Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 2, 2011, стр. 71-86.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕКОМПАКТНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Х. А. ХАЧАТРЯН

Институт Математики НАН Армении
E-mail: *Khach82@rambler.ru*

Аннотация. Статья посвящена вопросам разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений на полуоси в критическом случае с некомпактным оператором почти Гаммерштейновского типа . При наличии некоторых условий, накладываемых на ядро уравнения, доказывается существование ограниченного, монотонно возрастающего и положительного решения. Изучается асимптотическое поведение решения в бесконечности.

MSC2000 number: 45G10, 45M20, 47H10

Ключевые слова: Однопараметрическое семейство решений, поточечный предел, оператор Винера-Хопфа, условие критичности, условие Каратеодори.

1. Введение

Рассмотрим следующее нелинейное интегральное уравнение:

$$f(x) = R(x, f(x)) \int\limits_0^\infty K(x-t) W(t, f(t)) dt, \quad x \geq 0 \tag{1.1}$$

относительно искомой функции $f(x)$. Здесь $R(x,\tau)$ и $W(t,\tau)$ определенные на $(0,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$, измеримые и вещественнозначные функции, удовлетворяющие определенным условиям (см. формулировку основного результата в §6). Ядро $K(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$0 \leq K \in L_1(-\infty,+\infty) \cap M(-\infty,+\infty), \tag{1.2}$$

$$K(x) > 0 \quad \text{при} \quad x < 0, \tag{1.3}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(\tau) d\tau = 1, \quad \nu(K) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tau K(\tau) d\tau < 0, \tag{1.4}$$

причем предполагается, что последний интеграл абсолютно сходится.

В случае, когда $R(x,t) \equiv 1$, уравнение (1.1) превращается в нелинейное интегральное уравнение типа Гаммерштейна. Исследованию нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна при различных ограничениях на ядро и на нелинейность посвящены многочисленные работы (см. [1 – 5]). В результате созданы изящные теории разрешимости и разработаны эффективные методы численного решения вышеуказанных классов уравнений. Однако, в классической теории, как правило, рассматриваются уравнения с компактными нелинейными операторами, причем в некоторых случаях существенную роль играет также конечность пределов интегрирования.

В работах автора [6 – 11] были рассмотрены разные нелинейные интегральные уравнения на полуоси в критическом случае с некомпактным оператором и доказаны теоремы о существовании положительного решения. Отличительной особенностью этих работ является некомпактность и критичность соответствующего нелинейного интегрального оператора.

Условие критичности для нелинейных операторов понимается в следующем смысле: Пусть X – банахово пространство, $\mathfrak{K}$ – правильный конус с положительными элементами, $\mathfrak{K} \subset X$. Пусть A – некоторый нелинейный оператор действующий в $\mathfrak{K}$. Рассмотрим уравнение

$$Ax = x, \;\; x \in \mathfrak{K},$$

причем $A\theta = \theta$, где $\theta \in \mathfrak{K}$ – нулевой элемент.

Определение 1.1. *Оператор A назовем* ***слабо критическим****, если уравнение $Ax = x$ кроме тривиального решения обладает хотя бы одним положительным решением.*

Определение 1.2. *Оператор A назовем* ***сильно критическим****, если уравнение $Ax = x$ кроме тривиального решения обладает однопараметрическим семейством положительных решений.*

В работе [6] рассматривается нелинейное интегральное уравнение со специальной нелинейностью

$$W(t,z) = w(z) = ae^{-(z-a)^2}, \;\; (R \equiv 1),$$

имеющее применение в физической кинетике. В работе [7] изучается уравнение типа Урысона

$$f(x) = \int_0^\infty K(x,t,f(t))dt = Af \tag{1.5}$$

с предположением, что существует число $\eta > 0$, такое что $A\eta \le \eta$. Далее предполагая, что консервативное ядро Винера-Хопфа является локальной минорантой для оператора Урысона, т.е.

$$K(x,t,\tau) \geq K_0(x-t)\tau, \quad (x,t,\tau) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [0,\eta],$$

доказывается существование ограниченного решения уравнения (1.5).
Работа [8] посвящена исследованию интегрального уравнения типа Гаммерштейна. В отличие от настоящей работы в ней функция $W(t,z)$, описывающая нелинейность, зависит лишь от одной переменной z, на ядро $K(x,t)$ накладываются совершенно другие условия и $R \equiv 1$. В работах [9, 10] исследуются нелинейные интегральные уравнения типа Урысона (1.5). В [9] предполагается, что ядро $K_0(x)$ представляет собой вполне монотонную и четную функцию с особой структурой, а ядро Урысона удовлетворяет следующим условиям:

$$K(x,t,\tau) \geq K_0(x-t)(\tau - w(\tau+t)) \tag{1.6}$$

$$\frac{1}{\delta(1+\theta x)} \int\limits_0^\infty K(x,t,\delta(1+\theta t))dt \leq 1, \;\; x \in \mathbb{R}^+, \;\; \theta, \delta > 0, \;\; \theta, \delta = const.$$

