

ОПТИМАЛЬНО РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ МЕРОМОРФНЫМИ ФУНКЦИЯМИ В ПОЛОСЕ

С. Г. АЛЕКСАНИЯН

Институт Математики НАН Армении
E-mail: *asargis@instmath.sci.am*

Аннотация. Пусть функция f непрерывна в замкнутой полосе S_h и голоморфна в ее внутренности. Исследуется задача оптимально равномерного приближения f на S_h мероморфными функциями g . Рост функций g оценивается в терминах их неванлиневской характеристики $T(r, g)$. Этот рост зависит от роста функции f в данной полосе и от ее дифференциальных свойств на границе. При этом рассматривается возможное расположение полюсов g на комплексной плоскости.

MSC2000 number: 30E10, 30Dxx.

Ключевые слова: Равномерные приближения, полоса, мероморфные функции.

1. ВВЕДЕНИЕ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Задача оптимально равномерного приближения на вещественной оси $\mathbb{R}$ мероморфными функциями исследовалась в работе [1] Н. Аракелян и Р. Аветисяном. Здесь рассматривается задача оптимально равномерного приближения в замкнутой полосе мероморфными функциями. Целью этой работы является конструирование мероморфных функций, аппроксимирующих заданную функцию f в полосе и при этом имеют возможно медленный рост на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (в терминах их неванлиневской характеристики). Очевидно, что приближаемая функция f должна быть голоморфной во внутренности данной полосы. Здесь мы улучшаем и одновременно уточняем результаты, полученные в работе [2]. Аналогичная задача о равномерном приближении *целыми* функциями исследовалась в [3].

В этой работе мы вводим классы мероморфных функций, которые иллюстрируют возможность оптимально равномерного приближения данной функции мероморфными функциями в полосе. Такие классы рассмотрены также в работе [2], но полученные здесь результаты более точные, так как в некотором смысле они обратимые.

Работа состоит из двух параграфов. Первый из них содержит введение и вспомогательные сведения, а второй - основные результаты и их доказательства.

1.1. Обозначения и определения. *Замыкание, внутренность и границу* множества $E \subset \mathbb{C}$ обозначим соответственно через $\overline{E}$, E° и ∂E .

Положим также

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^+ &:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}; \\ D_r(a) &:= \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\} \text{ для } a \in \mathbb{C}, r > 0 - \text{открытый круг, } D_r = D_r(0); \\ S_h &:= \mathbb{R} \times [-h, h] \text{ для } h > 0 - \text{полоса}; \\ \Delta_\alpha &:= \{\zeta \in \mathbb{C} : |\arg \zeta| \leq \alpha/2\} \text{ для } \alpha \in (0, 2\pi) - \text{угол}; \\ \Delta_\alpha(\beta) &:= \{\zeta \in \mathbb{C} : |\arg \zeta - \beta| \leq \alpha/2\} \text{ для } \alpha, \beta \in (0, 2\pi); \\ \Delta_\alpha(\beta, a) &:= \{\zeta \in \mathbb{C} : (\zeta - a) \in \Delta_\alpha(\beta)\} \text{ для } a \in \mathbb{C} - \text{угол с вершиной } a; \\ \Omega_h^\alpha &:= \mathbb{C} \setminus (\Delta_{\pi-\alpha}(-\pi/2, -2ih)^\circ \cup \Delta_{\pi-\alpha}(\pi/2, 2ih)^\circ) \cup S_{2h} \text{ для } h > 0; \\ \Omega_{h,r}^\alpha &:= \Omega_h^\alpha \cap \overline{D}_r \text{ для } h > 0, r > 0.\end{aligned}$$

Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{C}$ и E относительно замкнутое множество в Ω . Для класса $C(E)$ непрерывных функций $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ рассмотрим равномерную норму

$$\|f\|_E = \sup_{z \in E} |f(z)|$$

и положим

$$\begin{aligned}M_f(r) &= M_f(r, E) := \|f\|_{E \cap D_r}, \\ C_b(E) &:= \{f \in C(E) : \|f\|_E < +\infty\}.\end{aligned}$$

