

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. Ж. ДУМАНЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *duman@ysu.am*

Аннотация. Получены условия разрешимости задачи Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка в ограниченной области $Q \subset R_n$, $n \geq 2$, с гладкой границей $\partial Q \in C^1$

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + (\bar{b}(x), \nabla u) - \operatorname{div}(\bar{c}(x)u) + d(x)u = f(x) - \operatorname{div}F(x), \quad x \in Q, \\ u|_{\partial Q} = u_0 \in L_2(\partial Q).$$

Доказано, в частности, что если однородная задача имеет только тривиальное решение, то при всех $u_0 \in L_2(\partial Q)$ и f, F из соответствующих функциональных пространств существует решение неоднородной задачи, оно принадлежит пространству Гущина $C_{n-1}(\bar{Q})$ и для него справедлива оценка

$$\|u\|_{C_{n-1}(\bar{Q})}^2 + \int_Q r |\nabla u|^2 dx \leq \\ \leq C (\|u_0\|_{L_2(\partial Q)}^2 + \int_Q r^3 (1 + |\ln r|)^{\frac{3}{2}} f^2 dx + \int_Q r (1 + |\ln r|)^{\frac{3}{2}} |F|^2 dx),$$

где $r(x)$ – расстояние точки $x \in Q$ до границы ∂Q , а постоянная C не зависит от u_0, f, F .

MSC2000 number: 35B60, 35D99, 35J25

Ключевые слова: эллиптические уравнения, задача Дирихле, разрешимость задачи Дирихле.

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена исследованию задачи Дирихле в ограниченной области $Q \subset R_n$, $n \geq 2$, с гладкой границей $\partial Q \in C^1$, для общего эллиптического уравнения второго порядка

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}u &\equiv -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + (\bar{b}(x), \nabla u) - \operatorname{div}(\bar{c}(x)u) + d(x)u = \\ &= f(x) - \operatorname{div}F(x), \quad x \in Q, \end{aligned}$$

$$(1.2) \quad u|_{\partial Q} = u_0,$$

где $u_0 \in L_2(\partial Q)$, функции f и $F = (f_1, \dots, f_n)$ принадлежат $L_{2,loc}(Q)$, симметрическая матрица $A(x) = (a_{ij}(x))$, элементы которой являются вещественнозначными измеримыми функциями, удовлетворяет условию

$$\gamma|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j = (\xi, A(x)\xi) \leq \gamma^{-1}|\xi|^2$$

для всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R_n$ и почти всех $x \in Q$ с положительной постоянной γ , а коэффициенты $\bar{b}(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))$, $\bar{c}(x) = (c_1(x), \dots, c_n(x))$ и $d(x)$ являются измеримыми и ограниченными в каждой строго внутренней подобласти области Q функциями.

Результаты настоящей работы анонсированы в работе [1]. Как и в работах [2], [3], посвященных изучению поведения вблизи границы области Q решения задачи Дирихле для уравнения без младших членов, будем предполагать, что единичный вектор внутренней нормали $\bar{\nu}$ к границе удовлетворяет условию Дини

$$(1.3) \quad \left| \bar{\nu}(x) - \bar{\nu}(y) \right| \leq \omega(|x - y|)$$

для всех x и y из ∂Q , где $\omega \geq 0$ — монотонная функция такая, что

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty,$$

а коэффициенты a_{ij} непрерывны по Дини на границе: можно так изменить их значения на множестве нулевой (лебеговой) меры, что будет выполняться оценка

$$(1.4) \quad |a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| \leq \omega(|x - y|)$$

для всех $x \in \partial Q$, $y \in Q$ и $i, j = 1, \dots, n$. Можно считать, что функция ω в условиях (1.3) и (1.4) одна и та же.

Относительно коэффициентов $\bar{b}(x)$, $\bar{c}(x)$, $d(x)$ и правой части будем предполагать выполнение следующих условий:

существует постоянная $M > 0$, такая что

$$(1.5) \quad |\bar{b}(x)| \leq \frac{M}{r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/4}}, \quad x \in Q,$$

$$(1.6) \quad \int_0^1 t(1 + |\ln t|)^{3/2} C^2(t) dt < \infty, \quad \text{где } C(t) = \sup_{r(x) \geq t} |\bar{c}(x)|,$$

$$(1.7) \quad \int_0^1 t^3(1 + |\ln t|)^{3/2} D^2(t) dt < \infty, \quad \text{где } D(t) = \sup_{r(x) \geq t} |d(x)|,$$

$$(1.8) \quad r^{3/2}(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/4} f(x) \in L_2(Q)$$

$$(1.9) \quad r^{1/2}(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/4} F(x) \in (L_2(Q))^n,$$

где $r(x)$ – расстояние от точки $x \in Q$ до границы ∂Q .

Под решением задачи (1.1), (1.2) будем понимать функцию u из $W_{2,loc}^1(Q)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) в смысле обобщенных функций (см. [4]), т.е. такую, что для всех $\eta \in C_0^\infty(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$\int_Q (A(x) \nabla u + \bar{c}(x)u, \nabla \eta) dx + \int_Q ((\bar{b}(x), \nabla u) + d(x)u) \eta dx = \int_Q (f\eta + (F, \nabla \eta)) dx,$$

и удовлетворяющую условию (1.2) в следующем смысле:

для каждой точки $x^0 \in \partial Q$ найдется такая ее окрестность $V_{x^0} \subset \partial Q$, что

$$\int_{V_{x^0}} \left(u(x + \delta \bar{\nu}(x^0)) - u_0(x) \right)^2 ds \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow +0.$$

Целью настоящей работы является исследование разрешимости задачи (1.1), (1.2).

