Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 2, 2011, стр. 59-70.

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ И ВЛОЖЕНИЯХ СВОБОДНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУПП

А. С. ПАЙЛЕВАНЯН, Х. Р. РОСТАМИ

Ереванский государственный университет
E-mails: *apahlevanyan@ysu.am*, *hrrostami@ysu.am*

Аннотация. Пусть $B(m,n)$ - свободная периодическая группа периода n и произвольного ранга $m > 1$. В работе строится свободный моноид ранга 2 в группе автоморфизмов группы $B(m,n)$ для любого нечетного периода $n \geq 665$. Также, при простых $n > 1003$ доказывается, что если группа $B(m,n)$ вкладывается в некоторую n-периодическую группу G в качестве нормальной подгруппы, то она выделяется в G прямым множителем.

MSC2000 number: 20F50, 20F05, 20F28, 20M05, 20E36

Ключевые слова: свободная бернсайдова группа, группа автоморфизмов, свободная полугруппа, свободный моноид, периодическая группа.

1. Введение

Пусть F_m - абсолютно свободная группа произвольного ранга m, n - натуральное число, F_m^n - подгруппа порожденная всевозможными n-ми степенями элементов из F_m. Фактор-группа ${}^{F_m}/_{F_m^n}$, обозначается через $B(m,n)$ и называется свободной периодической или **свободной бернсайдовой группой** периода n и ранга m. Более просто, свободная бернсайдова группа $B(m,n)$ имеет следующее задание:

$$B(m,n) = \langle a_1, a_2, ...a_m | A^n = 1 \text{ для всех слов } A = A(a_1^{\pm 1}, ..., a_m^{\pm 1}) \rangle.$$

Поскольку F_m^n - порожденная словом x^n вербальная подгруппа группы F_m, то группа $B(m,n)$ свободна в многообразии всех n-периодических групп, т.е. всех групп, в которых выполняется тождественное соотношение $x^n = 1$.

Известная теорема С. И. Адяна утверждает, что для всех $m > 1$ и нечетных $n \geq 665$ группа $B(m,n)$ бесконечна (решение знаменитой проблемы Бернсайда, см [1], [2]).

Другая теорема С. И. Адяна утверждает, что для всех нечётных $n \geq 665$ и $m > 1$ центр группы $B(m,n)$ тривиален (см. [1, гл. VI, теорема 3.3]). Отсюда следует, что группа $B(m,n)$ изоморфна группе своих внутренних автоморфизмов.

В терминах групповых гомоморфизмов это означает, что последовательность гомоморфизмов

$$0 \to B(m,n) \hookrightarrow Aut(B(m,n)) \twoheadrightarrow {}^{Aut(B(m,n))}/_{Inn(B(m,n))} \to 0,$$

где $Inn(B(m,n))$ есть группа внутренних автоморфизмов группы $B(m,n)$, является точной. Отметим, что фактор-группа ${}^{Aut(B(m,n))}/_{Inn(B(m,n))}$ обозначается через $Out(B(m,n))$ и называется группой внешних автоморфизмов группы $B(m,n)$.

В работе Е. Черепанова [3] доказано, что при нечётных $n > 10^{78}$ каждый нормальный автоморфизм группы $B(m,n)$ является внутренним автоморфизмом. Напомним, что автоморфизм φ группы G называется **нормальным**, если для любой нормальной подгруппы N группы G выполнено равенство $\varphi(N) = N$. Ясно, что если N есть нормальная подгруппа группы G и $\varphi(N) = N$, то автоморфизм φ индуцирует некий автоморфизм фактор группы ${}^{G}/_{N}$.

Далее, для нечетных $n \geq 1003$ в работе [4] показано, что если φ - нормальный автоморфизм свободной бернсайдовой группы $B(m,n)$, то для любого базиса $\{a_1, a_2, ...a_m\}$ группы $B(m,n)$ существует такое целое число k, что $\varphi(a_i)$ сопряжен с a_i^k для каждого i.

Эти результаты об автоморфизмах свободных бернсайдовых групп усилены в работе [5], где доказано, что для произвольного нечётного $n \geq 1003$ и $m > 1$ каждый автоморфизм свободной бернсайдовой группы $B(m,n)$, который стабилизирует любую максимальную нормальную подгруппу $N \trianglelefteq B(m,n)$ бесконечного индекса, является внутренним автоморфизмом.

Некоторые другие результаты об автоморфизмах свободных периодических групп были получены в работах [6]-[9].

