

ГИПОТЕЗЫ О GC_n МНОЖЕСТВАХ

А. АПОЗЯН

Институт Математики НАН Армении
E-mail: *aapozyan@yahoo.com*

Аннотация. В работе мы даем обобщение контрпримера, приведенного К. Де Буром для $\mathbb{R}^d$ и приводим пример множества GC_2 в $\mathbb{R}^4$ с тремя максимальными гиперплоскостями. Мы также обсуждаем гипотезу, касающуюся числа максимальных прямых множеств GC_n в $\mathbb{R}^d$ и доказываем ее правдивость в случае $n = 2, d = 3$.

MSC2000 number: 12E10

Ключевые слова: геометрическая характеристика, максимальная гиперплоскость, фундаментальный многочлен, естественная сеть, 1-сеть, GC_n множество.

1. ВВЕДЕНИЕ

Начнем с некоторых стандартных обозначений:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in Z_+^d,$$

$$\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_d^{\alpha_d}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d.$$

Через $\Pi_n^d = \Pi_n^d(\mathbb{R}^d)$ обозначим пространство многочленов d переменных, степени не больше n :

$$\Pi_n^d = \left\{ p(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha \mathbf{x}^\alpha, a_\alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

Получаем

$$N := N(n, d) := \dim \Pi_n^d = \binom{n+d}{d}.$$

Задача интерполяции с множеством узлов $\mathcal{X}_s := \{\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(s)}\} \subset \mathbb{R}^d$ называется точной в Π_n^d , если для любых заданных чисел $\{c_1, c_2, \dots, c_s\}$ существует единственный многочлен $p \in \Pi_n^d$, называемый интерполяционным многочленом, такой что

$$(1.1) \quad p(\mathbf{x}^{(k)}) = c_k, \quad k = 1, 2, \dots, s.$$

Эти условия образуют систему s линейных уравнений с N переменными (коэффициенты многочлена). Точность означает что эта система имеет единственное решение для любой правой части. Отсюда следует необходимое условие точности

$s = N$, т.е. число уравнений равно числу переменных. Впредь будем предполагать, что это условие имеет место.

Многочлен $p_A^* \in \Pi_n^d$ называется фундаментальным многочленом узла $A = \mathbf{x}^{(\mathbf{k})} \in \mathcal{X}$ для множества $\mathcal{X} := \mathcal{X}_N$, если

$$p_A^*(\mathbf{x}^{(k)}) = 1, \quad p_A^*(\mathbf{x}^{(j)}) = 0, \quad 1 \leq j \leq N, \quad j \neq k.$$

Отметим, что задача интерполяции точна тогда и только тогда, когда для всех узлов существуют фундаментальные многочлены. Заметим, что в случае точности все фундаментальные многочлены единственны, так как они интерполяционные многочлены. Легко заметить, что фундаментальные многочлены имеют степень равную n . Действительно, в противном случае, если степень многочлена p_A^* будет меньше, чем n , то умножая его на линейный многочлен принимающий значение 0 в точке A , получим нетривиальный многочлен из Π_n^d принимающий значение 0 на всем множестве $\mathcal{X}$, что противоречит точности $\mathcal{X}$.

В случае точности мы имеем формулу Лагранжа для интерполяционного многочлена

$$p = \sum_{i=1}^N c_i p_{\mathbf{x}^{(i)}}^*.$$

В дальнейшем, если гиперплоскость задаётся уравнением $h(x) = 0$, где $h \in \Pi_1^d$, то через h мы будем обозначать как гиперплоскость, так и многочлен h .

Определение 1.1. *Перемещение линейного пространства имеющего измерения k в $\mathbb{R}^d$ называется k -мерной плоскостью, или короче k -плоскостью.*

Например точка, прямая и гиперплоскость в $\mathbb{R}^d$ являются 0, 1 и $(d-1)$ -мерными плоскостями соответственно. Пустое множество мы назовем (-1) -плоскостью. k -плоскость h мы обозначим через $h\{k\}$. Если h есть гиперплоскость, т.е. $k = d-1$, то мы так же используем обозначение $h := h\{d-1\}$.

Определение 1.2. *Пусть дана k -плоскость $h\{k\}$. Множество узлов $\mathcal{X} \subset h\{k\}$ удовлетворяет геометрической характеристике для Π_n^k (GC_n для краткости), если:*

1. $\#\mathcal{X} = N(n, k)$,
2. Для любого фиксированного узла $A \in \mathcal{X}$ существует не более чем n $(k-1)$ -плоскостей $h_1^A, h_2^A, \dots, h_m^A$ ($m = m_A \leq n$) лежащих в $h\{k\}$, объединение которых содержит все узлы $\mathcal{X}$, за исключением A .