В работах [5] – [7] установлено, что решение u задачи (1.1), (1.2) (если оно существует) принадлежит пространству Гущина $C_{n-1}(\bar{Q})$ $(n-1)$ -мерно непрерывных в $\bar{Q}$ функций и имеет ограниченный весовой интеграл Дирихле:

$$\int_Q r(x) |\nabla u(x)|^2 dx < \infty.$$

Напомним, что банахово пространство $(n-1)$ -мерно непрерывных в $\bar{Q}$ функций является пополнением $C(\bar{Q})$ по норме, порожденной (точнее см. [2]) функционалом

$$\ell(v) = \int_0^\infty M_{n-1}(\{x \in \bar{Q} : |v(x)|^2 > \lambda\}) d\lambda, \quad v \in C(\bar{Q}),$$

в котором

$$M_{n-1}(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^\infty r_i^{n-1} : \bigcup_{i=1}^\infty \mathcal{B}_{r_i} \supset E \right\},$$

а точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества E шарами $\mathcal{B}_{r_i}$ радиуса r_i . Отметим только, что функции из $C_{n-1}(\bar{Q}) \subset L_2(Q)$ имеют следы на любом замкнутом множестве $\Gamma \subset \bar{Q}$ положительной $(n-1)$ -мерной меры Хаусдорфа, и если $\Gamma \subset \partial Q \in C^1$, то множество таких следов совпадает с $L_2(\Gamma)$.

Наряду с задачей (1.1), (1.2) рассмотрим следующие задачи Дирихле:

$$(1.10) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(A \nabla v) = 0 \\ v|_{\partial Q} = u_0 \end{cases}$$

и

$$(1.11) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla w) = -(\bar{b}, \nabla w) + \operatorname{div}(\bar{c}w) - dw - (\bar{b}, \nabla v) + \operatorname{div}(\bar{c}v) - dv + f - \operatorname{div}F \\ w|_{\partial Q} = 0, \end{cases}$$

где функция v в правой части уравнения (1.11) есть решение задачи (1.10).

Справедливость следующего утверждения очевидна.

Утверждение 1.1. Пусть функция v является решением задачи (1.10). Тогда для того чтобы функция u являлась решением задачи (1.1), (1.2) необходимо и достаточно, чтобы функция $w = u - v$ являлась решением задачи (1.11).

Задача (1.10) однозначно разрешима при всех $u_0 \in L_2(\partial Q)$ (см. [2]), ее решение v принадлежит пространству $C_{n-1}(\bar{Q})$ и для него справедлива следующая оценка

$$\|v\|_{C_{n-1}(\bar{Q})}^2 + \int_Q r(x) |\nabla v(x)|^2 dx \leq \operatorname{const} \|u_0\|_{L_2(\partial Q)}^2,$$

с независимой от u_0 постоянной.

Следовательно, в силу утверждения 1.1, задача (1.1), (1.2) разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача (1.11).

Введем следующие пространства:

$$\mathcal{U}(Q) \equiv \left\{ u \in W_{2,loc}^1 : \int_Q r(x) |\nabla u(x)|^2 dx < \infty, u \in C_{n-1}(\bar{Q}) \right\},$$

$$\|u\|_{\mathcal{U}(Q)}^2 = \|u\|_{C_{n-1}(\bar{Q})}^2 + \int_Q r(x) |\nabla u(x)|^2 dx,$$

$$\mathring{\mathcal{U}}(Q) \equiv \left\{ u \in \mathcal{U}(Q), u|_{\partial Q} = 0 \right\}.$$

Следуя [3], обозначим через $\mathring{H}_1(Q)$ пополнение $C_0^\infty(Q)$ по норме, порожденной скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathring{H}_1(Q)} = \int_Q \frac{(\nabla u, \nabla v)}{r(1 + |\ln r|)^{3/2}} dx,$$

а через $\mathring{H}(Q)$ - пополнение $C_0^\infty(Q)$ по норме, порожденной скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathring{H}(Q)} = \int_Q \left(r(1 + |\ln r|)^{1/2} (\nabla u, \nabla v) + \frac{u \cdot v}{r(1 + |\ln r|)^{1/2}} \right) dx.$$

Напомним, что $r(x)$ - расстояние от точки $x \in Q$ до границы ∂Q .

Имеют место следующие вложения

$$\mathring{H}_1(Q) \subset \mathring{W}_2^1(Q) \subset \mathring{H}(Q) \subset \mathring{\mathcal{U}}(Q).$$

Справедливость вложения $\mathring{H}(Q) \subset \mathring{\mathcal{U}}(Q)$ установлена в работе [3], остальные вложения вытекают из следующих оценок для функций из $C_0^\infty(Q)$:

$$\|\eta\|_{\mathring{W}_2^1(Q)} \leq \text{const} \|\eta\|_{\mathring{H}_1(Q)} \quad \text{и} \quad \|\eta\|_{\mathring{H}(Q)} \leq \text{const} \|\eta\|_{\mathring{W}_2^1(Q)},$$

где постоянные не зависят от η . Справедливость первой оценки очевидна, а вторую оценку можно получить применением неравенства Харди, см. [8] (подробнее см. доказательство теоремы 1).