В [10] вместо условия (1.6) накладывается более слабое условие на ядро K, а именно

$$K(x,t,\tau) \geq (K_0(x-t) - K^*(x+pt))(\tau - w(\tau+t)), \;\; p \geq 1.$$

Наконец работа [11] посвящена изучению интегрального уравнение типа Гаммерштейна со специальным ядром. Эта задача возникает в кинетической теории газов. Следует отметить, что в этой работе функция $K(x,t)$ такова, что невозможно ее оценить снизу консервативным ядром оператора Винера-Хопфа. Насколько нам известно уравнение вида (1.1) ранее другими авторами не исследовалось.
В §5 в предположении $W(\tau,z) = \tau - w(\tau,z)$, $R(x,\tau) \equiv \mu(x)$, доказывается существование однопараметрического семейства положительных решений нелинейного уравнения (1.1) (устанавливается критичность в сильном смысле в случае $W(\tau,0) \equiv 0$).
В §6 накладывая некоторые условия на функцию R, для случая так называемой "сильной нелинейности", т.е. когда $W(\tau,z) = G(z) - w(\tau,z)$, доказывается существование положительного решения для нелинейного уравнения (1.1) (устанавливается критичность в слабом смысле в случае когда $W(\tau,0) \equiv 0$). Удается также вычислить предел этого решения в бесконечности.

В параграфе 7 рассматривается следующее более общее нелинейное интегральное уравнение

$$(1.7)\quad \varphi(x)=R(x,\varphi(x))\int\limits_0^\infty K(x-t)W(t,\varphi(t))dt+\int\limits_0^\infty \overset{\circ}{K}(x+t)G_0(\varphi(t))dt,\quad x\geq 0$$

относительно искомой функции $\varphi(x)$. Здесь $\overset{\circ}{K}$ – неотрицательная и суммируемая на $(0,+\infty)$ функция, причем

$$(1.8)\qquad \int\limits_x^\infty \overset{\circ}{K}(\tau)d\tau\leq\int\limits_x^\infty K(\tau)d\tau,\quad x\in(0,+\infty)$$

G_0 – измеримая и вещественнозначная функция, удовлетворяющая определенным условиям (см. §7). Используя полученные результаты для уравнения (1.1), доказывается разрешимость уравнения (1.7) в классе ограниченных функций.

2. Об одном вспомогательном интегральном уравнении типа свертки

Наряду с уравнением (1.1) рассмотрим следующее линейное интегральное уравнение:

$$(2.1)\qquad \chi(x)=\mu(x)\int\limits_0^\infty K(x-t)\chi(t)dt,\quad x\in[0,+\infty)$$

относительно искомой функции $\chi(x)$. Здесь $\mu(x)$ монотонно возрастающая на $[0,+\infty)$ функция, причем

$$(2.2)\qquad \begin{array}{lll}\beta_1) & 0<\varepsilon\leq\mu(x)\leq 1, & x\geq 0,\\ \beta_2) & (1-\mu(x))x^j\in L_1(0,+\infty), & j=0,1.\end{array}$$

Как известно, уравнение (2.1) при условиях (1.2), (1.4), (2.2) имеет ненулевое, неотрицательное и ограниченное решение $\chi_0(x)$ (см. [12]).

Ниже докажем, что это уравнение при условиях (2.2), (1.2) - (1.4) обладает положительным, монотонно возрастающим и ограниченным решением $\chi^*(x)$, причем $\chi^*(x)\geq\chi_0(x)$.

С этой целью рассмотрим следующие итерации:

$$(2.3)\qquad \chi^{(n+1)}(x)=\mu(x)\int\limits_0^\infty K(x-t)\chi^{(n)}(t)dt,\quad \chi^{(0)}(x)\equiv C=\operatorname*{ess\,sup}_{x\geq 0}\chi_0(x),$$

$n=0,1,2,\ldots$, $x\in[0,+\infty)$, где χ_0 ограниченное, неотрицательное и ненулевое решение уравнения (2.1). По индукции нетрудно убедиться, что

$$(2.4)\qquad a)\quad \chi^{(n)}(x)\ \text{убывает по } n,\quad b)\quad \chi^{(n)}(x)\geq\chi_0(x),\quad n=0,1,2,\ldots.$$

Действительно имеем

$$a)\quad \chi^{(1)}(x) = C\mu(x)\int_0^\infty K(x-t)dt \le C\int_{-\infty}^x K(z)dz \le C = \chi^{(0)}(x).$$

Предполагая, что $\chi^{(n)}(x) \le \chi^{(n-1)}(x)$, из (2.3) сразу получим $\chi^{(n+1)}(x) \le \chi^{(n)}(x)$.
$b)$ Неравенство (2.4) следует из (2.3) в случае $n = 0-$. Пусть $\chi^{(n)}(x) \ge \chi_0(x)$ для некоторого $n \in \mathbf{N}$, тогда из (2.3) получим

$$\chi^{(n+1)}(x) \ge \mu(x)\int_0^\infty K(x-t)\chi_0(t)dt = \chi_0(x).$$

Следовательно, последовательность функций $\{\chi^{(n)}(x)\}_0^\infty$ имеет поточечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\chi^{(n)}(x) = \chi^*(x) \le C$. Записывая итерации (2.3) в следующем виде

$$\chi^{(n+1)}(x) = \mu(x)\int_{-\infty}^x K(\tau)\chi^{(n)}(x-\tau)d\tau, \quad \chi^{(0)} \equiv C, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$x \in (0, +\infty)$ и используя монотонность функции $\mu(x)$ по индукции легко можно убедиться, что $\chi^{(n)}(x)$ возрастает по x, $n = 0, 1, 2, \dots$. Следовательно, предельная функция $\chi^*(x)$ также возрастает по x. Таким образом, из (2.3) с учетом сказанного можем утверждать, что