Первым основным результатом настоящей работы является

Теорема 1.1. *Для любого $m > 1$ и нечетного $n \geq 665$ группа автоморфизмов $Aut(B(m,n))$ свободной бернсайдовой группы $B(m,n)$ содержит свободный моноид ранга 2.*

Эта теорема будет доказана в параграфе 2. Теорема 1.1 усиливает аналогичный результат Е. Черепанова для нечетных $n > 10^{10}$ из работы [6] и результаты первого автора из работ [7]-[9].

Следствие 1.1. *Для любого $m \geq 1$ и нечетного $n \geq 665$ обе группы $Aut(B(s,n))$ и $Out(B(s,n))$, $s \geq 2m$, содержат подгруппу изоморфную свободной абелевой группе Z^m ранга m.*

Доказательство. Пусть $\{a_1, a_2\}$ пара свободных порождающих группы $B(2,n)$. Выберем элемент ψ бесконечного порядка группы $Aut(B(2,n))$, который существует согласно теореме 1.1. Рассмотрим группу $B(s,n)$, $s \geq 2m$, со свободными порождающими $\{a_i | i = 1, ..., s\}$ и автоморфизмы $\psi_i, i = 1, ..., m$, такие, что для любого i автоморфизм ψ_i действует на $\{a_{2i-1}, a_{2i}\}$ как ψ действует на $\{a_1, a_2\}$, и тождественно на остальных порождающих. Легко видеть, что эти автоморфизмы порождают упомянутую свободную абелеву группу ранга m. □

Заметим, что из следствия 1.1 непосредственно вытекает теорема 4 работы [10] и теорема IV.5.4 работы [11].

Второй результат относится к вложениям свободных бернсайдовых групп. Как было отмечено выше, свободная бернсайдова группа $B(m,n)$ вкладывается в группу автоморфизмов $Aut(B(m,n))$ как нормальная подгруппа внутренних автоморфизмов. Хорошо известная теорема Гелдера-Бэра (см. теорему 13.5.7 в [12]) утверждает, что если совершенная группа вкладывается в некоторую группу в качестве нормальной подгруппы, то выделяется в ней прямым множителем (группа называется *совершенной*, если она без центра и не имеет внешних автоморфизмов). Хотя группа $B(m,n)$ – без центра (теорема С. И. Адяна из [1, гл. VI., теорема 3.3])), тем не менее из теоремы 1.1 немедленно следует, что она не совершенна. Действительно, все внутренние автоморфизмы группы $B(m,n)$, очевидно, имеют порядок n, в то время как, по теореме 1.1, группа $B(m,n)$ имеет автоморфизмы бесконечного порядка, которые тем самым, будут внешними автоморфизмами. Но оказывается, что в многообразии n-периодических групп простого периода группы $B(m,n)$ ведут себя как совершенные группы.

Теорема 1.2. *Пусть G произвольная периодическая группа простого периода $n > 1003$, которая содержит нормальную подгруппу N, изоморфную свободной бернсайдовой группе $B(m,n)$ для некоторого ранга $m > 1$. Тогда группа G разлагается в прямое произведение $G = N \times C$, где C – централизатор подгруппы N в G.*

В частности, из теоремы 1.2 следует, что при $m \neq k$ и простых $n > 1003$ группа $B(m, n)$ не может быть вложена в какую либо группу $B(k, n)$ в качестве нормальной подгруппы, что впервые было доказано в работах [13], [14] (см. также [15]). Заметим также, что при простых $n > 1003$ теорема 1.2 усиливает теорему 1.2 работы [3].

2. Доказательство теоремы 1.1

Рассмотрим свободную группу $F(a, b)$ с порождающими a, b, и определим автоморфизмы ψ_1 и ψ_2 на порождающих следующим образом : $\psi_1(a) = ab$, $\psi_1(b) = ab^2$ и $\psi_2(a) = ba$, $\psi_2(b) = ba^2$. Их обратными являются автоморфизмы $\varphi_1(a) = ab^{-1}a$, $\varphi_1(b) = a^{-1}b$ и $\varphi_2(a) = a^{-1}b$, $\varphi_2(b) = ab^{-1}a$ соответственно.
Для доказательства теоремы 1.1, очевидно, достаточно доказать следующее предложение.