Так как решение задачи (1.1), (1.2) и решение задачи (1.10) принадлежат пространству $\mathcal{U}(Q)$, см. [7], [2], то из утверждения 1.1 следует, что решение w задачи (1.11) принадлежит пространству $\mathring{\mathcal{U}}(Q)$.

Рассмотрим далее выражение

$$Tu \equiv -(\bar{b}, \nabla u) + \text{div}(\bar{c}u) - du$$

из правой части уравнения (1.11).

Теорема 1.1. *T является линейным и ограниченным оператором, действующим из пространства $\mathcal{U}(Q)$ в сопряженное к $\mathring{H}_1(Q)$ пространство $[\mathring{H}_1(Q)]^*$.*

Доказательство. Пусть $x^0 \in \partial Q$ произвольная точка границы ∂Q области Q . Фиксируем локальную систему координат (x', x_n) с началом в точке x^0 , а ось x_n направим по внутренней нормали $\nu(x^0)$ к ∂Q в точке x^0 . Поскольку граница области гладкая, $\partial Q \in C^1$, то существует $r_{x^0} > 0$ и функция $\varphi_{x^0} \in C^1(R_{n-1})$, удовлетворяющая условию:

$$\varphi_{x^0}(0) = 0, \nabla \varphi_{x^0}(0) = 0 \text{ и } |\nabla \varphi_{x^0}(x')| \leq \frac{1}{2} \text{ для всех } x' \in R_{n-1},$$

такие, что пересечение области Q с шаром $U_{x^0}^{(r_{x^0})} = \{x : |x - x^0| < r_{x^0}\}$ радиуса r_{x^0} с центром в точке x^0 имеет вид

$$Q \cap U_{x^0}^{(r_{x^0})} = U_{x^0}^{(r_{x^0})} \cap \{(x', x_n) : x_n > \varphi_{x^0}(x')\}.$$

Тогда

$$\partial Q \cap U_{x^0}^{(r_{x^0})} = U_{x^0}^{(r_{x^0})} \cap \{(x', x_n) : x_n = \varphi_{x^0}(x')\}.$$

Положим $\ell_{x^0} = \frac{r_{x^0}}{\sqrt{2}}$ и из покрытия $\{U_{x^0}^{(\ell_{x^0})}, x^0 \in \partial Q\}$ границы ∂Q выберем конечное подпокрытие $U_{x^m}^{(\ell_{x^m})}$, $m = 1, \dots, p$. Обозначим

$$U_m = U_{x^m}^{(r_{x^m})}, \quad r_m = r_{x^m}, \quad \ell_m = \ell_{x^m}, \quad \varphi_m = \varphi_{x^m}, \quad \text{где } m = 1, \dots, p.$$

Пусть

$$h = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \min(r_1, \dots, r_p).$$

Тогда каждый из криволинейных "цилиндров"

$$\Pi_m^{\ell_m, h} = \{(x', x_n) : |x'| < \ell_m, \varphi_m(x') < x_n < \varphi_m(x') + h\}, m = 1, \dots, p,$$

лежит в соответствующем шаре U_m , также как и в $U_m \cap Q$.

Пусть $\ell_0 < h$ такое положительное число, что дополнение в Q области

$$Q_{\ell_0} = \{x \in Q : r(x) = \text{dist}(x, \partial Q) > \ell_0\}$$

содержится в объединении "цилиндров" $\Pi_m^{\ell_m, h}$, $m = 1, \dots, p$: т.е.

$$Q^{\ell_0} = \{x \in Q : r(x) = \text{dist}(x, \partial Q) \leq \ell_0\} \subset \bigcup_{m=1}^p \Pi_m^{\ell_m, h}.$$

Легко видеть, что для всех $x = (x', x_n) \in \Pi_m^{\ell_m, h}$, $m = 1, \dots, p$, имеем:

$$r(x) \leq x_n - \varphi_m(x') \leq \frac{\sqrt{5}}{2} r(x).$$

Зафиксируем некоторый номер m , $1 \leq m \leq p$, и возьмем локальную систему координат с началом в точке x^m . В дальнейшем зависимость функции φ_m от номера m отмечать не будем: $\varphi = \varphi_m$.

Определим отображения $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_{-1}$ пространства R_n на себя соотношениями

$$\mathcal{L}(x) = (x', x_n - \varphi(x')), \quad x = (x', x_n) \quad \text{и} \quad \mathcal{L}_{-1}(y) = (y', y_n + \varphi(y')), \quad y = (y', y_n).$$

Образ $\Pi_m^{\ell_m, h}$ при отображении $\mathcal{L}$ будем обозначать через $\tilde{\Pi}_m^{\ell_m, h}$, т.е. $\mathcal{L}(\Pi_m^{\ell_m, h}) = \tilde{\Pi}_m^{\ell_m, h}$.