$$\chi^*(x) \uparrow C \text{ когда } x \to \infty. \tag{2.5}$$

Из теоремы Б. Леви (см. [14]) следует, что χ^* удовлетворяет уравнению (2.1). Далее заметим, что

$$\alpha \equiv \operatorname*{ess\,inf}_{x\ge 0}\chi^*(x) > 0. \tag{2.6}$$

Действительно, так как $\chi^*(x) \ge 0$ и $\chi^*(x) \not\equiv 0$, то существует хотя бы одна точка $x_0 \in [0, +\infty)$, такая что $\chi^*(x_0) > 0$. Тогда из (2.1) с учетом (1.3) и условия $\beta_1)$ формулы (2.2) будем иметь

$$\chi^*(x) \ge \varepsilon\int_{x_0}^\infty K(x-t)\chi^*(t)dt \ge \varepsilon\chi^*(x_0)\int_{-\infty}^{x-x_0} K(\tau)d\tau \ge \varepsilon\chi^*(x_0)\int_{-\infty}^{-x_0} K(\tau)d\tau > 0,$$

откуда следует, что (2.6) верно.
Известно также, что решение $\chi_0(x)$ представляется в виде разности следующих двух функций (см. [12]):

$$0 \le \chi_0(x) = S(x) - \psi(x), \quad x \ge 0,$$

где $S(x)$ - ограниченное, монотонно возрастающее и положительное решение однородного уравнения Винера-Хопфа:

$$S(x)=\int_0^\infty K(x-t)S(t)dt, \quad x\geq 0,$$

а $\psi(x)\in L_1(0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to\infty}\psi(x)=0$ представляет собой решение следующего уже неоднородного интегрального уравнения типа свертки:

$$\psi(x)=(1-\mu(x))S(x)+\mu(x)\int_0^\infty K(x-t)\psi(t)dt, \quad x\geq 0.$$

Из вышеуказанных фактов следует, что

$$\lim_{x\to\infty}\chi^*(x)=\lim_{x\to\infty}S(x)=C. \tag{2.7}$$

Полученное соотношение мы используем ниже. Заметим, что в отличие от функции $\chi_0(x)$ функция $\chi^*(x)$ обладает дополнительными свойствами (2.5) и (2.6). В дальнейших рассуждениях настоящей работы положительность числа α играет существенную роль.

3. Некоторые априорные оценки для решения одного линейного неоднородного уравнения

Пусть $\overset{\circ}{w}(x)$ определенная на $(-\infty,+\infty)$ измеримая функция, причем существует число $A>0$ такое, что

$$0\leq \overset{\circ}{w}(x) \text{ убывает по } x \text{ на } \quad [A,+\infty), \tag{3.1}$$

$$\overset{\circ}{w}\in L_1(0,+\infty)\cap C_0(0,+\infty), \quad m_1\equiv\int_0^\infty x\,\overset{\circ}{w}(x)dx<+\infty. \tag{3.2}$$

Рассмотрим следующее линейное неоднородное интегральное уравнение:

$$Q(x)=2\,\overset{\circ}{w}(x+A)+\mu(x)\int_0^\infty K(x-t)Q(t)dt, \quad x\geq 0. \tag{3.3}$$

Используя результаты работ [12, 13], ниже покажем, что уравнение (3.3) имеет положительное, ограниченное и суммируемое решение, причем

$$\lim_{x\to\infty}Q(x)=0. \tag{3.4}$$

Наряду с уравнением (3.3) рассмотрим следующее вспомогательное уравнение

$$Q^*(x)=2\,\overset{\circ}{w}(x+A)+\int_0^\infty K(x-t)Q^*(t)dt, \quad x\geq 0 \tag{3.5}$$

относительно $Q^*(x)$.

Пусть E – одно из следующих банаховых пространств: $L_p(0,+\infty)$, $M(0,+\infty)$, $C_0(0,+\infty)$, $C_M(0,+\infty) \equiv C(0,+\infty) \cap M(0,+\infty)$. Рассмотрим интегральный оператор Винера-Хопфа

$$(\mathcal{K}f)(x) = \int_0^\infty K(x-t)f(t)dt, \quad f \in E$$

с ядром $K(x)$ удовлетворяющий условиям (1.2), (1.4).

Как известно, (см. [13]) оператор $I-\mathcal{K}$ допускает следующую вольтерровую факторизацию:

$$I - \mathcal{K} = (I - V_-)(I - V_+) \tag{3.6}$$

как равенство операторов действующих в E, где $V_\mp$ – верхние и нижние вольтерровые операторы вида:

$$(V_-f)(x) = \int_x^\infty v_-(t-x)f(t)dt, \quad (V_+f)(x) = \int_0^x v_+(x-t)f(t)dt, \quad f \in E,$$

$$v_\pm(x) \geq 0,\ v_\pm \in L_1(0,+\infty),\ \gamma_\pm = \int_0^\infty v_\pm(x)dx,\ \gamma_+ < 1,\ \gamma_- = 1,$$

причем $v_\pm(x)$ представляют собой поточечный предел следующего итерационного процесса:

$$v_{n+1}^\pm(x) = K(\pm x) + \int_0^\infty v_n^\pm(t)v_n^\pm(x+t)dt, \quad v_0^\pm = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots, \tag{3.7}$$