Предложение 2.1. *Для любого нечетного $n \geq 665$ автоморфизмы ψ_1 и ψ_2 составляют базис свободной полугруппы ранга 2 в группе автоморфизмов $Aut(B(m, n))$ свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ ранга $m > 1$.*

Пусть ψ_S обозначает композицию $\psi_S = \psi_{i_1}\psi_{i_2}\ldots\psi_{i_l}$, где $S = i_1 i_2 \ldots i_l$ является конечной последовательностью из двух символов 1 и 2. Везде в тексте знак $\equiv$ означает графическое равенство слов. По определению для любого слова W имеем $\psi_S(W) \rightleftharpoons \psi_{i_l}(\psi_{i_{l-1}}\ldots(\psi_{i_2}(\psi_{i_1}(W)))\ldots)$. Обозначим $U_S = \psi_S(a)$, $V_S = \psi_S(b)$. Все слова U_S, V_S являются положительными, т.е. они не содержат букв a^{-1} и b^{-1}. Следовательно, они представляют элементы свободной полугруппы с базисом $\{a, b\}$.
Отметим некоторые первые члены последовательностей U_S, V_S, которые нам понадобятся:

$U_1 = ab, V_1 = ab^2, U_2 = b\,a, V_2 = ba^2,$

$U_{11} = abab^2, V_{11} = abab^2ab^2, U_{12} = baba^2, V_{12} = baba^2ba^2,$

$U_{21} = ab^2ab, V_{21} = ab^2abab, U_{22} = ba^2ba, V_{22} = ba^2baba.$

$U_{111} = abab^2abab^2ab^2 = U_{11}V_{11}, V_{111} = abab^2abab^2ab^2abab^2ab^2 = U_{11}V_{11}V_{11},$

$U_{112} = baba^2baba^2ba^2 = U_{12}V_{12}, V_{112} = baba^2baba^2ba^2baba^2ba^2 = U_{12}V_{12}V_{12},$

$U_{121} = ab^2abab^2abab = U_{21}V_{21}, V_{121} = ab^2abab^2ababab^2abab = U_{21}V_{21}V_{21},$

$U_{122} = ba^2baba^2baba = U_{22}V_{22}, V_{122} = ba^2baba^2bababa^2baba = U_{22}V_{22}V_{22},$

$U_{211} = abab^2ab^2abab^2 = V_{11}U_{11}, V_{211} = abab^2ab^2abab^2abab^2 = V_{11}U_{11}U_{11},$

$$U_{212} = baba^2ba^2baba^2 = V_{12}U_{12}, V_{212} = baba^2ba^2baba^2baba^2 = V_{12}U_{12}U_{12},$$
$$U_{221} = ab^2ababab^2ab = V_{21}U_{21}, V_{221} = ab^2ababab^2abb^2ab = V_{21}U_{21}U_{21},$$
$$U_{222} = ba^2bababa^2ba = V_{22}U_{22}, V_{222} = ba^2bababa^2baba^2ba = V_{22}U_{22}U_{22}. \tag{2.1}$$

Легко проверить, что если слово T имеет вид $T \equiv W_{S_1}W_{S_2}\dots W_{S_k}$, где $W \in \{U, V\}$, а S_1, S_2, $\cdots$, S_k – произвольные последовательности символов 1 и 2, то имеем $\psi_{i_t}(T) = \psi_{i_t}(W_{S_1}W_{S_2}\dots W_{S_k}) = W_{S_1 i_t}W_{S_2 i_t}\dots W_{S_k i_t}$.
В дальнейшем, через $\partial(X)$ будем обозначать длину слова X, а через $\overline{X}$- слово X написанное на окружности не фиксируя его начало. Если $S = i_1 i_2 \cdots i_t$ – произвольная последовательность, то обозначим $S' = i_2 \dots i_{t-1} i_t$. Таким образом, имеем $S = i_1 S' = i_1 i_2 S''$.
Из сделанных выше замечаний вытекают следующие две леммы.

Лемма 2.1. *(см.* [6]*, Лемма 2) Для любой непустой последовательности $S = i_1 i_2 \dots i_t$ имеем следующие возможные случаи для слов U_S и V_S:*

$$U_S = U_{S'}V_{S'},\ V_S = U_{S'}V_{S'}V_{S'} \tag{2.2}$$

при $S = 1S'$, и

$$U_S = V_{S'}U_{S'},\ V_S = V_{S'}U_{S'}U_{S'}. \tag{2.3}$$

при $S = 2S'$.