При выполнении условия 2 будем говорить, что узел A использует каждый из гиперплоскостей $h_1^A, h_2^A, \dots, h_k^A$.

Как мы увидим каждая k -плоскость может содержать не более $N(n, k)$ узлов множества GC_n .

В частности, если $h\{k\} = \mathbb{R}^d$, т.е. $k = d$, то говорят, что $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d$ является GC_n множеством, если $\#\mathcal{X} = N$ и для любого узла $A \in \mathcal{X}$ существуют не более чем n гиперплоскостей в $\mathbb{R}^d$, объединение которых содержит все узлы $\mathcal{X}$ за исключением A .

Отметим, что условие 2 в этом случае означает, что фундаментальный многочлен узла A можно представить в виде произведения линейных множителей

$$p_A^* = \gamma_A \cdot h_1^A \cdot h_2^A \cdots h_k^A,$$

где $h_1^A, h_2^A, \dots, h_k^A$ – гиперплоскости, используемые узлом A , а γ_A – постоянная. Таким образом, каждое GC_n множество точно. Поэтому число гиперплоскостей, используемых каждым узлом, равно n , т.е. $m_A = n$ для любого $A \in \mathcal{X}$.

М. Гаска и Дж. Маезту (см. [2]) сформулировали следующую гипотезу для GC_n множеств в $\mathbb{R}^2$:

Гипотеза - GM . Если $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$ есть GC_n множество, то существует прямая, содержащая $n + 1$ узлов $\mathcal{X}$.

С. Боор обобщил эту гипотезу для $\mathbb{R}^d$ (см. [1]):

Гипотеза - GM_d . Если $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d$ есть GC_n множество, то существует гиперплоскость, содержащая $N(n, d - 1)$ узлов $\mathcal{X}$.

Указанные выше прямая и гиперплоскость называются максимальными или просто максималами. Ниже мы обобщаем понятие максимала.

Из Леммы 2.1 работы [8] следует, что $\#(h\{k\} \cap \mathcal{X}) \leq N(n, k)$ для любой k -плоскости $h\{k\}$.

Определение 1.3. k -плоскость $h\{k\}$ называется максимальной для GC_n множества $\mathcal{X}$, если $h\{k\}$ содержит ровно $N(n, k)$ узлов из $\mathcal{X}$.

Таким образом, каждая прямая содержащая $n + 1$ узлов, называется максимальной прямой, т.е. максимальной 1-плоскостью в $\mathbb{R}^d$.

Определение 1.4. Множество гиперплоскостей $H = \{h_1, h_2, \dots, h_l\}$, $l \geq d$ находится в общем положении в $\mathbb{R}^d$, если пересечение любых попарно разных d

гиперплоскостей из H есть точка, а пересечение любых $d + 1$ гиперплоскостей пусто.

Ниже мы приводим определение естественной решётки, введенное Чанг и Яо [3]:

Определение 1.5. Допустим, что множество $n + d$ гиперплоскостей $H = \{h_1, h_2, \dots, h_{n+d}\}$ находится в общем положении. Множество всех $N(n, d)$ точек пересечения каждой d гиперплоскостей из H называется естественной сетью степени n в $\mathbb{R}^d$ или короче NL_n .

Легко заметить, что каждая NL_n сеть удовлетворяет условиям GC_n и все гиперплоскости $h_i, i = 1, 2, \dots, n + d$ максимальные для нее. Более того, число $n + d$ есть максимальное количество максимальных гиперплоскостей для любого GC_n множества. Это вытекает из приведённого ниже Предложения 2.1.

Определение 1.6. Будем говорить, что GC_n множество $X \subset \mathbb{R}^d$ имеет дефект r или X есть r -сеть, если число максимальных гиперплоскостей X равно $n + d - r$.

Таким образом NL_n представляет собой 0-сеть. Используя указанное Предложение 2.1, можно доказать, что каждая 0-сеть натуральная. Поэтому сети NL_n характеризуются тем фактом, что они 0-сети.

Ниже мы описываем характеристику 1-сетей в $\mathbb{R}^d$, которую мы дали в [8]. Мы начинаем с естественной сети степени $n - 1$, т.е. с точек пересечения $n + d - 1$ максимальных гиперплоскостей. Мы назовем эти узлы черными. Далее мы добавляем $\binom{n+d-1}{d-1}$ произвольных узлов по одной на прямой пересечения каждой $d - 1$ гиперплоскостей и назовем эти узлы белыми. Мы ставим условие: все белые точки не содержатся в одной гиперплоскости. В противном случае мы получили бы 0-сеть.