(точнее $v_n^\pm \uparrow v_\pm$ при $n \to \infty$). Учитывая тот факт, что $\gamma_+ < 1$ и $\operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} K(x) \equiv L < +\infty$, из (3.7) индукцией по n можно доказать, что $v_n^\pm \leq L(1-\gamma_+)^{-1}$, $n = 0,1,2,\ldots$. Отсюда следует, что $v_\pm(x) \leq L(1-\gamma_+)^{-1} < +\infty$. С использованием факторизации (3.6) решение уравнения (3.5) сводиться к решению следующих двух уравнений Вольтерра:

$$Q_1^*(x) = 2\,\overset{\circ}{w}(x+A) + \int_x^\infty v_-(t-x)Q_1^*(t)dt, \quad x \geq 0, \tag{3.8}$$

$$Q^*(x) = Q_1^*(x) + \int_0^x v_+(x-t)Q^*(t)dt, \quad x \geq 0 \tag{3.9}$$

Из результатов работ [12, 13] следует, что уравнение (3.8) при условий (3.1), (3.2) имеет положительное решение из пространства $L_1(0,+\infty)$. Из ограниченности функций v_- и $\overset{\circ}{w}$ следует ограниченность функции $Q_1^*(x)$. Заметим, что $\lim\limits_{x\to\infty} Q_1^*(x) = 0$, так как

$$0 \leq Q_1^*(x) \leq 2\overset{\circ}{w}(x+A) + \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^+} v_-(x) \int\limits_x^\infty Q_1^*(x)dt \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Поскольку $\gamma_+ < 1$, то оператор V_+ будет сжимающим в каждом из пространств E. Следовательно, из свойств функций $Q_1^*(x)$ следует, что уравнение (3.9) имеет положительное решение $Q^*(x) \geq 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} Q^*(x) = 0$, $Q^* \in L_1(0,+\infty) \cap M(0,+\infty)$. Рассматривая следующие простые итерации

$$Q^{(n+1)}(x) = 2\overset{\circ}{w}(x+A) + \mu(x) \int\limits_0^\infty K(x-t)Q^{(n)}(t)dt, \quad Q^{(0)}(x) \equiv 0, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

которые монотонно возрастают по n и удовлетворяют неравенствам $Q^{(n)}(x) \leq Q^*(x)$, $(n = 0,1,2,\ldots)$ заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} Q^{(n)}(x) = Q(x) \leq Q^*(x)$. Таким образом $\lim\limits_{x\to\infty} Q(x) = 0$, $Q \in L_1(0,+\infty) \cap M(0,+\infty)$.

Обозначим через $\kappa = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\geq 0} Q(x)$. Пусть γ_0 – некоторое фиксированное число из $[A,+\infty)$, для которого $\overset{\circ}{w}(\gamma_0) < \gamma_0$. Существование такого числа сразу следует из (3.1),(3.2).

Заметим, что если γ - любое число из множества

$$\triangle \equiv [\frac{\max(\kappa,\gamma_0)}{\alpha}, +\infty) \tag{3.10}$$

то следующее решение уравнения (2.1)

$$\tilde{\chi}_\gamma(x) = \gamma\chi^*(x) \tag{3.11}$$

будет удовлетворять неравенству: $\tilde{\chi}_\gamma(x) \geq Q(x)$. Действительно, имеем

$$\tilde{\chi}_\gamma(x) \geq \gamma\alpha \geq \max(\kappa,\gamma_0) \geq \kappa \geq Q(x).$$

Из (2.7),(3.11) очевидным образом следует также, что

$$\tilde{\chi}_\gamma(x) \uparrow \gamma C, \quad x \to \infty. \tag{3.12}$$

Наряду с уравнением (3.3) рассмотрим уравнение

$$\rho(x) = 2\overset{\circ}{w}(x + \tilde{\chi}_\gamma(x)) + \lambda(x)\mu(x) \int\limits_0^\infty K(x-t)\rho(t)dt, \quad x \geq 0, \tag{3.13}$$

где

$$\lambda(x) = 1 - \frac{\overset{\circ}{w}(x + \tilde{\chi}_\gamma(x))}{\tilde{\chi}_\gamma(x)}, \quad x \geq 0.$$

Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$\rho^{(n+1)}(x) = 2\,\overset{\circ}{w}(x + \tilde{\chi}_\gamma(x)) + \lambda(x)\mu(x)\int\limits_0^\infty K(x-t)\rho^{(n)}(t)dt, \quad \rho^{(0)}(x) \equiv 0,$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$, $x \geq 0$. Имеем следующую цепочку неравенств:

$$\overset{\circ}{w}(x + \tilde{\chi}_\gamma(x)) \leq \overset{\circ}{w}(x + \gamma\alpha) \leq \overset{\circ}{w}(\gamma\alpha) \leq \overset{\circ}{w}(\gamma_0) < \gamma_0 \leq \alpha\gamma \leq \tilde{\chi}_\gamma(x), \tag{3.14}$$

$$\overset{\circ}{w}(x + \tilde{\chi}_\gamma(x)) \leq \overset{\circ}{w}(x + \gamma_0) \leq \overset{\circ}{w}(x + A). \tag{3.15}$$

Из (3.14),(3.15) следует, что

$$0 < 1 - \frac{\overset{\circ}{w}(\gamma_0)}{\gamma_0} \leq \lambda(x) \leq 1,$$

$$(1 - \lambda(x))x^j = \frac{\overset{\circ}{w}(x + \tilde{\chi}_\gamma(x))}{\tilde{\chi}_\gamma(x)}x^j \leq \frac{1}{\gamma_0}\,\overset{\circ}{w}(x + A)x^j \in L_1(0, +\infty), \quad j = 0, 1.$$