Лемма 2.2. *(см.* [6]*, Следствие 2.0 п.(2)) Для любой непустой последовательности S имеют место неравенства*

$$4 \cdot \partial(U_S) < 3 \cdot \partial(V_S) < 5 \cdot \partial(U_S).$$

Определение 2.1. *Слово Z называется простым, если оно не представимо в виде $Z = D^r$ для $r > 1$.*

Нам понадобится также следующая лемма из монографии [1].

Лемма 2.3. *(см.* [1]*, Лемма I.2.9) Если $A^tA' \equiv B^rB'$, где слово A' есть начало A, B' есть начало B и $\partial(A^tA') \geq \partial(AB)$, то можно указать такое слово D, что $A \equiv D^k$ и $B \equiv D^s$ при некоторых k и s. В частности, если A- простое слово, то $B \equiv A^k$.*

Лемма 2.4. *Для любой непустой последовательности* $S = pqS''$, $p, q \in \{1, 2\}$ *имеем*

$$U_{11S''} = \underbrace{U_{S''}V_{S''}}_{U_{1S''}}\underbrace{U_{S''}V_{S''}V_{S''}}_{V_{1S''}}, V_{11S''} = \underbrace{U_{S''}V_{S''}}\underbrace{U_{S''}V_{S''}V_{S''}}\underbrace{U_{S''}V_{S''}V_{S''}},$$

$$U_{12S''} = \underbrace{V_{S''}U_{S''}}\underbrace{V_{S''}U_{S''}U_{S''}}, V_{12S''} = \underbrace{V_{S''}U_{S''}}\underbrace{V_{S''}U_{S''}U_{S''}}\underbrace{V_{S''}U_{S''}U_{S''}},$$

$$U_{21S''} = \underbrace{U_{S''}V_{S''}V_{S''}}_{V_{1S''}}\underbrace{U_{S''}V_{S''}}_{U_{1S''}}, V_{21S''} = \underbrace{U_{S''}V_{S''}V_{S''}}\underbrace{U_{S''}V_{S''}}\underbrace{U_{S''}V_{S''}},$$

$$U_{22S''} = \underbrace{V_{S''}U_{S''}U_{S''}}\underbrace{V_{S''}U_{S''}}, V_{22S''} = \underbrace{V_{S''}U_{S''}U_{S''}}\underbrace{V_{S''}U_{S''}}\underbrace{V_{S''}U_{S''}}.$$

Доказательство непосредственно следует из определения ψ_S и соотношений (2.2) и (2.3) леммы 2.1. □

Соотношения (2.2) и (2.3) показывают, что для любой последовательности S слово U_S является началом слова V_S и $\partial(U_S) < \partial(V_S)$. Отсюда, используя лемму 2.2, получаем $\partial(V_{11S''}) \geq \partial(V_{12S''})$. Кроме того, из леммы 2.4 следует, что длина слова $V_{11S''}$ меньше $34/3 \cdot \partial(U_{S''})$. Итак, мы получили, что для любой последовательности $S = pqS''$, $p, q \in \{1, 2\}$, длины слов U_S и V_S удовлетворяют неравенствам $\partial(U_S) < \partial(V_S) < 12\partial(U_{S''})$. Отсюда получаем

Лемма 2.5. *Если слово* Z^{12} *входит в одно из слов* $\overline{U_S}$ *или* $\overline{V_S}$, *то* $\partial(Z) < \partial(U_{S''}), \partial(V_{S''})$, *в частности,* ${U_{S''}}^{12}$ *не входит в слова* $\overline{U_S}$ *и* $\overline{V_S}$.

Обозначим $V_{S'} \rightleftharpoons A$, $U_{S'} \rightleftharpoons B$, $V_{S''} \rightleftharpoons C$, $U_{S''} \rightleftharpoons D$. В силу леммы 2.2 имеем $5/3 \cdot \partial(B) > \partial(A)$ и $5/3 \cdot \partial(D) > \partial(C)$.

Зафиксируем некоторую последовательность $S = i_1 \dots i_l$. В дальнейшем тексте везде под буквой Z будем подразумевать простое слово.

Лемма 2.6. U_S *и* V_S *не являются полными степенями.*

Доказательство. Доказательство будем вести индукцией по длине $\partial(S) = l$ последовательности S. При $l \leq 3$ прямая проверка показывает, что слова U_S и V_S не являются полными степенями (см. соотношения (2.1)). Пусть $l \geq 3$. Предположим, что утверждение верно для всех последовательностей длины $\partial(S) < l$, и докажем утверждение для $\partial(S) = l$.