2. ПРИМЕР GC_2 множества в $\mathbb{R}^d$ с d МАКСИМАЛЬНЫМИ ГИПЕРПЛОСКОСТЯМИ

Приведем некоторые начальные сведения. Начнем с результата полученного Карникер и Гаска в [7].

Теорема 2.1. Если каждое GC_n множество в $\mathbb{R}^2$ имеет максимальную прямую, то оно имеет не менее трех максимальных прямых.

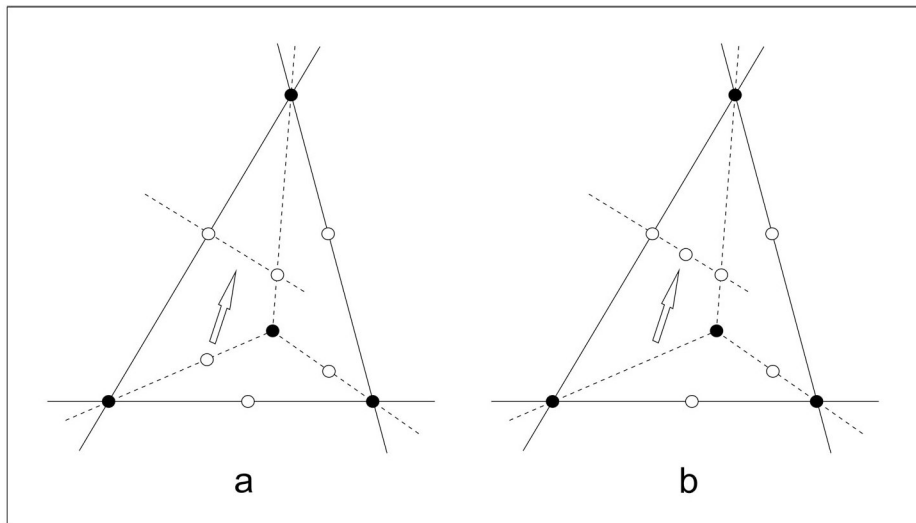


Рис. 1. GC_2 множества с 4-мя и 3-мя максимальными плоскостями.

В [1] С. Боор обобщая этот результат сформулировал гипотезу:

Гипотеза 2.1. Каждое GC_n множество в $\mathbb{R}^d$, имеющее максимальную гиперплоскость, имеет не менее $d + 1$ максимальных гиперплоскостей.

В той же работе С. Боор приводит контрпример: GC_2 множество в $\mathbb{R}^3$ с тремя максимальными плоскостями, таким образом, опровергнув гипотезу 2.1 в случае $d = 3$. Он начинает построение контрпримера с 1-сетью степени 2 в $\mathbb{R}^3$ с четырьмя максимальными плоскостями. Далее, он уменьшает количество узлов на одной из максимальных плоскостей на единицу удаляя из нее одну белую точку, тем самым сделав ее не максимальной (см. Рис. 1). Ниже мы приводим обобщение этого примера для $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 4$), точнее, мы приводим способ получения GC_2 множества с d максимальными гиперплоскостями из GC_2 множества с $d + 1$ максималами, тем самым опровергнув Гипотезу 2.1 в общем случае.

В дальнейшем нам необходимы следующие результаты, доказанные в [8].

Предложение 2.1. Максимальные гиперплоскости каждого GC_n множества X находятся в общем положении, более того, пересечение любых k из них представляет собой максимальную $(d - k)$ -плоскость для X , ($k = 1, 2, \dots, d + 1$).

Предложение 2.2. k -плоскость $h\{k\}$ максимальна для GC_n множества $\mathcal{X}$ тогда и только тогда, когда каждый узел $x \in \mathcal{X} \setminus h\{k\}$ использует гиперплоскость содержащую $h\{k\}$.

В частности, если $k = d - 1$, то имеют место следующие результаты.

Следствие 2.1. Гиперплоскость h максимальна для GC_n множества, или более общо, для любого Π_n^d -точного множества $\mathcal{X}$ тогда и только тогда, когда каждый узел $x \in \mathcal{X} \setminus h$ использует h (фундаментальный многочлен узла x имеет линейный фактор h).

Следствие 2.2. Каждый многочлен степени n принимающий значение 0 во всех узлах максимальной гиперплоскости h Π_n^d -точного множества $\mathcal{X}$ имеет линейный множитель h .