Возьмем произвольные $u \in \mathcal{U}(Q)$ и $\eta \in C_0^\infty(Q)$. Обозначим $u(y', y_n + \varphi(y')) = \tilde{u}(y)$, $\eta(y', y_n + \varphi(y')) = \tilde{\eta}(y)$. Рассмотрим

$$\langle Tu, \eta \rangle \equiv - \int_Q (\bar{b}(x), \nabla u(x)) \eta(x) dx - \int_Q (\bar{c}(x) u(x), \nabla \eta(x)) dx - \int_Q d(x) u(x) \eta(x) dx.$$

В силу (1.5)

$$\begin{aligned} & \left| \int_Q (\bar{b}(x), \nabla u(x)) \eta(x) dx \right| \leq M \int_Q \frac{|\nabla u(x)| |\eta(x)|}{r(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/4}} dx \leq \\ & \leq M \left(\int_Q r(x) |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_Q \frac{\eta^2(x)}{r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2}} dx \right)^{1/2} \leq \end{aligned}$$

$$\leq M \|u\|_{U(Q)} \left(\int_Q \frac{\eta^2(x)}{r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2}} dx \right)^{1/2}.$$

Далее, применяя неравенство Харди, имеем

$$\begin{aligned} \int_Q \frac{\eta^2(x)}{r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2}} dx &\leq \int_{Q_{i_0}} \frac{\eta^2(x)}{r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2}} dx + \\ &+ \sum_{m=1}^p \int_{\Pi_m^{\ell_m, h}} \frac{\eta^2(x)}{r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2}} dx \leq \frac{1}{\ell_0^3} \int_Q \eta^2(x) dx + \\ &+ \sum_{m=1}^p \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^3 \int_{\tilde{\Pi}_m^{\ell_m, h}} \frac{\tilde{\eta}^2(y)}{y_n^3 (1 + |\ln y_n|)^{3/2}} dy = \frac{1}{\ell_0^3} \int_Q \eta^2(x) dx + \\ &+ \sum_{m=1}^p \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^3 \int_0^h dy_n \int_{|y'| < \ell_m} \frac{\left(\int_0^{y_n} \tilde{\eta}_\tau(y', \tau) d\tau \right)^2}{y_n^3 (1 + |\ln y_n|)^{3/2}} dy' \leq \text{const} \int_Q |\nabla \eta(x)|^2 dx + \\ &+ \sum_{m=1}^p \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^3 \int_{|y'| < \ell_m} dy' \int_0^h \left(\frac{\int_0^{y_n} \tilde{\eta}_\tau(y', \tau) d\tau}{y_n^{3/2} (1 + |\ln y_n|)^{3/4}} \right)^2 dy_n \leq \\ &\leq \text{const} \left(\int_Q |\nabla \eta(x)|^2 dx + \sum_{m=1}^p \int_{|y'| < \ell_m} dy' \int_0^h \frac{\tilde{\eta}_{y_n}^2(y', y_n)}{y_n (1 + |\ln y_n|)^{3/2}} dy_n \right) \leq \\ &\leq \text{const} \left(\int_Q |\nabla \eta|^2 dx + \sum_{m=1}^p \int_{\tilde{\Pi}_m^{\ell_m, h}} \frac{|\nabla \tilde{\eta}(y)|^2}{y_n (1 + |\ln y_n|)^{3/2}} dy \right) \leq \\ (1.12) \quad &\leq \text{const} \int_Q \frac{|\nabla \eta(x)|^2}{r(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2}} dx. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left| \int_Q (\bar{b}(x), \nabla u(x)) \eta(x) dx \right| \leq \text{const} \|u\|_{U(Q)} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)},$$

где постоянная не зависит от u и η .

В силу (1.6)

$$\left| \int_Q (\bar{c}(x) u(x), \nabla \eta(x)) dx \right| \leq \int_Q C(r(x)) |u(x)| |\nabla \eta(x)| dx \leq$$

$$\begin{aligned}
& \leq \left(\int_Q r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}} C^2(r(x)) u^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Q \frac{|\nabla \eta(x)|^2}{r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq \left(\int_Q r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2} C^2(r(x)) u^2(x) dx \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \\
& \leq (C^2(\ell_0) \int_{Q_{\ell_0}} r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2} u^2(x) dx + \\
& + \sum_{m=1}^p \int_{\Pi_m^{\ell_m, h}} r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2} C^2(r(x)) u^2(x) dx)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \\
& \leq (C^2(\ell_0) \max_{x \in \bar{Q}_{\ell_0}} r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2} \int_{Q_{\ell_0}} u^2(x) dx + \\
& + \sum_{m=1}^p \int_{\Pi_m^{\ell_m, h}} y_n \left(1 + \left| \ln \frac{2}{\sqrt{5}} y_n \right| \right)^{3/2} C^2 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n \right) \tilde{u}^2(y', y_n) dy' dy_n)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \\
& \leq \text{const} (\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \sum_{m=1}^p \int_0^h y_n \left(1 + \left| \ln \frac{2}{\sqrt{5}} y_n \right| \right)^{3/2} C^2 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n \right) dy_n \times \\
& \quad \times \max_{0 \leq y_n \leq h} \int_{|y'| < \ell_m} \tilde{u}^2(y', y_n) dy')^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \\
& \leq \text{const} \left(\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \sum_{m=1}^p \max_{0 \leq y_n \leq h} \int_{|y'| < \ell_m} \tilde{u}^2(y', y_n) dy' \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \\
& \leq \text{const} (\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \|u\|_{C_{n-1}(\bar{Q})}^2)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \text{const} \|u\|_{\mathcal{U}(Q)} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)},
\end{aligned}$$

где постоянная не зависит от u и η .