1. Пусть $U_S \equiv Z^k$ и $k \geq 2$. Рассмотрим, например, случай

$$U_S = U_{11S''} = U_{S''}V_{S''}U_{S''}V_{S''}V_{S''}.$$

Имеем

$$U_S = U_{11S''} = BAA \equiv DCDCC \equiv \underbrace{ZZ...Z}_{k}.$$

Поскольку, очевидно, циклический сдвиг полной степени является полной степенью, то сдвигая последнюю букву C в начало получаем

$$CDCDC \equiv (CD)^2C \equiv \underbrace{Z_1Z_1...Z_1}_{k},$$

где Z_1 есть циклический сдвиг слова Z. Отсюда, учитывая $k \geq 2$, имеем $\partial(CDC) > \partial(Z_1)$. Поскольку Z_1 простое слово, то применяя лемму 2.3 получаем $CD \equiv {Z_1}^p$. В случае $p = 1$ имеем $CD = Z_1$, что противоречит условию $(CD)^2C \equiv {Z_1}^k$ поскольку $D \neq \Lambda$. В случае $p > 1$ для $S' = 2S''$, $\partial(S') < l$, имеем $CD \equiv \overline{U_{S'}} = \overline{B} = {Z_1}^p$ есть полная степень, что противоречит индуктивному предположению.

2. Все остальные случаи выражений слов U_S и V_S из леммы 2.4 рассматриваются совершенно аналогично. А именно, для слова $U_{12S''} = CDCDD$ сдвигаем конец D в начало, а для всех остальных случаев сдвигаем начало длины 2 слов U_S, V_S в конец и продолжаем как в пункте 1. В результате получаем

$U_{11S''} = DCDC\underline{C},\ (CD)^2C = {Z_1}^k,\ CD = {Z_1}^p,$

$V_{11S''} = \underline{DC}DCCDCC,\ (DCC)^2DC = {Z_1}^k,\ DCC = {Z_1}^p,$

$U_{12S''} = CDCD\underline{D},\ (DC)^2D = {Z_1}^k,\ DC = {Z_1}^p,$

$V_{12S''} = \underline{CD}CDDCDD,\ (CDD)^2CD = {Z_1}^k,\ CDD = {Z_1}^p,$

$U_{21S''} = \underline{DC}CDC,\ (CD)^2C = {Z_1}^k,\ CD = {Z_1}^p,$

$V_{21S''} = \underline{DC}CDCDC,\ (CD)^3C = {Z_1}^k,\ CD = {Z_1}^p,$

$U_{22S''} = \underline{CD}DCD,\ (DC)^2D = {Z_1}^k,\ DC = {Z_1}^p,$

$V_{22S''} = \underline{CD}DCDCD,\ (DC)^3D = {Z_1}^k,\ DC = {Z_1}^p.$

Второе равенство каждой строки получается сдвигом подчеркнутой части первого равенства в другой конец слова. Третье равенство каждой строки получается из второго равенства той-же строки применением леммы 2.3. Далее, в случае $p = 1$ или $p > 1$, как и в пункте 1, получаем противоречия. Этим и завершается доказательство леммы. □

Пусть $\overline{X}$ означает циклическое слово, т.е. слово X написанное на окружности.

Лемма 2.7. *Если* $\overline{U_S}$, $\overline{V_S}$ *содержат* Z^k, *то* $k < 12$.

Доказательство. Проведем индукцию по длине последовательности S с очевидной базой. Допустим, что некоторое слово Z^{12} входит в одно из слов $\overline{U_S}$, $\overline{V_S}$. Заметим, что Z^{12} не может входить в слова $\overline{DCC}$ и $\overline{CDD}$, так как в таком случае оно бы входило в $\overline{A}$, что противоречит предположению индукции. Тогда Z^{12} не входит в подслова слов $\overline{U_S}$, $\overline{V_S}$ длины 3 над алфавитом $\{C, D\}$. Следовательно, оно содержит подслово длины 2 слова $\overline{U_S}$ или $\overline{V_S}$ над алфавитом $\{C, D\}$. Из неравенств $4 \cdot \partial(U_S) < 3 \cdot \partial(V_S) < 5 \cdot \partial(U_S)$ леммы 2.2 следует, что $\partial(U_S) < \partial(V_S)$. Следовательно $\partial(Z) < \partial(D) < \partial(C)$. Слов длины 2 над алфавитом $\{C, D\}$ четыре - CC, CD, DC, DD. Следовательно, в каждое из слов, входящих в Z^{12}, входит слово ${Z_1}^2$, где Z_1 является циклическим сдвигом слова Z. Тогда имеет место хотя бы одно из следующих равенств:

$$CC = {Z_1}^r {Z_1}', \quad CD = DXD = {Z_1}^r {Z_1}', \quad DC = DDX = {Z_1}^r {Z_1}', \quad DD = {Z_1}^r {Z_1}',$$