Пусть $C^p(\Omega)$ – класс p -раз непрерывно дифференцируемых (в смысле $\mathbb{R}^2$) комплексных функций на Ω . Для жордановой области D с положительно ориентированной кусочно гладкой границей и C^1 -функции u в окрестности $\overline{D}$, следующая формула является комплексной версией известной теоремы о дивергенции:

$$(1.1) \quad \int_{\partial D} u(z) dz = i \int_D 2\bar{\partial} u d\sigma,$$

где σ – плоская мера Лебега на D и

$$(1.2) \quad 2\bar{\partial} u = \partial_1 u + \partial_2 u.$$

Как обычно, обозначим через $H(\Omega)$ класс голоморфных функций в Ω , так что условие $f \in H(\Omega)$ означает, что $f \in C^1(\Omega)$ и $\bar{\partial} f \equiv 0$ в Ω . Для относительно замкнутого множества $E \subset \Omega$ положим

$$A(E) = C(E) \cap H(E^\circ) \quad \text{и} \quad A_b(E) = C_b(E) \cap H(E^\circ).$$

Пусть $A'(E)$ и $A''(E)$ классы функций $E \rightarrow \mathbb{C}$, которые соответственно один и два раза непрерывно дифференцируемы на E в смысле $\mathbb{C}$.

Мы будем использовать функцию Р. Неванлины $\log^+ : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, определяемую формулой:

$$\log^+ x = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ \log x, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

Очевидно, $\log^+$ неотрицательная и неубывающая функция на $\mathbb{R}^+$. Пусть $T(r, g)$ неванлиновская характеристика мероморфной функции g , $g(0) \neq \infty$:

$$T(r, g) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \ln^+ |g(re^{i\theta})| d\theta + \int_0^r n(t, g) t^{-1} dt,$$

где $n(t, g)$ число *полюсов* g в D_t (с учетом их кратностей).

1.2. Приближение на S_h функциями из $A(\Omega_h^\alpha)$. В этом пункте мы построим голоморфные функции $F \in A(\Omega_h^\alpha)$, которые аппроксимируют функцию f в полосе S_h и имеют возможно медленный рост на Ω_h^α . Сначала докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма 1.1. Пусть $0 < 2h < \pi$ и $\alpha \in (0, \pi)$. Тогда существует функция $q(\zeta, z)$, такая что

$$(1.3) \quad q(\zeta, \zeta) \equiv 1 \quad \text{для } \zeta \in \Omega_h^\alpha$$

и $q(\zeta, z)$ удовлетворяет неравенству

$$(1.4) \quad |q(\zeta, z)| \leq k \left(|\ln(|\xi| + 1) - \ln(|z| + 1)|^2 + 1 \right)^{-1},$$

где $\zeta = \xi + i\eta$ и $k = k(h, \alpha) > 0$.

Доказательство. Пусть

$$z = G(w) = \frac{1}{2}(e^w - e^{-w})$$

конформное отображение полосы $S_{\pi/2}$ на

$$\Lambda = \mathbb{C} \setminus \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \zeta = 0 \text{ и } |\operatorname{Im} \zeta| \geq 1\}$$

Представляя $z = x + iy = G(u + iv)$ получим

$$x = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) \cos v \quad \text{и} \quad y = (e^u + e^{-u}) \sin v.$$

Для $\alpha \in (0, \pi)$ существует постоянная $h = h(\beta) \in (0, \pi/2)$ ($\alpha = \pi - \beta$), такая что $G^{-1}(\Delta_\beta \cup \Delta_\beta(\pi)) \subset S_h$. Искомую функцию можно определить формулой:

$$(1.5) \quad q(\zeta, z) = 25 \left((G^{-1}(\zeta) - G^{-1}(z))^2 + 25 \right)^{-1} \quad \text{для } z \in \Omega_h^\alpha \text{ и } \zeta \in \Omega_h^\alpha \setminus S_h.$$