Предложение 2.3. (см. [8]). Пусть гиперплоскости $h_1, h_2, \dots, h_d$ находятся в общем положении в $\mathbb{R}^d$. Тогда линии пересечения (1-плоскости)

$$l_i = \bigcap_{j=1, j \neq i}^d h_j, \quad i = 1, 2, \dots, d$$

этих гиперплоскостей не содержатся в одной гиперплоскости.

Предложение 2.4. (см. [8]). Пусть $h\{k\}$ максимальная k -плоскость GC_n множества $\mathcal{X}$ в $\mathbb{R}^d$. Тогда множество $\mathcal{X} \cap h\{k\}$ есть GC_n множество в $h\{k\}$.

Вернемся к построению контрпримера. Мы начнем с 1-сети $\mathcal{X}$ степени 2 в $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 3$). Обозначим через $H = \{h_0, h_1, \dots, h_d\}$ множество максимальных гиперплоскостей этой 1-сети.

Предложение 2.5. Пусть $\mathcal{X}$ Π_2^d -точное множество, и существует максимальная гиперплоскость h , не содержащая A . Тогда фундаментальный многочлен узла $A \in \mathcal{X}$ представляется в виде произведения линейных множителей.

Доказательство. Легко заметить, что $\#\mathcal{X} \setminus h = d$. Обозначив через h' гиперплоскость содержащую эти узлы, получим, что многочлен $P = hh'$ фундаментальный для A . Действительно, $P(x) = 0, \forall x \in \mathcal{X} \setminus A$. С другой стороны, $\mathcal{X}$, $P(A) \neq 0$ в силу точности. $\square$

В силу Предложения 2.1 максимальные гиперплоскости находятся в общем положении. Следовательно, пересечение любых $(d - 2)$ из них представляет собой

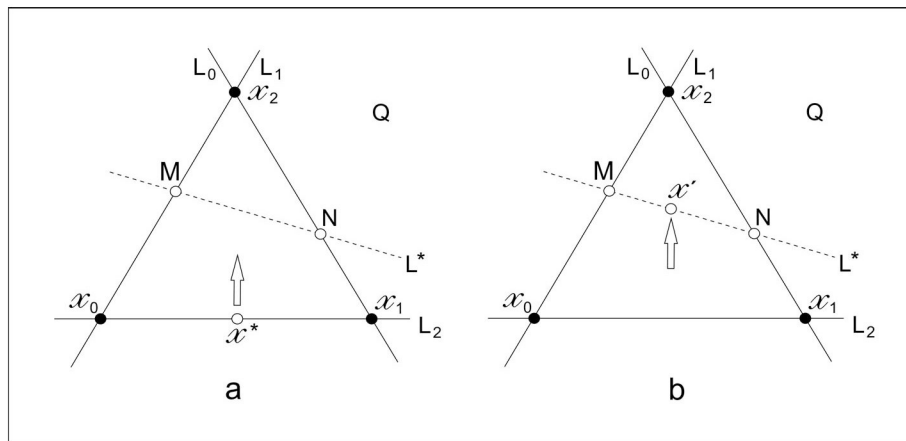


РИС. 2. Максимальная 2-плоскость.

максимальную плоскость (2-плоскость). Пусть пересечение

$$Q := \bigcap_{i=3}^d h_i$$

есть максимальная плоскость изображенная на Рис. 2 и

$$L_j := h_j \bigcap Q, \quad j = 0, 1, 2$$

есть линии пересечения в Q . Обозначим точки пересечения через

$$x_k := \bigcap_{i=0, i \neq k}^d h_i \quad j = 0, 1, \dots, d.$$

В силу Следствия 2.1, узел x_2 использует максимальную гиперплоскость h_2 . Другой гиперплоскостью используемой им и обозначенной через h^* , является гиперплоскость, содержащая остальные d белые узлы. Очевидно h^* содержит прямую L^* и, в силу точности множества узлов, не содержит x_2 .

Предложение 2.6. *Может существовать только одна гиперплоскость содержащая $\binom{d+1}{2} - 1$ узлов множества X . Если такая гиперплоскость существует, то все содержащиеся в ней узлы белые.*

Доказательство. Первая часть утверждения вытекает из второй. Действительно, количество всех белых узлов равно $M := \binom{d+1}{2}$. Предположим, что существуют две разные гиперплоскости h_1 и h_2 содержащие по $M - 1$ белых узлов. Очевидно, в этом случае их пересечение содержит по крайней мере $M - 2$ узлов.