где Z_1 есть некоторый циклический сдвиг слова Z, $r \geq 2$, D есть начало C, а X есть начало D. Согласно лемме 2.3 имеем или $C = {Z_1}^p$, или $D = {Z_1}^p$, что противоречит лемме 2.6 для $p > 1$ и лемме 2.5 для $p = 1$. □

Лемма 2.8. *В свободной группе $F(a,b)$ выполнено равенство $\psi_{S_1}(x) = \psi_{S_2}(x)$, $x \in F(a,b) \setminus \{1\}$ тогда и только тогда, когда $S_1 \equiv S_2$.*

Доказательство. При $S_1 \equiv S_2$ очевидно имеем $\psi_{S_1}(x) = \psi_{S_2}(x)$. Докажем обратное утверждение индукцией по длине S_1. Для $\partial(S_1) = 1$ утверждение следует из определений автоморфизмов ψ_1, ψ_2. Пусть $\psi_{S_1}(x) = \psi_{S_2}(x)$ и $S_1 \equiv T_1 i_k$, $S_2 = T_2 j_t$. Если $i_k = j_t$, то из обратимости ψ_{i_k} и равенства $\psi_{i_k}(\psi_{T_1}(x)) = \psi_{i_k}(\psi_{T_2}(x))$ следует $\psi_{T_1}(x) = \psi_{T_2}(x)$. Тогда, по индуктивному предположению, имеем $T_1 \equiv T_2$ и, тем самым, $S_1 \equiv S_2$. Пусть теперь $i_k \neq j_t$. Поскольку для любого непустого слова A слово $\psi_1(A)$ заканчивается буквой b, а слово $\psi_2(A)$ – буквой a, то при $i_k \neq j_t$ имеет место $\psi_{i_k}(A) \neq \psi_{j_t}(B)$ для любых положительных слов A, B. Лемма доказана. □

Следующая лемма была доказана В. С. Атабекяном. Здесь $q = 90$.

Лемма 2.9. *Если X – непустое несократимое слово и $X \overset{B(m,n)}{=} 1$, то X содержит подслово вида A^{q-1}.*

Доказательство. Пусть X – непустое несократимое слово и $X \overset{B(m,n)}{=} 1$. По теореме VI.2.9 монографии [1] для некоторого ранга β имеем $X = 1$ в группе

$B(m,n,\beta)$. В силу [1, гл.IV, §2, лемма 2.16], тогда для некоторого α имеем $X \notin \mathcal{R}_\alpha$. Но так как $X \in \mathcal{R}_0$ (X – несократимое слово), то $X \in \mathcal{R}_{\gamma-1} \setminus \mathcal{R}_\gamma$ для некоторого ранга γ. Согласно [1, гл.IV, §1, лемма 1.19], можно указать некоторое вхождение $V \in$ Норм$(\gamma, X, n-175)$. Если основа вхождения V является периодическим словом, то в слово X входит слово вида A^{n-176} и лемма доказана. В противном случае, согласно [1, гл.II, §4, лемма 4.8] в слово $E =$ Осн(V) входит некоторая элементарная q-степень E_1 ранга $\delta < \gamma$. Выбрав ранг δ с указанным условием минимальным, получим что в соответствующее элементарное слово E_1 не входит никакая элементарная q-степень ранга $\mu < \delta$, причем $l_\delta(E_1) \geq q$. Опять применяя [1, гл.II, §4, лемма 4.8], получаем, что слово E_1 является периодической q-степенью. Лемма доказана. $\square$

Теперь мы можем перейти к доказательсву предложения 2.1.

Рассмотрим автоморфизмы ψ_1 и ψ_2 группы $B(m,n)$, определенные в начале параграфа. Полугруппу, порожденную в $Aut(B(m,n))$ этими автоморфизмами обозначим через G. Полугруппа G является несвободной тогда и только тогда, когда существуют разные последовательности S_1 и S_2 из символов 1 и 2, такие, что $\psi_{S_1} = \psi_{S_2}$ в $Aut(B(m,n))$. Если $S_1 \neq S_2$, но $\psi_{S_1} = \psi_{S_2}$ в $Aut(B(m,n))$, то по лемме 2.8, циклически несократимая в свободной группе $F(a,b)$ форма слова $\psi_{S_1}(a)(\psi_{S_2}(a))^{-1}$ непуста и, согласно лемме 2.7, не содержит никакого слова вида Z^{24}. По лемме 2.9 это слово не равно 1 в $B(m,n)$. Следовательно, $\psi_{S_1} = \psi_{S_2}$ в $Aut(B(m,n))$ только в случае $S_1 \equiv S_2$.