Из (1.5) следует $q(\zeta, \zeta) = 1$ для $\zeta \in \Omega_h^\alpha \setminus S_h$. Очевидно, что $q(\zeta, \cdot) \in H(\Omega_h^\alpha)$ для фиксированного $\zeta \in \Omega_h^\alpha$. Теперь мы должны оценить рост функции $q(\zeta, z)$ для $\zeta \in \Omega_h^\alpha \setminus S_h^o$ и $z \in \Omega_h^\alpha$. Учитывая, что $G^{-1}(\zeta) \leq \ln(|\zeta| + 1) + 2$, из (1.5) получим

$$\begin{aligned} |q(\zeta, z)| &\leq \frac{25}{(\operatorname{Re} G^{-1}(\zeta) - \operatorname{Re} G^{-1}(z))^2 + 3} \leq \\ (1.6) \quad &\leq c((\ln(|\zeta| + 1) - \operatorname{Re} G^{-1}(z))^2 + 1)^{-1}, \end{aligned}$$

где $c = c(\alpha, h) > 0$.

Таким образом из (1.5)-(1.6) приходим к (1.3)-(1.4). $\square$

Следующая лемма улучшает и одновременно уточняет Лемму 1 работы [2].

Лемма 1.2. Пусть $f \in A''(S_h)$ и $\alpha \in (0, \pi/2)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $F \in A(\Omega_h^\alpha)$, такая что

$$(1.7) \quad \|f - F\|_{S_h} < \varepsilon,$$

$$(1.8) \quad M_f(r) < 3M_f(lr + h) + c\varepsilon \exp\{ca_{2r}\},$$

где

$$(1.9) \quad a_r(f) = 1 + \frac{c}{\varepsilon} \max_{|z| \leq lr+h} \{|z| |f''_\partial(z)| + |z| |f'_\partial(z)|\}$$

для $l = 1 + \tan(\alpha/2) > 1$, f_∂ сужение f на ∂S_h и $c = c(h, \alpha) > 0$ – постоянная, зависящая лишь от α и h .

Доказательство. Заменяя f на $\varepsilon^{-1}f$ и F на $\varepsilon^{-1}F$, можем свести доказательство к случаю $\varepsilon = 1$. Мы докажем лемму для случая $2h < \pi$; если $2h \geq \pi$, то выберем $n = n(h) > 0$ так, чтобы $2h/n < \pi$ и как легко видеть доказательство сведется к рассматриваемому случаю.

Продолжим f как в Лемме 5 из [3]: пусть $f_*(\zeta) = f(\zeta)$ для $\zeta \in S_h$ и

$$(1.10) \quad f_*(\zeta) := if(\xi + \eta - h\sigma_\eta + ih\sigma_\eta) + (1 - i)f(\xi + ih\sigma_\eta), \quad \zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C} \setminus S_h,$$

где σ_η функция знака, то есть $\sigma_0 = 0$ и $\sigma_\eta = \eta/|\eta|$ для $\eta \neq 0$. Из (1.10) следует, что $f_* \in C^1(\mathbb{C})$. Рост функции f_* на Ω_h^α согласно (1.10) удовлетворяет неравенству

$$(1.11) \quad M_{f_*}(r, \Omega_h^\alpha) \leq 3M_f(lr + h, S_h) \quad \text{для } r \geq 0.$$

Из (1.10) следует также $\bar{\partial}f_*(\zeta) = 0$ для $\zeta \in S_h$. При этом из (1.2) и (1.10) имеем

$$(1.12) \quad 2\bar{\partial}f_*(\zeta) = (1 - i)[f'(\xi + \eta - h\sigma_\eta + ih\sigma_\eta) - f'(\xi + ih\sigma_\eta)]$$

для $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C} \setminus S_h$. Очевидно, что $f_* \in C''(\Omega_h^\alpha)$ и из (1.12) получим оценку

$$(1.13) \quad |\bar{\partial}f_*(\zeta)| \leq (|\eta| - h)M_{f'}(l|\xi| + h, \partial S_h) \quad \text{для } \zeta \in \Omega_h^\alpha \setminus S_h.$$

Следующее неравенство следует из (1.9) и (1.13):

$$(1.14) \quad |(\bar{\partial} f_*)(\zeta)| \leq c(|\eta| - h) a_{|\xi|} / |\xi| \quad \text{для } \zeta = \xi + i\eta \in \Omega_h^\alpha,$$

где $c = c(\alpha, h) > 0$.