С другой стороны, это пересечение или пусто, или представляет собой $(d-2)$ -плоскость (см. [8], Предложение 1.1), следовательно, ввиду [8, Лемма 2.1], оно может содержать не более $\binom{d}{2} = M - d$ узлов, что и является противоречием в рассматриваемом нами случае $d \geq 3$.

Таким образом, остается убедиться, что если гиперплоскость h содержит ровно $M-1$ узлов, то они все белые. Предположим, что гиперплоскость h содержит $r \geq 0$ черных узлов. Поскольку h не является максимальным, можно рассматривать только случай $r < d$. Получаем, $0 \leq r \leq d-1$. При этом $d+1-r$ черные узлы не содержатся в h . Очевидно, h не содержит те белые узлы, которые лежат на прямых, соединяющих два черных узла, один из которых принадлежит h , а другой нет. Количество этих белых узлов равно $r(d+1-r)$. Получаем, что h может содержать не более

$$\varphi(r) = \binom{d+2}{2} - (d+1-r) - r(d+1-r) = \binom{d+2}{2} - (r+1)(d+1-r), \quad r = 0, 1, \dots, d-1$$

узлов. Имеем

$$\varphi(0) = \varphi(d) = M,$$

$$\varphi(1) = \varphi(d-1) = M - d + 1.$$

Так как $\varphi(r)$ квадратная форма от r , то ее максимальное значение для $r \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ равно M . Таким образом, значение $r = 0$ – единственное, для которого h может содержать $M-1$ узлов. Что и означает, что все узлы белые. $\square$

Заметим, что мы доказали больше, чем утверждает вторая часть Предложения 2.6. Если гиперплоскость h содержит по крайней мере $M-d+2$ узлов, то все узлы белые.

Чтобы из $\mathcal{X}$ получить множество GC_2 с d максимальными гиперплоскостями, мы перемещаем узел x^* прямой L_2 на прямую L^* (см. Рис. 2). Обозначим полученное множество через $\mathcal{X}'$. Отметим, что если h^* содержит $\binom{d+1}{2} - 1$ белых узлов, то после перемещения она становится максимальной и мы получаем, что $\mathcal{X}'$ имеет $d+1$ максимальных гиперплоскостей. В силу Предложения 2.6, избежать этого можно передвижением другого белого узла из Q (или $\mathcal{X}$) на соответствующую прямую.

Таким образом, не теряя общности, мы можем предположить, что h^* содержит не более чем $\binom{d+1}{2} - 2$ узла и поэтому после перемещения одного из белых узлов h^* не становится максимальной.

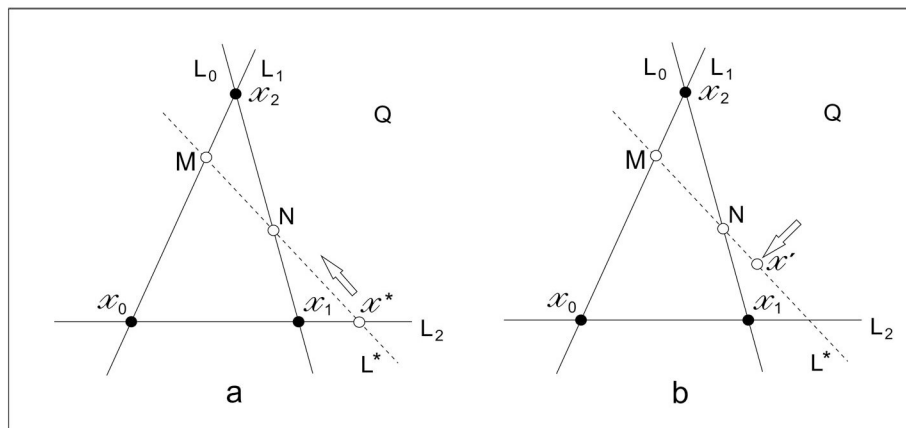


Рис. 3

Отметим еще, что если узлы плоскости Q формируют не 1-сеть, а 0-сеть, то мы можем перемещать узел x^* вдоль прямой L^* так, что x' не будет лежать на L_2 (см. Рис. 3).

Предложение 2.7. *Множество $\mathcal{X}'$ является CG_2 множеством.*

Доказательство. Сперва покажем, что множество $\mathcal{X}'$ Π_2^d -точно. Действительно, гиперплоскости h_0 и h_1 максимальны, поэтому каждый многочлен степени два, принимающий значение 0 на всем множестве $\mathcal{X}'$, имеет представление $p = \gamma h_0 h_1$ при некоторой постоянной γ . Перемещенный узел $\mathcal{X}'$ не лежит ни на одном из этих двух гиперплоскостей. Таким образом, p принимает значение 0 и в точке x' , что означает $\gamma = 0$ и поэтому $p = 0$.