И наконец, в силу (1.7) и (1.12), аналогично предыдущим оценкам, получаем

$$\begin{aligned}
& \left| \int_Q d(x) u(x) \eta(x) dx \right| \leq \int_Q D(r(x)) |u(x)| |\eta(x)| dx \leq \\
& \leq \left(\int_Q r^3(x)(1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}} D^2(r(x)) u^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Q \frac{\eta^2(x)}{r^3(x)(1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq \text{const} \left(\int_Q r^3(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2} D^2(r(x)) u^2(x) dx \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \text{const}(D^2(\ell_0) \int_{Q_{\ell_0}} r^3(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2} u^2(x) dx + \sum_{m=1}^p \int_{\Pi_{\ell_m, h}} r^3(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2} D^2(r(x)) u^2(x) dx)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \\
&\leq \text{const}(D^2(\ell_0) \max_{x \in Q_{\ell_0}} r^3(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2} \int_{Q_{\ell_0}} u^2(x) dx + \\
&+ \sum_{m=1}^p \int_{\Pi_{\ell_m, h}} y_n^3 \left(1 + \left|\ln \frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right|\right)^{\frac{3}{2}} D^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right) \tilde{u}^2(y', y_n) dy' dy_n)^{\frac{1}{2}} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \\
&\leq \text{const}(\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \sum_{m=1}^p \int_0^h y_n^3 \left(1 + \left|\ln \frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right|\right)^{3/2} D^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right) dy_n \times \\
&\quad \times \max_{\substack{0 \leq y_n \leq h \\ |y'| < \ell_m}} \int \tilde{u}^2(y', y_n) dy')^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \\
&\leq \text{const} \left(\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \sum_{m=1}^p \max_{\substack{0 \leq y_n \leq h \\ |y'| < \ell_m}} \int \tilde{u}^2(y', y_n) dy' \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \\
&\leq \text{const} \left(\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \|u\|_{C_{n-1}(\bar{Q})}^2 \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \text{const} \|u\|_{\mathcal{U}(Q)} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)},
\end{aligned}$$

где постоянная не зависит от u и η .

Таким образом, для произвольных $u \in \mathcal{U}(Q)$ и $\eta \in C_0^\infty(Q)$ имеет место оценка

$$|\langle Tu, \eta \rangle| \leq \text{const} \|u\|_{\mathcal{U}(Q)} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)}$$

с независимой от u и η постоянной. Так как функции η из $C_0^\infty(Q)$ всюду плотны в $\dot{H}_1(Q)$, то из полученной оценки немедленно вытекает ограниченность рассматриваемого оператора $T : \mathcal{U}(Q) \rightarrow [\dot{H}_1(Q)]^*$. Теорема доказана. $\square$

В [3] установлено, что для любой правой части $g' \in [\dot{H}_1(Q)]^*$ существует решение задачи

$$(1.13) \quad -\text{div}(A \nabla u) = g', \quad u|_{\partial Q} = 0,$$

оно принадлежит пространству $\dot{H}(Q)$ и имеет место оценка

$$\|u\|_{\dot{H}(Q)} \leq C \|g'\|_{[\dot{H}_1(Q)]^*}$$

с независимой от g' постоянной. Следовательно, если через $\mathcal{L}_0^{-1}$ обозначить оператор, ставящий в соответствие правой части $g' \in [\dot{H}_1(Q)]^*$ решение $u \in \dot{H}(Q)$

задачи (1.13), то $\mathcal{L}_0^{-1}$ является линейным и ограниченным оператором, действующим из $\left[\overset{\circ}{H}_1(Q)\right]^*$ в $\overset{\circ}{H}(Q)$. Таким образом справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2. $\mathcal{L}_0^{-1}T$ является линейным и ограниченным оператором, действующим из пространства $\mathcal{U}(Q)$ в $\overset{\circ}{H}(Q)$.

Пусть w является решением задачи (1.11). Тогда нетрудно видеть, что w является также решением операторного уравнения

$$w = \mathcal{L}_0^{-1}Tw + \mathcal{L}_0^{-1}Tv + \mathcal{L}_0^{-1}(f - \operatorname{div}F)$$

в пространстве $\overset{\circ}{\mathcal{U}}(Q)$, где v – решение задачи (1.10), (1.11). С другой стороны, если функция w из пространства $\overset{\circ}{\mathcal{U}}(Q)$ является решением операторного уравнения

$$w = \mathcal{L}_0^{-1}(Tw + Tv + f - \operatorname{div}F),$$

то очевидно w является решением задачи (1.11). Таким образом справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1.2. Функция w является решением задачи (1.11) тогда и только тогда, когда w является решением операторного уравнения

$$(1.14) \quad w - \mathcal{L}_0^{-1}Tw = \mathcal{L}_0^{-1}g, \quad w \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}(Q),$$

в пространстве $\overset{\circ}{\mathcal{U}}(Q)$, где $g = Tv + f - \operatorname{div}F$, а v – решение задачи (1.10).