По индукции легко можно убедиться в достоверности следующих утверждений:

$$\begin{array}{c} a) \quad \rho^{(n)} \text{ возрастает по } n, \qquad b) \quad \rho^{(n)}(x) \leq Q(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \\ c) \quad \rho^{(n)}(x) \geq 2\,\overset{\circ}{w}(x + \tilde{\chi}_\gamma(x)), \quad n = 1, 2, \ldots \end{array} \tag{3.16}$$

Следовательно, существует

$$\lim_{n\to\infty} \rho^{(n)}(x) \equiv \rho(x) \leq Q(x). \tag{3.17}$$

Из теоремы Б. Леви следует, что предельная функция $\rho(x)$ удовлетворяет уравнению (3.13), а из (3.16), (3.17) получаем следующую двойную оценку:

$$2\,\overset{\circ}{w}(x + \tilde{\chi}_\gamma(x)) \leq \rho(x) \leq Q(x). \tag{3.18}$$

4. Одно обобщение уравнения (2.1)

Рассмотрим уравнение:

$$E(x) = \mu(x)\lambda(x)\int\limits_0^\infty K(x-t)E(t)dt, \quad x \geq 0 \tag{4.1}$$

относительно искомой функции $E(x)$.

Прямой проверкой убедимся, что функция $\tilde{E}(x) = 2\tilde{\chi}_\gamma(x) - \rho(x)$ удовлетворяет уравнению (4.1). Имеем

$$\mu(x)\lambda(x)\int\limits_0^\infty K(x-t)\tilde{E}(t)dt = \left(1 - \frac{\overset{\circ}{w}(x + \tilde{\chi}_\gamma(x))}{\tilde{\chi}_\gamma(x)}\right)\mu(x)\int\limits_0^\infty K(x-t)(2\tilde{\chi}_\gamma(t) - \rho(t))dt =$$

$$= 2\tilde{\chi}_\gamma(x) - 2\overset{\circ}{w}(x + \tilde{\chi}_\gamma(x)) - \lambda(x)\mu(x)\int\limits_0^\infty K(x-t)\rho(t)dt = 2\tilde{\chi}_\gamma(x) - \rho(x) = \tilde{E}(x).$$

Поскольку $\rho(x) \leq Q(x) \leq \tilde{\chi}_\gamma(x)$, то $\tilde{E}(x) \geq \tilde{\chi}_\gamma(x)$. Рассмотрим следующие итерации:

$$(4.2)\quad E^{(n+1)}(x) = \mu(x)\lambda(x)\int\limits_0^\infty K(x-t)E^{(n)}(t)dt, \quad E^{(0)}(x) = 2\tilde{\chi}_\gamma(x), \quad n = 0, 1, \ldots$$

По индукции нетрудно убедиться, что $E^{(n)}(x)$ убывает по n, $E^{(n)}(x) \geq \tilde{E}(x)$, $n = 0, 1, \ldots$. Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} E^{(n)}(x) = E(x)$, причем

$$(4.3)\qquad E(x) \geq \tilde{E}(x) \geq \tilde{\chi}_\gamma(x).$$

Из (4.2) следует, что

$$(4.4)\qquad E(x) \leq 2\lambda(x)\tilde{\chi}_\gamma(x).$$

Рассмотрим уравнение:

$$(4.5)\qquad F(x) = \mu(x)\int\limits_0^\infty K(x-t)\lambda(t)F(t)dt.$$

Если $E(x)$ удовлетворяет уравнению (4.1), то функция

$$(4.6)\qquad F(x) = \frac{E(x)}{\lambda(x)}.$$

будет удовлетворять уравнению (4.5). Из (4.3), (4.4) с учетом (4.6) будем иметь

$$(4.7)\qquad \tilde{\chi}_\gamma(x) \leq E(x) \leq F(x) \leq 2\tilde{\chi}_\gamma(x)$$

В дальнейшем цепочка неравенств (4.7) нам понадобится.

5. Однопараметрическое семейство решений для одного класса интегральных уравнений типа Гаммерштейна

Теперь рассмотрим уравнение:

$$(5.1)\qquad H(x) = \mu(x)\int\limits_0^\infty K(x-t)(H(t) - w(t, H(t)))dt, \quad x \geq 0,$$

где $w(t,z) : (0, +\infty) \times (-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ удовлетворяет условиям:

(i) $0 \leq w(t,z)$ убывает по z и $(0, +\infty) \times [A, +\infty) = \Omega_A$

(ii) $w(t,z)$ удовлетворяет условию Каратеодори на Ω_A, т.е. при каждом фиксированном $z \in [A, +\infty)$ функция $w(t,z)$ измерима по $t > 0$ и почти при всех $t > 0$, $w(t,z)$ непрерывна по z на $[A, +\infty)$, (об этом подробнее см. в [15], стр. 62 - 64).

(iii) $w(t,z) \leq \overset{\circ}{w}(t+z), \quad (t,z) \in \Omega_A$.

Введем следующие итерации:

$$H^{(n+1)}(x) = \mu(x)\int_0^\infty K(x-t)(H^{(n)}(t) - w(t, H^{(n)}(t)))dt,\ H^{(0)}(x) = 2\tilde{\chi}_\gamma(x), \tag{5.2}$$

$n = 0, 1, \ldots, x \geq 0$. Заметим, что $H^{(n)}(x) \geq F(x)$, $n = 0, 1, \ldots$, $H^{(n)}(x)$ убывает по n.

