперь, по определению f_ε, и имея в виду, что β_ε равна нулю, если аргумент неотрицателен, мы получим

$$\|f_\varepsilon\|_{C^1(\Omega)} = \|f_\varepsilon\|_{C^0(\Omega)} + \|Df_\varepsilon\|_{C^0(\Omega)} \le \|\beta_\varepsilon(u^\varepsilon)\|_{C^0(\Omega)} + \|f\|_{C^0(\Omega)} +$$
$$+\|\beta'_\varepsilon(u^\varepsilon)\|_{C^0(\{u^\varepsilon<0\})}\cdot\|Du^\varepsilon\|_{C^0(\{u^\varepsilon<0\})} + \|Df\|_{C^0(\Omega)} \le$$
$$\le C_f + C_\beta\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\cdot\|Du^\varepsilon\|_{C^0(\{u^\varepsilon<0\})}\right) = C_{12} + \frac{C_\beta}{\varepsilon}\cdot\|Du^\varepsilon\|_{C^0(\{u^\varepsilon<0\})}.$$

Подставляя полученное в (3.14), будем иметь

$$\|u^\varepsilon\|_{C^2(\Omega)} \le C_{13} + \frac{C_{14}}{\varepsilon}\cdot\|Du^\varepsilon\|_{C^0(\{u^\varepsilon<0\})}, \tag{3.15}$$

и, в частности,

$$\|D^2u^\varepsilon\|_{C^0(\{u^\varepsilon<0\})} \le C_{13} + \frac{C_{14}}{\varepsilon}\cdot\|Du^\varepsilon\|_{C^0(\{u^\varepsilon<0\})}. \tag{3.16}$$

Теперь возьмем $D = \{x\in\Omega : u^\varepsilon(x) < 0\}$ и $v = u^\varepsilon$ в (3.7), откуда следует

$$\|Du^\varepsilon\|_{C^0(\{u^\varepsilon<0\})} \le \delta\|D^2u^\varepsilon\|_{C^0(\{u^\varepsilon<0\})} + \left(C_4 + \frac{C_5}{\delta}\right)\|u^\varepsilon\|_{C^0(\{u^\varepsilon<0\})}.$$

С помощью оценки (ii) Леммы 3.3 мы получаем $\|u^\varepsilon\|_{C^0(\{u^\varepsilon<0\})} \le (M+1)\varepsilon$, т.е.

$$\|Du^\varepsilon\|_{C^0(\{u^\varepsilon<0\})} \le \delta\|D^2u^\varepsilon\|_{C^0(\{u^\varepsilon<0\})} + (M+1)\left(C_4 + \frac{C_5}{\delta}\right)\varepsilon. \tag{3.17}$$

Взяв $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2C_5}$ в полученном неравенстве и подставляя в (3.16), в результате получим

$$\|D^2u^\varepsilon\|_{C^0(\{u^\varepsilon<0\})} \le \frac{C_{15}}{\varepsilon} \tag{3.18}$$

для некоторой константы C_{15}. Теперь возвращаясь к (3.17) и беря $\delta = \varepsilon$, из оценки (3.18) получим

$$\|Du^\varepsilon\|_{C^0(\{u^\varepsilon<0\})} \le C_{16} \tag{3.19}$$

для некоторой константы C_{16}.

Из (3.15) следует, что

$$\|u^\varepsilon\|_{C^2(\Omega)} \le \frac{C_{17}}{\varepsilon} \tag{3.20}$$

для некоторой константы C_{17}. Следовательно,

$$\|D^2 u^\varepsilon\|_{C^0(\Omega)} \le \frac{C_{17}}{\varepsilon}. \tag{3.21}$$

Исправленная оценка для $\|Du^\varepsilon\|_{C^0(\Omega)}$**.** Из (3.21) следует что $\|Du^\varepsilon\|_{C^0(\Omega)} \le \frac{C_{17}}{\varepsilon}$. Используя оценку (3.6) Теоремы 3.2 с $v = u^\varepsilon$ и $D = \Omega$, из (3.20) получаем

$$\|Du^\varepsilon\|_{C^0(\Omega)} \le \frac{C_{18}}{\sqrt{\varepsilon}}. \tag{3.22}$$

Оценка для $\|D^3 u^\varepsilon\|_{C^0(\Omega)}$**.** Дифференцируя обе стороны равенства (3.8) по переменному x_i, получим

$$-\Delta \frac{\partial}{\partial x_i} u^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_i} f_\varepsilon,$$