Таким образом, Предложение 2.1 и Теорема 1.1 доказаны.

3. Доказательство теоремы 1.2

Пусть H – максимальная нормальная подгруппа группы G такая, что $H \cap N = \{e\}$ (существование подгруппы H следует из леммы Цорна). Тогда, очевидно, канонический образ N_1 подгруппы N в группе $G_1 = G/H$ изоморфен N. Таким образом, мы имеем две нормальные подгруппы H и N группы G такие, что $H \cap N = \{e\}$. Докажем, что $G = N \times H$. Для этого, достаточно показать, что $G/H = N_1$, т.е. $G_1 = N_1$.

Если бы в группе G_1 существовала нетривиальная нормальная подгруппа, которая имеет тривиальное пересечение с подгруппой N_1, то это противоречило бы условию, что H максимальная подгруппа среди всех подгрупп, тривиально пересекающихся с N. Легко проверяется, что централизатор произвольной нормальной подгруппы является нормальной подгруппой. Поэтому, если централизатор C_1 подгруппы N_1 в группе G_1 нетривиален, то он имеет с подгруппой N_1 нетривиальное пересечение, содержащееся в центре группы N_1. Но по теореме С.И.Адяна (см. [1, гл.VI, теорема 3.4]), центр группы $B(m,n)$ тривиален. Так как $N_1 \simeq B(m,n)$, то немедленно заключаем, что $C_1 = \{e\}$, т.е. централизатор C_1 подгруппы N_1 в группе G_1 тривиален.

Прежде всего заметим, что порядок каждого элемента группы G_1 равен n. Предположим, что $G_1 \neq N_1$.

Пусть фактор группа ${G_1}/{N_1}$ порождается смежным классом gN_1. Таким образом $g \notin N_1$ и $g^n \in N_1$. Рассмотрим автоморфизм $\phi_g : N_1 \to N_1$ группы N_1, определенный формулой $\phi_g(x) = gxg^{-1}$ для любого элемента $x \in N_1$. Предположим, что автоморфизм ϕ_g является внутренним автоморфизмом группы N_1. Тогда для некоторого элемента $y \in N_1$ и для всех $x \in N_1$ имеет место равенство $\phi_g(x) = yxy^{-1}$, т.е. $gxg^{-1} = yxy^{-1}$, и поэтому элемент $y^{-1}g$ принадлежит централизатору C_1 подгруппы N_1 в группе G_1.

Но, как было доказано, $C_1 = \{e\}$. Следовательно, $y^{-1}g = 1$, что противоречит условию $g \notin N_1$. Значит наше предположение не верно, т.е. ϕ_g не является внутренним автоморфизмом группы N_1.

Теперь воспользуемся следующим результатом, доказанным в работе [5]

Лемма 3.1. *(см. следствие 1 из* [5]*) Пусть $n \geq 1003$ – произвольное нечётное число и φ – автоморфизм группы $B(m,n)$ такой, что $\varphi(N) = N$ для каждой максимальной нормальной подгруппы $N \trianglelefteq B(m,n)$, для которой ${B(m,n)}/{N}$ – бесконечная группа (содержащая элементы порядка n). Тогда φ – внутренний автоморфизм.*

Согласно лемме 3.1, существует такая нормальная подгруппа L группы N_1, что $\phi_g(L) \neq L$ и ${N_1}/{L}$ – неабелева простая группа, содержащая элементы порядка n. По выбору подгруппы L, существует элемент $x \in L$ такой, что $\phi_g(x) \notin L$, т.е. $gxg^{-1} \notin L$. Это означает, что L не является нормальной подгруппой группы H. Рассмотрим нормальную подгруппу $K = \bigcap_{y \in G_1} yLy^{-1}$ группы G_1. Для завершения доказательства теоремы 1.2 воспользуемся следующим утверждением, доказанным А. Ю. Ольшанским в работе [13].