Теперь покажем, что множество $\mathcal{X}'$ удовлетворяет условиям GC_2 множеств. Гиперплоскости $\{h_i; i = \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{2\}\}$ максимальны для $\mathcal{X}'$. Ввиду Следствия 2.1, узлы не лежащие на одной из этих гиперплоскостей используют ее. Следовательно, в силу Предложения 2.5, эти узлы имеют фундаментальные многочлены, которые представляются в виде произведения линейных множителей. Узел x_2 является пересечением всех этих гиперплоскостей. Следовательно, все остальные узлы используют по крайней мере одну максимальную гиперплоскость. Фундаментальный многочлен узла x_2 в $\mathcal{X}'$ совпадает с его фундаментальным многочленом в $\mathcal{X}$, поскольку мы переместили узел из одной используемой x_2 гиперплоскостью на другую. Следовательно и фундаментальный многочлен узла

x_2 представляется в виде произведения линейных множителей. Следовательно, X' есть GC_2 множество. $\square$

Отметим, что в силу Предложения 2.2 фундаментальные многочлены узлов не содержащихся в Q не изменяются, поскольку после перемещения Q остается максимальной.

Отметим еще, что после перемещения гиперплоскость h_2 больше не является максимальной. Таким образом, мы получили следующее утверждение:

Множество X' удовлетворяет условиям GC_2 в $\mathbb{R}^d$ и имеет только d максимальных гиперплоскостей: $\{h_i; i = \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{2\}\}$. Предложением 2.6 мы предотвратили появление новой максимальной гиперплоскости.

3. ПРИМЕР МНОЖЕСТВА GC_2 В $\mathbb{R}^4$ С ТРЕМЯ МАКСИМАЛЬНЫМИ ГИПЕРПЛОСКОСТЯМИ

Начнем с определений Δ_2 и Δ_3 структур (см. [9]).

Определение 3.1. Будем говорить, что шесть узлов в $\mathbb{R}^2$ формируют Δ_2 -структуру, если три из них являются вершинами треугольника, а остальные три лежат по одному на прямых содержащих стороны этого треугольника (см. Рис. 2, а)).

Определение 3.2. Будем говорить, что десять узлов в $\mathbb{R}^3$ формируют Δ_3 -структуру, если четыре из них являются вершинами пирамиды, а остальные шесть лежат по одному на прямых содержащих стороны пирамиды (см. Рис. 1, а)).

В силу [9] Утверждения 3.3, каждое GC_2 множество в $\mathbb{R}^2$ формирует Δ_2 -структуру. А в силу [8, Теорема 4.1 и Утверждение 3.1], каждое GC_2 множество в $\mathbb{R}^3$ с 4 или 5 максимальными гиперплоскостями (0 или 1-сеть) формирует Δ_3 -структуру.

Возьмем 1-сеть второй степени X в $\mathbb{R}^4$. Она имеет 5 максимальных гиперплоскостей (3-плоскостей). Узлы, принадлежащие каждой из этих максимальных гиперплоскостей, формируют Δ_3 -структуру. Ввиду Предложения 2.1, каждые две из этих 5-и максимальных гиперплоскостей имеют общую максимальную 2-плоскость, т.е., Δ_2 -структуру. Указанное выше множество изображено на Рис. 4 а), где черные узлы множества X обозначены через A, B, C, D и E . Обозначим максимальные гиперплоскости формирующие Δ_3 -структуры через $H_1 := ABCD, H_2 := ABCE, H_3 := ABDE, H_4 := ACDE, H_5 := BCDE$.