а из оценки (3.5), будем иметь

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i} u^\varepsilon\right\|_{C^2(\Omega)} \le C_{19}\left(\left\|\frac{\partial}{\partial x_i} f_\varepsilon\right\|_{C^1(\Omega)} + \left\|\frac{\partial}{\partial x_i} u^\varepsilon\right\|_{C^0(\Omega)}\right) \le \le C_{19}\left(\left\|\frac{\partial}{\partial x_i} f_\varepsilon\right\|_{C^1(\Omega)} + \|Du^\varepsilon\|_{C^0(\Omega)}\right). \tag{3.23}$$

Из определения f_ε,

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i} f_\varepsilon\right\|_{C^1(\Omega)} = \left\|\beta'_\varepsilon(u^\varepsilon)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}u_\varepsilon - \frac{\partial}{\partial x_i} f\right\|_{C^1(\Omega)} \le \left\|\beta'_\varepsilon(u^\varepsilon)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}u_\varepsilon\right\|_{C^1(\Omega)} +$$

$$+\left\|\frac{\partial}{\partial x_i} f\right\|_{C^1(\Omega)} \le \left\|\beta'_\varepsilon(u^\varepsilon)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}u_\varepsilon\right\|_{C^0(\Omega)} + \left\|D\left(\beta'_\varepsilon(u^\varepsilon)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}u_\varepsilon\right)\right\|_{C^0(\Omega)} +$$

$$+\left\|D^2 f\right\|_{C^0(\Omega)} \le \left\|\frac{1}{\varepsilon}\beta'\left(\frac{u^\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right\|_{C^0(\Omega)}\cdot\|Du_\varepsilon\|_{C^0(\Omega)} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left(\left\|\beta''_\varepsilon(u^\varepsilon)\cdot\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right\|_{C^0(\Omega)} + \left\|\beta'_\varepsilon(u^\varepsilon)\cdot\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_j\partial x_i}\right\|_{C^0(\Omega)}\right) + \left\|D^2 f\right\|_{C^0(\Omega)} \le \frac{C_{20}}{\varepsilon^3},$$

и поскольку (3.23) верна для любого $i = 1, ..., n$, мы получим

$$\|D^3 u^\varepsilon\|_{C^0(\Omega)} \le \frac{C_{20}}{\varepsilon^3}. \tag{3.24}$$

Наконец, сочетая (3.9)-(3.13), (3.20), (3.21), (3.23) и (3.24), получим

$$\left\|\frac{\partial^4 u^\varepsilon}{\partial x_i^4}\right\|_{C^0(\Omega)} \le \frac{C_6}{\varepsilon^{9/2}}, \quad i = 1, ..., n.$$

□

Лемма 3.6. *Существует постоянная $C>0$, не зависящая от ε такая, что*

$$|\Delta u^{\varepsilon}(x)-\Delta_h u^{\varepsilon}(x)|\le \frac{C}{\varepsilon^{9/2}}h^2,\quad x\in\Omega. \tag{3.25}$$

Доказательство. Оценка получается стандартным методом из разложения Тейлора с помощью Леммы 3.5. □

Лемма 3.7. *Пусть $C>0$ - постоянная из предыдущей леммы,*

$$\varphi_{\varepsilon}(x)=C\cdot\frac{h^2}{\varepsilon^{9/2}}\cdot\left(1-\frac{|x|^2}{2n}\right),\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

и

$$\psi_{\varepsilon}(x)=K\cdot\varepsilon\cdot\sum_{i=1}^{n}(\cos x_i-\cos 1.5),\quad x\in\Omega,$$

где $K=\dfrac{M+1}{n\cdot(\cos 1-\cos 1.5)}$. Если обозначить

$$\Phi_h^{\pm}(x)=u^{\varepsilon}(x)\pm\left(\varphi_{\varepsilon}(x)+\psi_{\varepsilon}(x)\right),\quad x\in\mathbb{R}^n$$

то для малого $h>0$,

$$\Phi_h^{-}(x)\le u_h(x)\le\Phi_h^{+}(x),\quad x\in\Omega_h.$$

Доказательство. Прежде всего докажем, что при достаточно малых $h>0$

$$\mathcal{F}_h(\Phi_h^{-})\le 0=\mathcal{F}_h(u_h)\le\mathcal{F}_h(\Phi_h^{+}),\quad x\in\Omega_h. \tag{3.26}$$