Лемма 3.2. *(см. леммы 2.1 и 2.2 из* [13]*) Пусть N_1 такая нормальная подгруппа группы G_1, что G_1/N_1 - циклическая группа порядка p. Предположим также, что для некоторой нормальной в N_1, но не нормальной в G_1 подгруппы L, фактор-группа N_1/L - неабелева простая группа, содержащая элемент порядка n. Положим $K = \bigcap\limits_{x \in H} xLx^{-1}$. Тогда произведение pn делит порядок некоторого элемента из фактор-группы G_1/K.*

Все условия леммы 3.2 в нашем случае выполнены. Поэтому можем заключить, что в фактор группе G_1/K содержится элемент порядка n^2, что невозможно, так как по условию, группа G и, следовательно, группа G_1, периодическая группа периода n. Полученное противоречие доказывает, что в фактор группе G_1/N_1 нет элементов простого порядка, в то время как G_1 - периодическая группа. Следовательно $G_1 = N_1$.

Таким образом, мы доказали, что $G = N \times H$. По условию теоремы, группа N изоморфна группе $B(m,n)$. Так как центр группы $B(m,n) \simeq N$ тривиален, то из равенства $G = N \times H$ очевидным образом вытекает, что централизатор C подгруппы N в группе G совпадает с H. Теорема 1.2 доказана.

Abstract. The paper gives a construction of a free monoid of rank 2 in the group of automorphisms of free periodic groups $B(m,n)$ of any odd period $n \geq 665$ and any rank $m > 1$. Moreover, it is proved that if the period is any prime number $n > 1003$ and the group $B(m,n)$ is nested in some n-periodic group G as a normal subgroup, then $B(m,n)$ is a direct factor in G.

Список литературы

[1] С. И. Адян, Проблема Бернсайда и тождества в группах, Наука, М. (1975).

[2] П. С. Новиков, С. И. Адян, “О бесконечных периодических группах. I, II, III”, Изв. АН СССР. Сер. матем., **32**, 212 – 244, 251 – 524, 709 – 731 (1968).

[3] E. A. Cherepanov, “Normal automorphisms of free Burnside groups of large odd exponents”, Internat, J. Algebra Comput., **16**, no. 5, 839 – 847 (2006).

[4] В. С. Атабекян, “Не φ-допустимые нормальные подгруппы свободных бернсайдовых групп”, Изв. НАН Армении, серия Математика, **45**, no. 2, 21 – 36 (2010).

[5] В. С. Атабекян, “Нормальные автоморфизмы свободных бернсайдовых групп”, Известия Российской академии наук. Сер. Математическая ,**75**, no. 2, 3 – 18 (2011).

[6] E. A. Cherepanov, “Free semigroup in the group of automorphisms of the free Burnside group”, Communications in Algebra, **33:2**, 539 – 547 (2005).

[7] A. S. Pahlevanyan, “Infinite order automorphisms of free periodic groups of sufficiently large exponent”, Proceedings of the Yerevan State University, Phys. and Math. Sciences, **219**, no. 2, 38 – 42 (2009).

[8] А. С. Пайлеванян, “О группе автоморфизмов свободных периодических групп”, Юбилейная Научная Сессия посвященная 90-летию ЕГУ , **1**, 210 – 214 (2009).

[9] А. С. Пайлеванян, "Свободная полугруппа группы автоморфизмов свободной бернсайдовой группы", Международная конференция "Мальцевские Чтения", посвященная 100-летию со дня рождения Анатолия Ивановича Мальцева, тезисы докладов, стр. 72 (2009).
[10] Rémi Coulon, "Outer automorphisms of free Burnside groups", arXiv :1008.4495, 1 – 19 (2010).
[11] Rémi Coulon, "Automorphismes exterieurs du groupe de Burnside libre", PhD thesis, Universite de Strasbourg (2010).
[12] Derek J. S. Robinson, A course in the theory of groups. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, **80**, Springer-Verlag, New York (1996).
[13] A. Yu. Ol'shanskii, "Self-normalization of free subgroups in the free Burnside groups", Groups, rings, Lie and Hopf algebras (St. John's, NF, 2001), Math. Appl., **555**, 179 – 187, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (2003).
[14] В. С. Атабекян, "Нормализаторы свободных подгрупп свободных бернсайдовых групп нечётного периода $n \geq 1003$", Фундамент. и прикл. матем., **15**, no. 1, 3 – 21 (2009).
[15] V. S. Atabekyan, "Normal subgroups in free Burnside groups of odd period", Armen. J. Math., **1**, **2**, 25 – 29 (2008).

Поступила 6 сентября 2010