Теперь перейдем к построению искомым функций. Пусть $\zeta \rightarrow n(|\zeta|) \in \mathbb{N}$ для $\zeta \in \partial\Omega_h^\alpha$ - кусочно постоянная функция; фиксируем $n(|\zeta|)$ условием

$$(1.15) \quad 0 \leq a_{|\zeta|} - n(|\zeta|) < 1 \quad \text{для } \zeta \in \partial\Omega_h^\alpha.$$

Для $(\zeta, z) \in (\Omega_h^\alpha)^2$ определим функцию $Q_\zeta(z) = Q(\zeta, z) \in H(\Omega_h^\alpha)$, такую что $Q_\zeta(\zeta) = 1$ для $\zeta \in \Omega_h^\alpha$:

$$(1.16) \quad Q(\zeta, z) := \left(\frac{\zeta - \zeta_0}{z - \zeta_0} \right)^{n(|\zeta|)} \times q(\zeta, z),$$

где ζ_0 для ζ выберем так, что $\operatorname{Re} \zeta_0 = \operatorname{Re} \zeta$ для любого $\zeta \in \Omega_h^\alpha \setminus S_h$ и $2d(\zeta, \partial S_h) = d(\zeta_0, \partial S_h)$ для $\zeta \in \partial\Omega_h^\alpha$; в качестве $q(\zeta, z)$ возьмем функцию из Леммы 1.1, удовлетворяющую условиям (1.3) и (1.4).

Из формулы и теоремы Коши следует, что

$$(1.17) \quad \int_{\partial D} Q_\zeta(z) C_\zeta(z) dz = \begin{cases} -2\pi i, & \text{если } \zeta \in D \\ 0, & \text{если } \zeta \in \Omega_h^\alpha - \bar{D} \end{cases}$$

для любой жордановой области $D \subset \Omega_h^\alpha$ с кусочно гладкой, положительно ориентированной границей.

Теперь для $r > 0$ рассмотрим интегралы

$$(1.18) \quad I_r(z) = \pi^{-1} \int_{\Omega_{h,r}^\alpha \setminus S_h} G_\zeta(z) d\sigma_\zeta \quad \text{для } z \in \Omega_{h,r}^\alpha,$$

с подынтегральной функцией $G_\zeta(z) = (\bar{\partial} f_*)(\zeta) Q_\zeta(z) C_\zeta(z)$.

Введем функции $F_r \in C(\Omega_{h,r}^\alpha)$ следующим образом

$$(1.19) \quad F_r(z) = (\varphi f_*)(z) + I_r(z) \quad \text{для } z \in \Omega_{h,r}^\alpha.$$

Из (1.1), условия $\bar{\partial}\varphi = 0$ и теоремы Морера следует, что $F_r(z) \in H\left(\left(\Omega_{h,r}^\alpha\right)^o\right)$.

Очевидно также, что $F_r \in A(\Omega_{h,r}^\alpha)$ для любого $r > 0$.

Докажем, что при $r \rightarrow \infty$ интеграл I_r локально-равномерно сходится на Ω_h^α к несобственному интегралу

$$I_\infty(z) = \pi^{-1} \int_{\Omega_h^\alpha \setminus S_h} G_\zeta(z) d\sigma_\zeta \quad \text{для } z \in \Omega_h^\alpha.$$

Тогда в силу (1.19), искомую функцию $F \in A(\Omega_h^\alpha)$ можно определить формулой

$$(1.20) \quad F(z) := (f_*)(z) + I_\infty(z) \quad \text{для } z \in \Omega_h^\alpha.$$

Из определения (1.20) следует, что

$$(1.21) \quad \|f - F\|_{S_h} = \|I_\infty\|_{S_h},$$

$$(1.22) \quad |F(z)| \leq |(f_*)(z)| + |I_\infty(z)| \quad \text{для } z \in \Omega_h^\alpha,$$

так что приближение функции f на S_h функциями $F \in A(\Omega_h^\alpha)$ и оценка роста F на Ω_h^α сводится в этой схеме к оценке I_∞ .