Поскольку

$$-\Delta_h\varphi_{\varepsilon}(x)=C\cdot\frac{h^2}{\varepsilon^{9/2}},$$

то из оценки (3.25) будем иметь $-\Delta_h\varphi_{\varepsilon}(x)\ge|\Delta u^{\varepsilon}(x)-\Delta_h u^{\varepsilon}(x)|$. Это означает, что

$$-\Delta u^{\varepsilon}(x)\le-\Delta_h\Big(u^{\varepsilon}(x)+\varphi_{\varepsilon}(x)\Big)=-\Delta_h\Big(\Phi_h^{+}-\psi_{\varepsilon}\Big)=-\Delta_h\Phi_h^{+}+\Delta_h\psi_{\varepsilon} \tag{3.27}$$

и

$$-\Delta u^{\varepsilon}(x)\ge-\Delta_h\Big(u^{\varepsilon}(x)-\varphi_{\varepsilon}(x)\Big)=-\Delta_h\Big(\Phi_h^{-}+\psi_{\varepsilon}\Big)=-\Delta_h\Phi_h^{-}-\Delta_h\psi_{\varepsilon}. \tag{3.28}$$

Следовательно,

$$\mathcal{F}(u^{\varepsilon})+\psi_{\varepsilon}=\min\{-\Delta u^{\varepsilon}+f,u^{\varepsilon}\}+\psi_{\varepsilon}=\min\{-\Delta u^{\varepsilon}+\psi_{\varepsilon}+f,u^{\varepsilon}+\psi_{\varepsilon}\}=$$

$$=\min\{-\Delta u^{\varepsilon}-\Delta_h\psi_{\varepsilon}+\psi_{\varepsilon}+\Delta_h\psi_{\varepsilon}+f,u^{\varepsilon}+\psi_{\varepsilon}\}.$$

Легко проверить, что

$$\psi_{\varepsilon}+\Delta_h\psi_{\varepsilon}\le 0\quad\text{в}\quad\mathbb{R}^n \tag{3.29}$$

для малых $h>0$.

Используя оценки (3.27) и (3.29) и определение Φ_h^+, получаем

$$\mathcal{F}(u^\varepsilon)+\psi_\varepsilon=\min\{-\Delta u^\varepsilon-\Delta_h\psi_\varepsilon+\psi_\varepsilon+\Delta_h\psi_\varepsilon+f,u^\varepsilon+\psi_\varepsilon\}\le$$

$$\le\min\{-\Delta u^\varepsilon-\Delta_h\psi_\varepsilon+f,u^\varepsilon+\psi_\varepsilon\}\le\min\{-\Delta_h\Phi_h^+ +f,u^\varepsilon+\psi_\varepsilon\}=$$

$$=\min\{-\Delta_h\Phi_h^+ +f,\Phi_h^+-\varphi_\varepsilon\}\le\min\{-\Delta_h\Phi_h^+ +f,\Phi_h^+\}=\mathcal{F}_h\left(\Phi_h^+\right).$$

Аналогично можно доказать, что $\mathcal{F}(u^\varepsilon)-\psi_\varepsilon\ge\mathcal{F}_h\left(\Phi_h^-\right)$. Из последнего неравенства, используя (i) Леммы 3.4, имеем

$$\mathcal{F}_h\left(\Phi_h^-\right)\le\mathcal{F}(u^\varepsilon)-\psi_\varepsilon\le-\psi_\varepsilon\le 0,$$

и

$$\mathcal{F}_h\left(\Phi_h^+\right)\ge\mathcal{F}(u^\varepsilon)+\psi_\varepsilon\ge-(M+1)\varepsilon+\psi_\varepsilon=$$

$$=-(M+1)\varepsilon+K\cdot\varepsilon\cdot\sum_{i=1}^n(\cos x_i-\cos 1.5)\ge-(M+1)\varepsilon+K\cdot\varepsilon\cdot\sum_{i=1}^n(\cos 1-\cos 1.5)=0$$

для всех $x\in\Omega$.