Заметим, что при выполнении условий (1.8), (1.9) слагаемое $f - \operatorname{div}F$ в правой части уравнения (1.11) принадлежит $\left[\overset{\circ}{H}_1(Q)\right]^*$ (см. [3]). Далее, наряду с уравнением (1.14) рассмотрим соответствующее операторное уравнение в пространстве $\overset{\circ}{H}(Q)$:

$$(1.15) \quad w - \mathcal{L}_0^{-1}Tw = h, \quad w \in \overset{\circ}{H}(Q).$$

Из теоремы 1.2 следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 1.3. Если $g \in \left[\overset{\circ}{H}_1(Q)\right]^*$, то решение (в $\overset{\circ}{\mathcal{U}}(Q)$) уравнения (1.14) является решением (в $\overset{\circ}{H}(Q)$) уравнения (1.15) с $h = \mathcal{L}_0^{-1}g$.

Замечание 1.1. На самом деле справедливо более сильное утверждение, а именно, если правая часть уравнения (1.14) из $\overset{\circ}{H}(Q)$, то решение также принадлежит $\overset{\circ}{H}(Q)$.

Объединяя утверждения 1.2 и 1.3, получаем

Теорема 1.3. *Для того чтобы функция w являлась решением задачи (1.11) необходимо и достаточно, чтобы функция w являлась решением операторного уравнения (1.15) в пространстве $\mathring{H}(Q)$ с правой частью $h = \mathcal{L}_0^{-1}(Tv + f - \operatorname{div} F)$, где v решение задачи (1.10).*

Далее, если рассмотреть оператор $\mathcal{L}_0^{-1}T$ в гильбертовом пространстве $\mathring{H}(Q)$, то справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.4. *$\mathcal{L}_0^{-1}T$ является вполне непрерывным линейным оператором, действующим из $\mathring{H}(Q)$ в $\mathring{H}(Q)$.*

Доказательство. Так как оператор $\mathcal{L}_0^{-1}$ является ограниченным линейным оператором, действующим из пространства $[\mathring{H}_1(Q)]^*$ в пространство $\mathring{H}(Q)$, то для доказательства теоремы достаточно показать, что оператор T является вполне непрерывным линейным оператором из $\mathring{H}(Q)$ в $[\mathring{H}_1(Q)]^*$. Рассмотрим последовательность операторов

$$T_k w = -(\bar{b}_k(x), \nabla w(x)) + \operatorname{div}(\bar{c}_k(x)w(x)) - d_k(x)w(x), \quad w \in \mathring{H}(Q), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где

$$\begin{aligned} \bar{b}_k(x) &= \begin{cases} \bar{b}(x), & \text{если } r(x) > \frac{1}{k} \\ 0, & \text{если } r(x) \leq \frac{1}{k} \end{cases} \\ \bar{c}_k(x) &= \begin{cases} \bar{c}(x), & \text{если } r(x) > \frac{1}{k} \\ 0, & \text{если } r(x) \leq \frac{1}{k} \end{cases} \\ d_k(x) &= \begin{cases} d(x), & \text{если } r(x) > \frac{1}{k} \\ 0, & \text{если } r(x) \leq \frac{1}{k}. \end{cases} \end{aligned}$$

Легко видеть, что оператор T_k , $k \geq 1$, является вполне непрерывным линейным оператором из $\mathring{H}(Q)$ в $[\mathring{H}_1(Q)]^*$. Действительно, пусть $\{w(x)\}$ - ограниченное множество в $\mathring{H}(Q)$. Тогда, очевидно, множества $\{(\bar{b}_k(x), \nabla w(x))\}$, $\{\bar{c}_k(x)w(x)\}$, $\{d_k(x)w(x)\}$ ограничены в $L_2(Q)$, тем самым компактны в $\mathring{W}_2^{-1}(Q)$ (см., например [9]) и, следовательно, в $[\mathring{H}_1(Q)]^*$. Покажем, что $\|T - T_k\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Для произвольных $w \in \mathring{H}(Q)$ и $\eta \in C_0^\infty(Q)$ рассмотрим

$$\begin{aligned} \langle (T - T_k)w, \eta \rangle &= - \int_{Q^{1/k}} (\bar{b}(x), \nabla w(x)) \eta(x) dx - \int_{Q^{1/k}} (\bar{c}(x)w(x), \nabla \eta(x)) dx - \\ &\quad - \int_{Q^{1/k}} d(x)w(x) \eta(x) dx = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Далее будем следовать схеме доказательства теоремы 1.1. Будем считать $k > \frac{1}{\ell_0}$.