Перейдем к доказательству локально-равномерной сходимости интеграла I_r (при $r \rightarrow \infty$) на Ω_h^α . Из (1.16) для $z \in \Omega_h^\alpha$ и $\zeta \in \Omega_h^\alpha \setminus S_h$ имеем оценку

$$(1.23) \quad |G_\zeta(z)| \leq \frac{|\bar{\partial} f_*(\zeta)|}{|\zeta - z|} \left[\frac{3h + 2|\xi|\delta - |\eta|}{2h + 2|\xi|\delta} \right]^{n(|\xi|)} \times |q(\zeta, z)|,$$

где $\delta = \tan(\alpha/2) > 0$.

Пусть $K \subset \Omega_h^\alpha$ - компактное множество. Существует $r_0 > \max\{1, h\}$, такое что $K \subset \bar{D}_{r_0}$ и $r'' > r' > 3r_0$. Отсюда следует, что $|\zeta - \zeta_0| < e|z - \zeta_0|$. Поскольку

$$(1.24) \quad \int_h^{h+|\xi|\delta} \left(\frac{3h + 2|\xi|\delta - |\eta|}{2h + 2|\xi|\delta} \right)^{n(|\xi|)} d|\xi| < \frac{h + |\xi|\delta}{n(|\xi|) + 1},$$

то с учетом (1.4) и (1.13) получим

$$(1.25) \quad |I_{r''}(z) - I_{r'}(z)| \leq c_1 \int_{r'-r_0}^{r''-r_0} \frac{1}{u(\ln u - \operatorname{Re} G^{-1}(z))^2} du < \\ < c_1 \left(\frac{1}{\ln(r' - r_0)} - \frac{1}{\ln(r'' - r_0)} \right) \rightarrow 0$$

равномерно по $z \in K$, при $r'', r' \rightarrow \infty$. Это доказывает абсолютную и локально-равномерную сходимость интеграла I_r для $z \in \Omega_h^\alpha$ и что $I_\infty \in A(\Omega_h^\alpha)$. Здесь и в дальнейшем через c_j , $j = 1, 2, \dots$ будем обозначать положительные постоянные, зависящие лишь от α и h .

Для доказательства (1.7) мы должны оценить $|I_\infty(z)|$ для $z \in S_h$. Представим интеграл $I_\infty(z)$ в виде суммы двух интегралов:

$$(1.26) \quad I_\infty(z) = \frac{1}{\pi} \int_{B(z)} G_\zeta(z) d\sigma_\zeta + \frac{1}{\pi} \int_{E \setminus B(z)} G_\zeta(z) d\sigma_\zeta = J_1(z) + J_2(z),$$

где $B(z) := \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta \in E \text{ и } |\zeta - z| \leq 2|z|\delta\}$.

Для $\zeta \in E \setminus B(z)$ следует, что $|\zeta - \zeta_0| \leq p|z - \zeta_0|$, где $p = p(\alpha, h) > 0$. Так, что из (1.23) - (1.26) получим

$$(1.27) \quad |J_2(z)| < \int_h^\infty \frac{1}{u \ln^2 u} du < c_2.$$

Пусть $z_0 \in \partial S_h$ такое, что $\text{dist}(z, z_0) = \text{dist}(z, \partial S_h) \geq 0$. Обозначим для $z \in S_h$ множество $C(z) = \{[z_0 - 1, z_0 + 1] \times \mathbb{R}\} \cap B(z)$. Из (1.23) - (1.24), учитывая также, что $|Q(\zeta, z)| \leq 1$, будем иметь

$$(1.28) \quad \int_{C(z)} |G_\zeta(z)| d\sigma_\zeta < c_4 \int_{|z_0|-1}^{|z_0|+1} du = 2c_4.$$

Так как $|\zeta - z| \leq |u - |z_0||$ для $\zeta \in B(z)/C(z)$, то получим

$$(1.29) \quad \int_{B(z)/C(z)} |G_\zeta(z)| d\sigma_\zeta < \int_{a|z|}^{b|z|} \frac{1}{|u - |z_0|| + 1} du < c_5,$$

где $a > 0$ и $b > 0$ постоянные зависящие лишь от α и h . Таким образом, суммируя (1.27) - (1.29), мы, по (1.26) и с учетом (1.11) и (1.20), приходим к оценке (1.7).