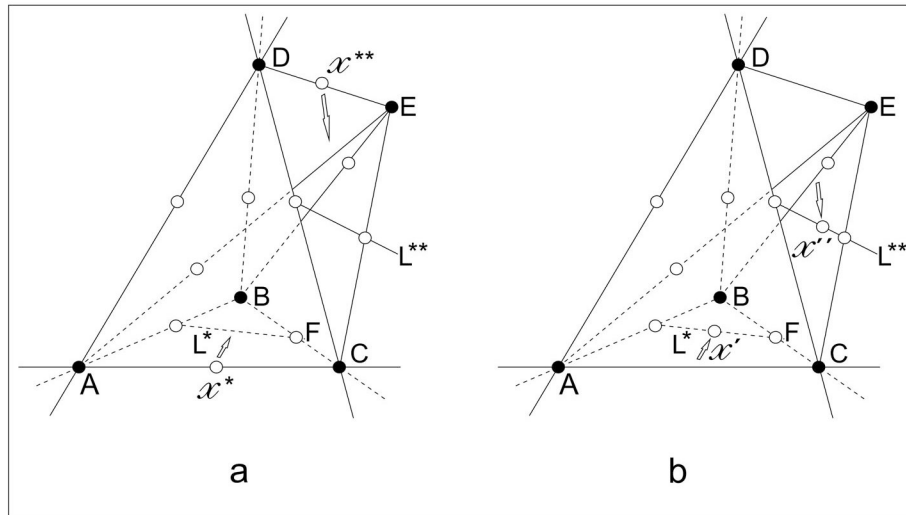


Рис. 4

Чтобы получить множество GC_2 с тремя максимальными гиперплоскостями, мы перемещаем два белых узла следующим образом. Первое перемещение мы делаем внутри максимальной плоскости ABC , где мы перемещаем белый узел x^* лежащий на прямой AC на прямую L^* , проходящую через оставшиеся два белых узла этой плоскости. Второе перемещение мы делаем внутри плоскости CDE . Мы перемещаем белый узел x^{**} , лежащий на прямой DE на прямую L^{**} , проходящую через оставшиеся два белых узла плоскости CDE . Полученное множество $\mathcal{X}'$ изображено на Рис. 4 b). Легко заметить, что гиперплоскости H_3 и H_4 содержат по 9 узлов и являются максимальными. В самом деле, достаточно отметить два обстоятельства. Первое: $x', x'' \notin H_3$, поскольку, в противном случае, если $x' \in H_3$ или $x'' \in H_3$, то H_3 contained бы ABC или CDE соответственно. Следовательно, $C \in H_3$ в обоих случаях, что является противоречием. Второе обстоятельство: $x' \notin H_4$, так как в противном случае H_4 contained бы плоскость ABC , следовательно $B \in H_4$, что является противоречием.

Заметим, что мы можем предполагать, что после перемещений не возникает новая максимальная гиперплоскость. Действительно, в силу Предложения 2.6, новая максимальная гиперплоскость может возникнуть как после только одного перемещения, так и только после двух. В первом случае, как мы видели в Предложении 2.6, второе перемещение не приводит к возникновению максимальной

плоскости, следовательно, нужно менять только первое перемещение. Если первое перемещение происходит на плоскости ABC , то мы можем рассматривать перемещение точки F на соответствующую прямую (см. Рис. 4), а если оно происходит на плоскости CDE , то можно рассматривать перемещение любого другого белого узла этой плоскости на соответствующей прямой. Каждый из этих двух решений проблемы решает проблему так же и во втором случае.

Следующий результат улучшает результат, полученный в §2, уменьшая количество максимальных гиперплоскостей множества GC_2 на два.

Предложение 3.1. *Множество $\mathcal{X}'$ является GC_2 множеством.*

Доказательство. Покажем, что множество $\mathcal{X}'$ P_2^4 -точна. Гиперплоскости H_1 и H_2 максимальны, поэтому, ввиду Следствия 2.2, каждый многочлен второй степени p , принимающий значение 0 во всех точках множества $\mathcal{X}'$ имеет представление $p = \gamma H_1 H_2$, где γ – некоторая постоянная. Узел x'' не содержится ни в одном из этих двух гиперплоскостей. Следовательно, $p(x'') = 0$ означает, что $\gamma = 0$ и соответственно $p = 0$.

Теперь проверим, что $\mathcal{X}'$ является GC_2 множеством. Гиперплоскости H_1, H_2 и H_5 максимальны для $\mathcal{X}'$. В силу Следствия 2.1 и Предложения 2.5, узлы, не лежащие на одной из этих гиперплоскостей, используют ее, следовательно, имеют фундаментальные многочлены, представляемые в виде произведения линейных множителей. Таким образом, остается проверить условия GC_2 множества для узлов B, C и F , которые принадлежат линии пересечения вышеуказанных трех максимальных гиперплоскостей. Наконец, узлы B, C и F используют гиперплоскости H_4, H_3 и H_3 , соответственно, и гиперплоскость содержащая остальные 5 узлов. Заметим, что такая гиперплоскость существует, так как три из пяти узлов во всех случаях лежат на одной прямой. $\square$

4. РЕЗУЛЬТАТ КАСАЮЩИЙСЯ ГИПОТЕЗЫ

В этой главе мы воспользуемся результатом полученным Г. Ктрыном в [9].