Действительно, сначала докажем,что $H^{(n)}(x) \geq F(x)$. В случае $n = 0$ неравенство сразу следует из (4.7). Предположим, что $H^{(n)}(x) \geq F(x)$ при некотором $n \in \mathbf{N}$. Тогда поскольку $F(x) \geq \tilde{\chi}_\gamma(x) \geq \gamma\alpha \geq \ \gamma_0 \geq A$, то из (5.2) будем иметь

$$H^{(n+1)}(x) \geq \mu(x)\int_0^\infty K(x-t)(F(t) - w(t, F(t)))dt \geq$$

$$\geq \mu(x)\int_0^\infty K(x-t)F(t)dt - \mu(x)\int_0^\infty K(x-t)\,\overset{\circ}{w}(t+F(t))dt \geq$$

$$\geq \mu(x)\int_0^\infty K(x-t)F(t)dt - \mu(x)\int_0^\infty K(x-t)\,\overset{\circ}{w}(t+\tilde{\chi}_\gamma(t))dt =$$

$$= \mu(x)\int_0^\infty K(x-t)F(t)dt - \mu(x)\int_0^\infty K(x-t)(1-\lambda(t))\tilde{\chi}_\gamma(t)dt \geq$$

$$\geq \mu(x)\int_0^\infty K(x-t)\lambda(t)F(t)dt = F(x).$$

Теперь докажем, что $H^{(n)}(x)$ убывает по n. Имеем

$$H^{(1)}(x) \leq \mu(x)\int_0^\infty K(x-t)H^{(0)}(t)dt = H^{(0)}(x),$$

так как $w(t, H^{(0)}(t)) \geq 0$ (ведъ $H^{(0)}(x) \geq 2\gamma_0 \geq A$) и $\tilde{\chi}_\gamma(x)$ удовлетворяет уравнению (2.1). Предположим, что $H^{(n)}(x) \leq H^{(n-1)}(x)$, тогда учитывая, что $H^{(n)}(x) \geq F(x) \geq A$ из (5.2) получим $H^{(n+1)}(x) \leq H^{(n)}(x)$. Таким образом, можем утверждать, что последовательность функции $\{H^{(n)}(x)\}_0^\infty$ имеет поточечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} H^{(n)}(x) = H(x)$, причем

$$F(x) \leq H(x) \leq 2\tilde{\chi}_\gamma(x). \tag{5.3}$$

Из теоремы Б. Леви следует, что предельная функция удовлетворяет уравнению (5.1). Теперь убедимся, что существует

$$\lim_{x\to\infty} H(x) = 2\gamma C. \tag{5.4}$$

Действительно сначала из (3.4) и (3.18) следует, что $\lim\limits_{x\to\infty} \rho(x) = 0$. Следовательно, существует

$$\lim_{x\to\infty} \tilde{E}(x) = 2 \lim_{x\to\infty} \tilde{\chi}_\gamma(x) = 2\gamma C. \tag{5.5}$$

Комбинируя неравенства (4.3), (4.7) и предельное соотношение (5.5), приходим к равенству

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = 2\gamma C. \tag{5.6}$$

Следовательно, используя (5.3), (5.6), (3.12) приходим к (5.4).

Таким образом справедлива

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия* (1.2) - (1.4), (2.2) *и (i) — (iii). Тогда уравнение* (5.1) *обладает однопараметрическим семейством ограниченных и положительных решений* $\{H_\gamma(x)\}_{\gamma\in\triangle}$, *где множество* $\triangle$ *параметров* γ *задается согласно* (3.10). *Для каждой функции из этого семейства справедливо предельное соотношение* (5.4).

Замечание 5.1. *Если дополнительно потребовать, чтобы* $w(t,z) \downarrow$ *по* t, *то можно доказать,что полученные решения* $H_\gamma(x)$ *монотонно возрастают по* x.

Действительно, записывая итерации (5.2) в следующем виде

$$H^{(n+1)}(x) = \mu(x) \int_{-\infty}^{x} K(\tau)(H^{(n)}(x-\tau) - w(x-\tau, H^{(n)}(x-\tau))d\tau, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

$$H^{(0)}(x) = 2\tilde{\chi}_\gamma(x)$$

по индукции нетрудно убедиться, что $H^{(n)}(x)$ возрастает по x. Следовательно, $H(x)$ возрастает по x.

Замечание 5.2. *Из Теоремы 5.1 с учетом определения 1.2 следует, что нелинейный оператор* B, *задаваемый по формуле*

$$(Bf)(x) = \mu(x) \int_0^\infty K(x-t)(f(t) - w(t, f(t)))dt, \quad f \in L_\infty(\mathbb{R}^+),$$

является сильно критическим, если $w(t, 0) \equiv 0$.

6. Разрешимость уравнения (1.1)

Предположим, что $W(t,z)$ имеет следующую структуру:

$$W(t,z)=G(z)-w(t,z);$$

где $w(t,z)$ удовлетворяет условиям (i) – (iii), а $G(z)$ – непрерывная на отрезке $[0,\eta]$, $\eta\in[\frac{2C\max(\kappa,\ \gamma_0)}{\alpha},+\infty)$ функция, причем

$$G\uparrow[0,\eta],\quad G(\eta)=\eta, \tag{6.1}$$

$$G(x)\geq x,\quad x\in[0,\eta]. \tag{6.2}$$

Предположим также, что $R(x,\tau)$ измеримая функция и удовлетворяет следующим условиям:

$j_1)$ $\mu(x)\leq R(x,\tau)\leq\left(\int\limits_{-\infty}^{x}K(z)dz\right)^{-1}$, $\quad(x,\tau)\in(0,+\infty)\times[0,\eta]\equiv B_\eta$,

$j_2)$ $R(x,\tau)-$ удовлетворяет условию Каратеодори на множестве B_η,

$j_3)$ $R(x,\tau)$ возрастает по τ на отрезке $[0,\eta]$ при каждом фиксированном $x\geq0$.