Пусть теперь $z \in \Omega_h^\alpha$. Представим $I_\infty(z)$ в виде суммы двух интегралов:

$$(1.30) \quad I_\infty(z) = \int_{D(z)} G_\zeta(z) d\sigma_\zeta + \int_{E \setminus D(z)} G_\zeta(z) d\sigma_\zeta = J_3(z) + J_4(z),$$

где $D(z) := \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta \in E \text{ и } |\zeta - z| \leq 3|z|\delta\}$. Второй интеграл оценивается как в (1.27).

Учитывая, что $ne^n < e^{2n}$ и

$$\int_{D(z)} \frac{1}{|\zeta - z|} d\sigma_\zeta < c_6 \sqrt{mesD(z)},$$

из (1.24) и неравенства $|\zeta| > \delta|z|$ получаем

$$(1.31) \quad J_3(z) < \exp\{c_7 n(3l|z| + h)\}.$$

Из (1.30) - (1.31), с учетом (1.11) и (1.20), мы приходим к требуемой оценке (1.8).

Лемма доказана. $\square$

Замечание 1.1. Если в Лемме 1.2 предположить, что $f \in A'(S_h)$, то в (1.9) величину $a_r(f)$ можно заменить на

$$a_r^*(f) = 1 + \frac{c}{\varepsilon} \max_{|z| \leq lr+h} \{|z| |f'_\partial(z)| \ln(|z| |f'_\partial(z)|)\}.$$

2. ОПТИМАЛЬНО МЕРОМОРФНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ПОЛОСЕ

Настоящий параграф посвящен вопросам о наилучших равномерных приближениях мероморфными функциями в полосе.

2.1. Мероморфное приближение в полосе. Процесс оптимально равномерного приближения в полосе мероморфными функциями реализуется двумя шагами: первый из них Лемма 1.2. Второй шаг это приближение функции $F \in A(\Omega_h^\alpha)$ на S_h мероморфными функциями, доказанное в [2].

Теорема 2.1. Для $F \in A(\Omega_h^\alpha)$, $\alpha \in (0, \pi/2)$, $p > 1$ и $\varepsilon > 0$, существует мероморфная функция G с полюсами на мнимой оси, такая что

$$(2.1) \quad |F(z) - G(z)| < \varepsilon \quad \text{для } z \in S_h$$

и

$$(2.2) \quad T(r, \varepsilon^{-1}G) < c \int_h^{pr} \int_h^t \log^+ \frac{M_F(\tau)}{\varepsilon} \frac{d\tau dt}{\tau t} + c \log^2(pr) \quad \text{для } r \geq 2h,$$

где $c = c(h, p, \alpha) > 0$ – постоянная, зависящая лишь от h , α и p .

Следующая теорема является аналогом Теоремы 1 работы [1] для полосы.

Теорема 2.2. Пусть $f \in A''(S_h)$, $\varepsilon > 0$ и $p > 1$. Тогда существует мероморфная функция g с полюсами на мнимой оси, такая что

$$(2.3) \quad |f(z) - g(z)| < \varepsilon \quad \text{для } z \in S_h,$$

$$(2.4) \quad T(r, \varepsilon^{-1}g) < k \int_h^{pr} \int_h^t \left[\frac{a_\tau(f)}{\varepsilon} + \frac{\log^+ M(\tau, f)}{\varepsilon} \right] \frac{d\tau dt}{\tau t} + k \log^2(pr),$$

для $r \geq 2h$, где $k = k(p, h) > 0$.