В силу (1.5), (1.12)

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq M \int_{Q^{1/k}} \frac{|\nabla w(x)| |\eta(x)|}{r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/4}} dx \leq \\ &\leq M \left(\int_{Q^{1/k}} r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{1/2} |\nabla w(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{Q^{1/k}} \frac{\eta^2(x)}{r^3(x)(1 + |\ln r(x)|)^2} dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{const}{(1 + |\ln \frac{1}{k}|)^{1/4}} \|w\|_{\dot{H}(Q)} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} = \varepsilon_1(k) \|w\|_{\dot{H}(Q)} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)}, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_1(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

В силу (1.6)

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \left(\int_{Q^{1/k}} r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2} C^2(r(x)) w^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left(\int_{Q^{1/k}} \frac{|\nabla \eta(x)|^2}{r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left(\sum_{m=1}^p \int_{\Pi_m^{\ell_m, h} \cap Q^{1/k}} r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2} C^2(r(x)) w^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \\ &\leq \left(\sum_{m=1}^p \int_0^{\sqrt{5}/2k} dy_n \int_{|y'| < \ell_m} y_n \left(1 + \left| \ln \frac{2}{\sqrt{5}} y_n \right| \right)^{\frac{3}{2}} C^2 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n \right) \tilde{w}^2(y', y_n) dy' \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \left(\frac{5}{4} \int_0^{1/k} t(1 + |\ln t|)^{3/2} C^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left(\sum_{m=1}^p \max_{0 \leq y_n \leq \sqrt{5}/2k} \int_{|y'| < \ell_m} \tilde{w}^2(y', y_n) dy' \right)^{\frac{1}{2}} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \\ &\leq \varepsilon_2(k) \|w\|_{C_{n-1}(\bar{Q})} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \varepsilon_2(k) \|w\|_{\dot{H}(Q)} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)}, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_2(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

И наконец, в силу (1.7), (1.12), аналогично предыдущим оценкам, получаем

$$\begin{aligned}
 |I_3| &\leq \left(\int_{Q^{1/k}} r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} D^2(r(x)) w^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
 &\quad \times \left(\int_{Q^{1/k}} \frac{\eta^2(x)}{r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
 &\leq \text{const} \left(\sum_{m=1}^p \int_{\Pi_m^{\ell_m, h} \cap Q^{1/k}} r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} D^2(r(x)) w^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \\
 &\leq \text{const} \left(\sum_{m=1}^p \int_0^{\sqrt{5}/2k} dy_n \int_{|y'| < \ell_m} y_n^3 \left(1 + \left| \ln \frac{2}{\sqrt{5}} y_n \right| \right)^{\frac{3}{2}} D^2 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n \right) \tilde{w}^2(y', y_n) dy' \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
 &\quad \times \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \text{const} \left(\int_0^{1/k} t^3 (1 + |\ln t|)^{3/2} D^2(t) dt \right)^{1/2} \times \\
 &\quad \times \left(\sum_{m=1}^p \max_{0 \leq y_n \leq \sqrt{5}/2k} \int_{|y'| < \ell_m} \tilde{w}^2(y', y_n) dy' \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \\
 &\leq \text{const} \left(\int_0^{1/k} t^3 (1 + |\ln t|)^{\frac{3}{2}} D^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \|w\|_{C_{n-1}(\bar{Q})} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \varepsilon_3(k) \|w\|_{\dot{H}(Q)} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)},
 \end{aligned}$$

где $\varepsilon_3(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Таким образом, имеет место оценка

$$|\langle (T - T_k)w, \eta \rangle| \leq \varepsilon(k) \|w\|_{\dot{H}(Q)} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)},$$

где $\varepsilon(k) = \varepsilon_1(k) + \varepsilon_2(k) + \varepsilon_3(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, откуда следует, что $\|T - T_k\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, как предел вполне непрерывных линейных операторов, оператор T также является вполне непрерывным линейным оператором, действующим из $\dot{H}(Q)$ в $[\dot{H}_1(Q)]^*$. Теорема доказана. $\square$

Таким образом, изучение разрешимости задачи (1.1), (1.2) сведено к изучению разрешимости операторного уравнения (1.15) в гильбертовом пространстве $\dot{H}(Q)$ с вполне непрерывным оператором $\mathcal{L}_0^{-1}T$. В силу теоремы Фредгольма, для разрешимости уравнения (1.15) в пространстве $\dot{H}(Q)$ необходимо и достаточно

условие ортогональности правой части h подпространству решений сопряженной однородной задачи. В частности, операторное уравнение (1.15) в гильбертовом пространстве $\mathring{H}(Q)$ имеет решение при любой h из $\mathring{H}(Q)$, если однородное уравнение

$$(1.16) \quad w - \mathcal{L}_0^{-1}Tw = 0, \quad w \in \mathring{H}(Q).$$

имеет только тривиальное решение $w \equiv 0$. Но, в силу теоремы 1.3, решение уравнения (1.16) является решением однородной задачи

$$(1.17) \quad \mathcal{L}w = 0, \quad w|_{\partial Q} = 0.$$

Тем самым для задачи (1.1), (1.2) имеет место следующая теорема об однозначной разрешимости.

Теорема 1.5. *Пусть однородная задача (1.17) имеет только тривиальное решение. Тогда для всех $u_0 \in L_2(\partial Q)$, f и F , удовлетворяющих условиям (1.8), (1.9), существует решение задачи (1.1), (1.2). Оно принадлежит пространству $\mathcal{U}(Q)$ и для него справедлива оценка*

$$\begin{aligned} \|u\|_{C_{n-1}(\bar{Q})}^2 + \int_Q r(x) |\nabla u(x)|^2 dx &\leq \text{const} (\|u_0\|_{L_2(\partial Q)}^2 + \\ &+ \int_Q r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} f^2(x) dx + \int_Q r(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} |F(x)|^2 dx), \end{aligned}$$

с независимой от u_0 , f и F постоянной.