Теорема 4.1. *Каждое GC_2 множество в $\mathbb{R}^3$ имеет по крайней мере три максимальные плоскости.*

Как мы видели в параграфах 2 и 3, Гипотеза 2.1 не верна в $\mathbb{R}^d$, более того, мы уменьшили количество максимальных гиперплоскостей на два для $\mathbb{R}^4$. С

другой стороны, легко заметить, что в этих случаях рассмотренные перемещения белых узлов не меняют минимальное количество максимальных прямых (1-плоскостей). Имеет место следующая гипотеза, составленная совместно с А. Акопяном на основании Теоремы 2.1.

Гипотеза 4.1. *Каждое GC_n множество в $\mathbb{R}^d$ имеет по крайней мере $\binom{d+1}{d-1}$ максимальных прямых.*

Ввиду Теоремы 2.1, в случае $d = 2$ Гипотеза 4.1 совпадает с Гипотезой - GM . Очевидно Гипотеза 4.1 верна для GC_1 множеств в $\mathbb{R}^3$. Как мы показали в [5], Гипотеза - GM_3 верна в $\mathbb{R}^3$ для GC_2 множеств. Ниже мы доказываем, что Гипотеза 4.1 так же имеет место для этих множеств.

Теорема 4.2. *Гипотеза 4.1 верна для GC_2 множеств в $\mathbb{R}^3$.*

Доказательство. В силу Теоремы 4.1, каждое GC_2 множество имеет по крайней мере 3 максимальных плоскости. Обозначим их через h_1, h_2, h_3 . Ввиду Предложения 2.1, пересечение любых двух максимальных плоскостей является максимальной прямой, т.е., прямой содержащей три узла. Обозначим эти прямые через

$$l_1 := h_2 \cap h_3, \quad l_2 := h_1 \cap h_3, \quad l_3 := h_1 \cap h_2.$$

Таким образом, плоскость h_i содержит максимальные прямые l_j и l_k , где $i, j, k = 1, 2, 3$, $i \neq j$, $i \neq k$. В силу Предложения 2.4 множество узлов каждой максимальной плоскости является GC_n множеством на плоскости. Следовательно, ввиду Теоремы 2.1, каждая максимальная плоскость содержит по крайней мере еще одну максимальную прямую, которая не содержится в других максимальных плоскостях. Получаем, что количество максимальных прямых не менее шести. $\square$

Автор выражает свою благодарность профессору Акопу Акопяну за полезные дискуссии по теме этой работы.

Abstract. The paper gives a generalization of the counterexample of C. de Boer on $\mathbb{R}^d$ and provides an example of GC_2 set in $\mathbb{R}^4$ with three maximal hyperplanes. Also, a conjecture on the number of maximal lines of GC_n sets in $\mathbb{R}^d$ is discussed and proved that it is true in the case when $n = 2$, $d = 3$.

А. АПОЗЯН

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] C. de Boor, “Multivariate polynomial interpolation: Conjectures concerning GC-sets”, Numer. Alg., **45**, 113 – 125 (2007).
- [2] M. Gasca and J. I. Maeztu, “On Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^k$ ”, Numer. Math., **39**, 1 – 14 (1982).
- [3] K. C. Chung and T.H. Yao, “On lattices admitting unique Lagrange representations”, SIAM J. Numer. Anal., **14**, 735 – 743 (1977).
- [4] C. de Boor, “Multivariate polynomial interpolation: Aitken-Neville sets and generalized principal lattices”, Journal of Approximation Theory, **161**(1), 411 – 420 (2009).
- [5] A. Apozyan, G. Avagyan and G. Ktryan, “On the Gasca-Maeztu conjecture in $\mathbb{R}^3$ ”, East Journal on Approximations, **16**(1), 25 – 33 (2010).
- [6] J. M. Carnicer and M. Gasca, “Planar Configurations with Simple Lagrange Interpolation Formula”, Mathematical Methods in CAGD, Oslo, 55 – 62 (2001).
- [7] J. M. Carnicer and M. Gasca, “On Chung and Yao’s geometric characterization for bivariate polynomial interpolation”, Curve and Surface Design, Saint-Malo, 11 – 30 (2002).
- [8] A. Apozyan, “ GC_n sets in $\mathbb{R}^d$ with $n + d - 1$ maximal hyperplanes”, East J. Approx., **16**, no. 3, 235 – 246 (2010).
- [9] G. Ktryan, “On the number of maximal planes of GC_2 sets in $\mathbb{R}^3$ ”, Jaen J. Approx, **2**(1), 129 – 143 (2010).

Поступила 1 декабря 2010