Доказательство. По Лемме 1.2 существует функция $F \in A(\Omega_h^\alpha)$, удовлетворяющая условиям (1.7)-(1.9). Применив к F Теорему 1.1, с учетом (1.8) и оценки

$$\log^+ \frac{M_F(r)}{\varepsilon} < c \left[1 + \frac{a_\tau(f)}{\varepsilon} + \log^+ \frac{M_f(\tau)}{\varepsilon} \right],$$

где $c = c(\alpha, h) > 0$, завершаем доказательство Теоремы 2.2. $\square$

2.2. Представление классов M^ρ . В работе [3] было показано, что если функция $f \in A_b''(S_h)$ и равномерно непрерывна на ∂S_h , то ее можно на S_h равномерно приблизить целыми функциями порядка 1 и нормального типа, и этот порядок нельзя уменьшить. С помощью теоремы 2.2 мы можем указать новые условия на граничные значения функции f , из которых следует, что f можно равномерно приблизить на S_h мероморфными функциями g порядка $\rho \in (0, 1)$.

Определение 2.1. Мероморфная функция g с полюсами на мнимой оси принадлежит классу M^ρ для $\rho \in (0, 1)$, если g ограничена на S_h и

$$T(r, g) = O(r^\rho) \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Теорема 2.3. Пусть $\nu(r) = r^\rho$ на $\mathbb{R}^+$ для $\rho \in (0, 1)$ и доопределим ν на $\mathbb{R}$ так, что $\nu(r) = -\nu(-r)$; положим $\mu(z) = \mu_0(x) + iy$ для $z = x + iy \in S_h$, где $\mu_0 = \nu^{-1}$ на $\mathbb{R}$. Если $f \in A_b''(S_h)$ и функции $(f \circ \mu)'$ и $(f \circ \mu)''$ ограничены на ∂S_h , то функцию f можно равномерно приблизить на S_h функциями из M^ρ .

Доказательство. По теореме 2.2 для любого $\varepsilon > 0$ существует мероморфная функция g с полюсами на мнимой оси, удовлетворяющая (2.3) и (2.4). Из условий теоремы следует, что $|(f \circ \mu)'| \leq M$ и $|(f \circ \mu)''| \leq M$ на ∂S_h .

Учитывая, что $\mu'(r) = 1/\nu'(r)$, получим $|zf'(z)| \leq M|z|^\rho$ для $z \in \partial S_h$. Из определения μ имеем, что $|f'(z)\mu''(z)| \leq M_0$; откуда следует, что $|zf''(z)| \leq M_1|z|^\rho$ для $z \in \partial S_h$. Таким образом, из определения $a_\tau(f)$ по (1.9) и из (2.4) получим $T(r, g) = O(r^\rho)$, при $r \rightarrow \infty$. $\square$

В случае вещественной оси аналогичный теореме 2.3 результат был обратимым (см. [1]). Для доказательства частичной обратимости теоремы 2.3 нам понадобятся следующие леммы из работы [1].

Лемма 2.1. Пусть мероморфная функция g не имеет полюсов в $\Delta_\alpha(\theta)$ для $\alpha, \theta \in (0, 2\pi)$. Тогда для произвольных чисел $p > 1$ и $\beta \in (0, \alpha)$ имеем оценку

$$(2.5) \quad \log^+ |g(z)| < cT(p|z|, g) \quad \text{при } z \in \Delta_{\alpha-\beta}(\theta),$$

где константа $c > 0$ зависит лишь от β и p .

Лемма 2.2. Пусть $g \in H(D_R)$ и $|g(\zeta)| \leq M$ для $\zeta \in D_R$ и $|g(t)| \leq 1$ для $-R < t < R$. Тогда

$$(2.6) \quad |g'(0)| < \frac{6}{R} (1 + \log^+ M).$$

Леммы 2.1 и 2.2 позволяют доказать для функций класса M^ρ следующий аналог Леммы 5 работы [1].