Доказательство. Существование решения задачи (1.1), (1.2) мы уже доказали выше. Установим справедливость оценки для решения. Пусть u - решение задачи (1.1), (1.2). Тогда $u = v + w$, где v - решение задачи (1.10), w - решение задачи (1.11). Следовательно $\|u\|_{\mathcal{U}(Q)} \leq \|v\|_{\mathcal{U}(Q)} + \|w\|_{\mathcal{U}(Q)}$. Далее, имеем

$$\begin{aligned} \|w\|_{\mathcal{U}(Q)} &\leq \|w\|_{\mathring{H}(Q)} \leq \text{const} \|\mathcal{L}_0^{-1}(Tv + f - \text{div}F)\|_{\mathring{H}(Q)} \leq \\ &\leq \text{const} \left(\|v\|_{\mathcal{U}(Q)} + \|f\|_{[\mathring{H}_1(Q)]^*} + \|\text{div}F\|_{[\mathring{H}_1(Q)]^*} \right), \end{aligned}$$

$$\|v\|_{\mathcal{U}(Q)} \leq \text{const} \|u_0\|_{L_2(\partial Q)}.$$

В силу (1.8), (1.9) и (1.12), для произвольной функции η из $C_0^\infty(Q)$ имеем

$$|\langle f, \eta \rangle| = \left| \int_Q f(x) \eta(x) dx \right| \leq \left(\int_Q r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}} f^2(x) dx \right)^{1/2} \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left(\int_Q \frac{\eta^2(x)}{r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
 & \leq \text{const} \left(\int_Q r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}} f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)}, \\
 & |\langle \text{div} F, \eta \rangle| = \left| \int_Q (F(x), \nabla \eta(x)) dx \right| \leq \\
 & \leq \left(\int_Q r(x) (1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}} |F(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, получаем оценку

$$\begin{aligned}
 \|u\|_{U(Q)} & \leq \text{const} \left(\|v\|_{U(Q)} + \|f\|_{[\dot{H}_1(Q)]^*} + \|\text{div} F\|_{[\dot{H}_1(Q)]^*} \right) \leq \\
 & \leq \text{const} \left(\|u_0\|_{L_2(Q)} + \left(\int_Q r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} f^2(x) dx \right)^{1/2} + \right. \\
 & \quad \left. + \left(\int_Q r(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} |F(x)|^2 dx \right)^{1/2} \right)
 \end{aligned}$$

с независимой от u_0, f, F постоянной. Теорема доказана. $\square$

Abstract. The paper gives some solvability conditions of the Dirichlet problem for the second order elliptic equation

$$\begin{aligned}
 & -\text{div} (A(x)\nabla u) + (\bar{b}(x), \nabla u) - \text{div}(\bar{c}(x)u) + d(x)u = f(x) - \text{div} F(x), \quad x \in Q, \\
 & u|_{\partial Q} = u_0 \in L_2(\partial Q)
 \end{aligned}$$

in bounded domain $Q \subset R_n$ ($n \geq 2$) with smooth boundary $\partial Q \in C^1$. In particular, it is proved that if the homogeneous problem has only the trivial solution, then for any $u_0 \in L_2(\partial Q)$ and f, F from the corresponding functional spaces the solution of the non-homogeneous problem exists, from Gushchin's space $C_{n-1}(\bar{Q})$ and the following

inequality is true:

$$\begin{aligned} & \|u\|_{C_{n-1}(\overline{Q})}^2 + \int_Q r |\nabla u|^2 dx \leq \\ & \leq C \left(\|u_0\|_{L_2(\partial Q)}^2 + \int_Q r^3 (1 + |\ln r|)^{3/2} f^2 dx + \int_Q r (1 + |\ln r|)^{3/2} |F|^2 dx \right), \end{aligned}$$

where $r(x)$ is the distance from a point $x \in Q$ to the boundary ∂Q and the constant C does not depend on u_0 , f and F .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Ж. Думанян, “О разрешимости задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”, ДНАН Армении, **110**, no. 2, 120 – 127 (2010).
- [2] А. К. Гущин, “О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”, Матем. сб., **137(179)**, no. 1(9), 19 – 64 (1988).
- [3] А. К. Гущин, В. П. Михайлов, “О существовании граничных значений решений эллиптического уравнения”, Матем. сб., **182**, no. 6, 787 – 810 (1991).
- [4] В. П. Михайлов, Дифференциальные Уравнения в Частных Производных, М., Наука, 424 с (1983).
- [5] В. Ж. Думанян, “О поведении вблизи границы решения задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка”, ДНАН Армении, **108**, no. 2, 110 – 116 (2008).
- [6] В. Ж. Думанян, “Об оценке весового интеграла Дирихле решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”, ДНАН Армении, 2008, **108**, no. 1, 45 – 49 (2008).
- [7] В. Ж. Думанян, “О граничных значениях решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”, Известия НАН Армении, серия Математика, **45**, no. 1, 31 – 52 (2010).
- [8] В. Г. Мазья, Пространства С. Л. Соболева, Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 416 с. (1985).
- [9] В. П. Михайлов, А. К. Гущин, Дополнительные главы курса “Уравнения математической физики”, Лекционные курсы НОЦ, Вып.7, Математический институт им. В.А.Стеклова РАН (МИАН), М., МИАН, 2007, 146 с. (2007).

Поступила 7 сентября 2010