Таким образом, мы доказали (3.26). С другой стороны, используя неотрицательность φ_ε и ψ_ε на $\partial\Omega_h$, получим

$$\Phi_h^-(x)\le u_h(x)\le\Phi_h^+(x),$$

при $x\in\partial\Omega_h$. Для завершения доказательства остается воспользоваться Леммой 3.2. □

Следствие 3.3. *Существуют постоянные* $M_1,M_2>0$ *такие, что для малых* $h>0$

$$|u^\varepsilon(x)-u_h(x)|\le M_1\frac{h^2}{\varepsilon^{9/2}}+M_2\varepsilon,\quad x\in\Omega_h. \tag{3.30}$$

Доказательство. Из Леммы 3.7,

$$|u^\varepsilon(x)-u_h(x)|\le\varphi_\varepsilon(x)+\psi_\varepsilon(x),\quad x\in\Omega_h.$$

□

4. Доказательство Теоремы 2.1

Используя (3.30) и (ii) Леммы 3.4, получим

$$|u(x)-u_h(x)|\le|u(x)-u^\varepsilon(x)|+|u^\varepsilon(x)-u_h(x)|\le\frac{3}{2}(M+1)\varepsilon+M_1\frac{h^2}{\varepsilon^{9/2}}+M_2\varepsilon.$$

Полагая $\varepsilon=h^{4/11}$, будем иметь

$$|u(x)-u_h(x)|\le C_0\cdot h^{4/11},\quad x\in\Omega_h,$$

где $C_0=\frac{3}{2}(M+1)+M_1+M_2$.

Р. Бархударян и М. Погосян благодарят фонды Кнут и Алис Воленберг и Горан Гюстафсон за предоставленную возможность посетить Королевский Технологический Институт (КТН, Стокгольм).

Abstract. In this paper we consider the finite difference scheme approximation for one-phase obstacle problem and obtain an error estimate for this approximation.

Список литературы

[1] L. A. Caffarelli, "The obstacle problem revisited", J. fourier Anal. Appl., **4** (4-5), 383-402 (1998).
[2] L. A. Caffarelli, and X. Cabre, *Fully nonlinear elliptic equations* (vol. 43 of American Mathematical Society Colloquium Publications, American Mathematical Society, Providence, RI, 1995).
[3] X.-L. Cheng, and L. Xue, "On the error estimate of finite difference method for the obstacle problem", Appl. Math. Comput., **183**(1), 416-422 (2006).
[4] M. G. Grandall, H. Ishii, and P.-L. Lions, "User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations", Bull. Amer. Math. Soc. (New S.), **27** (1), 1-67 (1992).
[5] A. Friedman, *Variational principles and free–boundary problems* second Ed. (Robert E. Krieger Publishing Co. Inc., Malabar, FL, 1988).
[6] E. Gagliardo, "Ulteriori proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili", Ricerche Mat. **8** 24-51 (1959).
[7] R. Glowinski, *Numerical methods for nonlinear variational problems* (Scientific Computation, Springer-Verlag, Berlin, 2008), Reprint of the 1984 original.
[8] B. Hu, J. Liang, and L. Jiang, "Optimal convergence rate of the explicit finite difference scheme for American option valuation", J. Comput. Appl. Math., **230** (2), 583-599 (2009).
[9] J. Jost, *Partial differential equations* (vol. 214 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New-York, 2002), Translated and revised from the 1998 German original by the author.
[10] D. KinderLehrer, and G. Stampacchia, *An introduction to variational inequalities and their applications* (vol. 31 of Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2000), Reprinted of the 1980 original.
[11] N. V. Krylov, "On the rate of convergence of finite–difference approximations for Bellman's equations", Алгебра и Анализ, **9** (3), 245-256 (1997).
[12] N. V. Krylov, "On the rate of convergence of finite–difference approximations for Bellman's equations with variable coefficients", Probab. Theory Related Fields, **117** (1), 1-16 (2000).
[13] L. Nirenberg, "On elliptic partial differential equations", Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **13** (3), 115-162 (1959).
[14] L. Nirenberg, "An extended interpolation inequality", Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **20** (3), 733-737 (1966).
[15] A. M. Oberman, "Convergent difference schemes for degenerate elliptic and parabolic equations: Hamilton-Jacobi equations and free boundary problems", SIAM, J. Numer. Anal., **44** (2), (2006), 879–895 (electronic).
[16] J.-F. Rodrigues, *Obstacle problems in mathematical physics* (vol. 134 of North–Holland Mathematics Studies, North–Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987), Notas de Matemática[Mathematical Notes], 114.
[17] P. Wilmott, J. Dewynne, and S. Howison, *Option Pricing: Mathematical Models and Computation* (Oxford Financial Press, 1994).

Поступила 14 января 2011