Лемма 2.3. Пусть $g \in M^\rho$, $\rho \in (0, 1)$. Тогда для $z \in \partial S_h$

$$(2.7) \quad \overline{\lim}_{|z| \rightarrow \infty} \frac{|g'(z)|}{\nu'(|z|)} < +\infty.$$

Доказательство. Пусть функция $g \in M^\rho$, тогда g не имеет полюсов в $\Delta_\alpha \cup \Delta_\alpha(\pi)$ для $\alpha \in (0, \pi)$. Применим к g и к углам Δ_α и $\Delta_\alpha(\pi)$ Лемму 2.1 при $p = 2$. Из (2.5) с учетом того, что $g \in M^\rho$, получаем

$$(2.8) \quad \log |g(z)| < c_1 \nu(|z|) \quad \text{для } z \in \Delta_\alpha \cup \Delta_\alpha(\pi).$$

Пусть $z \in \partial S_h$. Рассмотрим голоморфную функцию $g_z : g_z(\zeta) = g(z + \zeta)$ для $\zeta \in D_R$, где $R = |z|$. Из (2.8) следует, что

$$|g_z(\zeta)| \leq M = \exp\{c_1 \nu(2|z|)\} \quad \text{для } \zeta \in D_R.$$

Применяя к g_z Лемму 2.2, с учетом (2.6) получаем

$$|g'(z)| \leq \frac{6}{|z|} (1 + c_1 \nu(2|z|)) < c_2 \frac{\nu(|z|)}{|z|} < c_3 \nu'(|z|),$$

что доказывает оценку (2.7), так как $c_j = c_j(h, \rho) > 0$ для $j = \overline{1, 3}$. $\square$

Следующая теорема частично обращает теорему 2.3, то есть указывает необходимые условия на приближаемую функцию f , при которых возможно равномерное приближение функции f на S_h мероморфными функциями данного роста.

Теорема 2.4. Пусть $f \in A_b(S_h)$ допускает равномерное приближение на S_h функциями из класса M^ρ . Тогда композиция $f \circ \mu$ должна быть равномерно непрерывной на ∂S_h .

Доказательство. Из условий теоремы следует, что существует последовательность функций $\{g_n\}_1^\infty$, $g_n \in M^\rho$ такая, что $g_n \rightarrow f$ равномерно на S_h , при $n \rightarrow \infty$. Тогда $g_n \circ \mu \rightarrow f \circ \mu$ также равномерно на S_h . Если мы докажем, что $(g_n \circ \mu)'$ ограничена на ∂S_h , то $(f \circ \mu)'$ также будет ограничена на ∂S_h . Это означает, что $f \circ \mu$ равномерно непрерывна на ∂S_h . Из (2.7) следует, что для $z \in \partial S_h$ имеем

$$\overline{\lim}_{|z| \rightarrow \infty} |(g \circ \mu)'(z)| = \overline{\lim}_{|z| \rightarrow \infty} |\mu'(z) g'(\mu(z))| = \overline{\lim}_{|z| \rightarrow \infty} \frac{|g'(\mu(z))|}{\nu'(|\mu(z)|)} < \infty.$$

Это доказывает теорему. $\square$

Abstract. The paper studies the uniform approximation problem of functions f , which are continuous in a closed strip S_h and holomorphic in its interior. Such functions are approximated on S_h by meromorphic functions g , the growth of which is estimated in the terms of the Nevanlinna characteristic $T(r, g)$ and depends on the growth of f in the strip and the differential properties of f on the boundary of the strip. Also, the possible location of the poles of g in the complex plane is studied.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. А. Аветисян, Н. У. Аракелян, “Наилучшие приближения мероморфными функциями на вещественной оси”, Известия АН Арм.ССР, серия Математика, **25**, No 6, 534 – 548 (1990).
- [2] С. Г. Алексанян, “Равномерная и касательная аппроксимации на полосе мероморфными функциями имеющими оптимальный рост”, Известия НАН Армении, серия Математика, **43**, No 6, 6 – 19 (2008).
- [3] N. H. Arakelian, H. Shahgholian, “Uniform and tangential approximation on a strip by entire functions, having optimal growth”, Computational Methods and Function theory, **3**, No 1, 359 – 381 (2003).

Поступила 15 мая 2010