Теорема 6.1. *Пусть имеют место все условия теоремы 5.1. Тогда, если функции G и R удовлетворяют условиям* (6.1), (6.2), $(j_1)--(j_3)$, *то уравнение* (1.1) *обладает положительным и ограниченным решением $f(x)\leq\eta$. Более того*

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\eta.$$

Доказательство. Рассмотрим следующие итерации

$$f^{(n+1)}(x)=R(x,f^{(n)}(x))\int\limits_0^\infty K(x-t)W(t,f^{(n)}(t))dt,\quad f^{(0)}(x)\equiv\eta, \tag{6.3}$$

$n=0,1,\ldots,$ $x\geq0$. Поскольку уравнение (5.1) (по теореме 5.1) обладает однопараметрическим семейством положительных и ограниченных решений $\{H_\gamma(x)\}_{\gamma\in\triangle}$, то если взять

$$\gamma=\frac{\eta}{2C}\in\triangle\equiv\left[\frac{\max(\kappa,\ \gamma_0)}{\alpha},+\infty\right),$$

мы можем из этого семейства выбрать решение $H^*(x)$, которое стремится в бесконечности к числу η (см. формулу (5.4)), причем $H^*(x)\leq\eta$. Последнее неравенство следует из (5.3) и (3.12) в случае $\gamma=\frac{\eta}{2C}$.

Сначала докажем по индукции , что

$$\eta\geq f^{(n)}(x)\geq H^*(x),\quad n=0,1,\ldots. \tag{6.4}$$

В случае $n = 0$ это очевидно. Пусть неравенства (6.4) справедливы при некотором $n \in \mathbf{N}$. Тогда из (6.3) с учетом (6.1), (6.2) и (j_1), будем иметь

$$f^{(n+1)}(x) \leq R(x,\eta)\int\limits_0^\infty K(x-t)(G(\eta)-w(t,\eta))dt \leq \eta R(x,\eta)\int\limits_{-\infty}^x K(z)dz \leq \eta,$$

$$\eta \geq H^*(x) \geq \frac{\eta}{2C}\alpha \geq \max(\kappa,\gamma_0) \geq A.$$

С другой стороны, используя последнее неравенство, получим

$$f^{(n+1)}(x) \geq R(x,H^*(x))\int\limits_0^\infty K(x-t)(G(H^*(t))-w(t,H^*(t)))dt \geq$$

$$\geq \mu(x)\int\limits_0^\infty K(x-t)(H^*(t)-w(t,H^*(t)))dt = H^*(x).$$

Теперь убедимся, что последовательность $\{f^{(n)}(x)\}_0^\infty$ монотонно убывает по n. Неравенство $f^{(1)}(x) \leq f^{(0)}(x)$ сразу следует из (6.4). Предполагая, что $f^{(n)}(x) \leq f^{(n-1)}(x)$ и используя (6.4), из (6.3) получим $f^{(n+1)}(x) \leq f^{(n)}(x)$.

Таким образом, существует точечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(x) = f(x)$ и

$$H^*(x) \leq f(x) \leq \eta. \tag{6.5}$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to\infty} H^*(x) = \eta$, то из (6.5) следует, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \eta$. Используя теорему Б. Леви заключаем, что $f(x)$ удовлетворяет уравнению (1.1). □

Примеры. *a*) Рассмотрим следующий класс функций:

$$R(x,\tau) = \frac{L(x)-\mu(x)}{2}U(\tau) + \frac{L(x)+\mu(x)}{2},$$

где

$$L(x) \equiv \left(\int\limits_{-\infty}^x K(\tau)d\tau\right)^{-1},$$

а $U(t)$ измеримая функция на $(-\infty,+\infty)$, причем $0 \leq U(t) \leq 1$, когда $t \in [0,\eta]$, $U \in C[0,\eta]$ и U возрастает на $[0,\eta]$.

Нетрудно убедиться, что $R(x,\tau)$ удовлетворяет всем условиям $(j_1)-(j_3)$. Действительно когда $(x,\tau) \in B_\eta$

$$R(x,\tau) \geq \frac{L(x)+\mu(x)}{2} \geq \mu(x), \quad \text{ибо} \quad L(x) \geq \mu(x)$$

$$R(x,\tau) \leq \frac{L(x)-\mu(x)}{2} + \frac{L(x)+\mu(x)}{2} = L(x), \quad R \quad \text{возрастает по } \tau \text{ на } [0,\eta]$$

и удовлетворяет условию Каратеодори.

$b)$ В качестве функции G можно взять:

$$G(x)=\sqrt{\eta x e^{\frac{x}{\eta}-1}},\quad G(x)=x+\frac{\eta}{\pi}\sin\frac{x\pi}{\eta},\quad G(x)=\eta\sqrt{\frac{x}{\eta}}.$$

$c)$ Пример функции $w(t,z)$:

$$w(t,z)=q(t,z)\,\overset{\circ}{w}(t+z),\quad 0\le q(t,z)\le 1,\quad q \text{ убывает по } z,$$

$$\overset{\circ}{w}(\tau)=\tau e^{-(\tau-a)^2},\quad a\ge 0,\quad q(t,z)=\frac{t^2+c}{t^2+\alpha}\,e^{-z}z,\quad 0<c\le\alpha.$$

7. Решение уравнения (1.7)

В настоящем параграфе мы займемся решением уравнения (1.7) с помощью доказанной теоремы 6.1.

Предполагаем, что функция G_0 удовлетворяет следующим условиям:

$$G_0\in C[0,\eta],\quad G_0\uparrow[0,\eta],\quad G_0(\eta)=\eta, \tag{7.1}$$

$$G_0(x)\ge 0,\quad x\in[0,\eta]. \tag{7.2}$$

Теорема 7.1. *Пусть выполнены все условия теоремы 6.1, а функции R и G удовлетворяют условиям (6.1), (6.2) и $(j_2),(j_3)$. Тогда, если $\mu(x)\le R(x,\tau)\le 1$, $(x,\tau)\in B_\eta$, то уравнение (1.7) обладает положительным и ограниченным решением $f(x)\le\eta$ с пределом η в бесконечности.*

Доказательство. Введем следующие итерации

$$\varphi^{(n+1)}(x)=R(x,\varphi^{(n)}(x))\int_0^\infty K(x-t)W(t,\varphi^{(n)}(t))dt+\int_0^\infty \overset{\circ}{K}(x+t)G_0(\varphi^{(n)}(t))dt,$$

$$n=0,1,\ldots,\quad \varphi^{(0)}(x)\equiv\eta,\quad x\ge 0.$$

Используя (7.1), (7.2), (1.8), а также (6.1), (6.2), (j_1), (i) – (iii), нетрудно убедиться по индукции, что $\eta\ge\varphi^{(n)}(x)\ge f(x)$, $n=0,1,\ldots$, $x\ge 0$ и $\varphi^{(n)}$ убывает по n. Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi^{(n)}(x)=\varphi(x)$, причем

$$f(x)\le\varphi(x)\le\eta. \tag{7.3}$$

Из (7.3) с учетом теоремы 6.1 следует, что $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=\eta$. Из теоремы Б. Леви следует, что $\varphi(x)$ является решением уравнения (1.7). □

Ниже приведем два примера функции G_0 :

$$G_0(x)=\eta\left(\frac{x}{\eta}\right)^\alpha,\quad \alpha>0,\quad G_0(x)=\eta\sin\frac{x\pi}{2\eta}.$$

Abstract. The paper is devoted to investigation of the solvability of a class of nonlinear integral equations on the semiaxis in a critical case, which possess a noncompact operator of almost Hammerstein type. Under some conditions on the equation kernel, the existence of a bounded, monotone increasing, positive solution is proved. The asymptotic behavior of the solution near infinity is studied.

Список литературы

[1] М. А. Красносельский, Положительные Решения Операторных Уравнений, Москва, Изд. физ.мат.лит., 394стр. (1962).

[2] П. П. Забрейко, "О непрерывности нелинейного оператора", Сибирский. мат. журнал, **5**, n. 4, 958 – 960 (1964).

[3] П. П. Забрейко, "О непрерывности и полной непрерывности операторов П. С. Урысона", Доклады АН СССР, **161**, no. 5, 1007 – 1010 (1965).

[4] П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, "О непрерывности и полной непрерывности нелинейных интегральных операторов в пространствах L_p", Успехи мат.наук, **19**, no. 2, 204 – 205 (1964).

[5] G. Emmanuele, "An existense theorem for Hammerstein integral equations", Portugal Mathem., **51**, no. 4, 607 - 611 (1994).

[6] Х. А. Хачатрян, А. Н. Афян, С. А. Григорян, "Об одном интегральном уравнени типа Гаммерштейна в консервативном случае", Матем. в высшей школе, **5**, no. 1, 44 – 49 (2009).

[7] Х. А. Хачатрян, "Достаточные условия разрешимости интегрального уравнения Урысона на полуоси", Докл. Российской Академии Наук, Математика, **425**, no. 2, 462 – 465 (2009).

[8] Х. А. Хачатрян, "Однопареметрическое семейство решений одного класса нелинейных уравенений типа Гаммерштейна на полуоси", Докл. Российской Академии Наук, Математика, **429**, no. 5, 595 – 599 (2009).

[9] Х. А. Хачатрян, "Существование и асимптотическое поведение решения для одного класса нелинейных интегральных уравнений Урысона на полуоси", Вестник РАУ, **3**, no. 1, 15 – 25 (2009).

[10] Kh. A. Khachatryan, "On solvability some classes of Urysohn nonlinear integral equations with noncompact operator", Ufimskii Mathematicheskii Zhurnal, **2**, no. 2, 102 – 117 (2010).

[11] А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян, "Об одном интегро-дифференциальном уравнении типа уравнения Гаммерштейна с некомпактным оператором", Мат. сборник, РАН, **201**, no. 4, 125 – 136 (2010).

[12] Л. Г. Арабаджян, "Об одном интегральном уравнении теории переноса в неоднородной среде", Дифф.урав., **23**, no. 9, 1618 – 1622 (1987).

[13] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги науки и техники. Мат. анализ., **22**, 175 – 244 (1984).

[14] А. Н. Колмогоров, В. С. Фомин, Элементы Теории Функций и Функционального Анализа, Москва (1981).

[15] А. Куфнер, С. Фучик, Нелинейные Дифференциальные Уравнения, Москва, Наука (1988).

Поступила 28 октября 2009