

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

В. Н. МАРГАРЯН, Г. Г. ТОНОЯН

Российско-Армянский (Славянский) университет
E-mail: jolisourire@yandex.ru

Аннотация. В работе найдены критерии для почти гипоеллиптических многочленов двух и трех переменных при которых $P(\xi) \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

MSC2000 number: 12E10, 26C05

Ключевые слова: Почти гипоеллиптичность, поведение многочленов на бесконечности.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: N -множество натуральных чисел, $N_0 = N \cup \{0\}$, N_0^n -множество n -мерных мультииндексов, $R^n(E^n)$ - n -мерное вещественное евклидово пространство точек $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ($x = (x_1, \dots, x_n)$), $R_+^n = \{\xi \in R^n, \xi_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$, C - множество комплексных чисел. Для $\xi \in R^n$ и $\alpha \in N_0^n$ обозначим

$$|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n},$$

где $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ либо $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, n$.

Пусть $A \equiv \{\nu^j\}_{j=1}^k \subset R_+^n$ ($k \in N$) конечный набор. Многогранником Ньютона (характеристическим многогранником) набора A называется минимальный выпуклый многогранник $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(A)$, содержащий множество $A \cup \{0\}$.

Многогранник $\mathfrak{R} \subset R_+^n$ называется полным (правильным), если $\mathfrak{R}$ имеет вершину в начале координат и отличную от начала координат вершину на каждой оси координат (компоненты внешних (относительно $\mathfrak{R}$) нормалей $(n-1)$ -мерных некоординатных граней неотрицательны).

Пусть $P(D) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} D^{\alpha}$ линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а $P(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$ его полный символ, где сумма распространяется по некоторому конечному набору

$$(P) = \{\alpha; \alpha \in N_0^n, \gamma_{\alpha} \neq 0\}, \quad \text{ord} P \equiv \max_{\alpha \in (P)} |\alpha|, \quad \text{ord}_j P \equiv \max_{\alpha \in (P)} \alpha_j \quad (j = 1, \dots, n).$$

Многогранником Ньютона (характеристическим многогранником) оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$) называется многогранник Ньютона (характеристический многогранник) набора (P) .

Хорошо известна (см. [1]) зависимость регулярности решений уравнения $P(D)u = 0$ от поведения символа $P(\xi)$ на бесконечности. Если символ $P(\xi)$ оператора $P(D)$ эллиптичен, то есть для некоторой постоянной $C > 1$

$$C^{-1}|\xi|^m \leq |P(\xi)| + 1 \leq C(|\xi|^m + 1) \quad \forall \xi \in R^n, m = \text{ord} P,$$

то (см. [2]) все решения уравнения $P(D)u = 0$ являются аналитическими функциями вещественных переменных. Если $P(\xi)$ является гипоеллиптическим многочленом, то есть

$$\sum_{\alpha \neq 0} D^\alpha P(\xi) / P(\xi) \rightarrow 0 \quad \text{при } |\xi| \rightarrow \infty,$$

то (см. [1] или [2]) все решения уравнения $P(D)u = 0$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями.

В работе [4] введено понятие почти гипоеллиптического многочлена, именно, многочлен P называется почти гипоеллиптическим, если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$(1.1) \quad \sum_{\alpha \in N_0^n} |D^\alpha P(\xi)| \leq C(|P(\xi)| + 1) \quad \text{для любого } \xi \in R^n,$$

и доказано, что если для почти гипоеллиптического многочлена

$$P(\xi_1, \xi_2) = \sum_{|\alpha| \leq m} \gamma_\alpha \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2}, \quad \gamma_{(m,0)} \cdot \gamma_{(0,m)} \neq 0,$$

существуют последовательность $\{(\xi_1^s, \xi_2^s)\}_{s=1}^\infty$, $(\xi_1^s)^2 + (\xi_2^s)^2 \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ и постоянная $C_1 > 0$ такие, что

$$|P(\xi_1^s, \xi_2^s)| \leq C_1, \quad s = 1, 2, \dots,$$

то многочлен $P(\xi_1, \xi_2)$ представляется в следующем виде

$$P(\xi_1, \xi_2) = \sum_{j=0}^m B_j (\xi_1 - a\xi_2)^j,$$

где $a \neq 0$, B_j ($j = 0, 1, \dots, m$) – некоторые числа.

В работе [5] доказано, что если $P(\xi) \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, то многочлен P является почти гипоеллиптическим тогда и только тогда, когда для некоторого $\delta > 0$

$$\left\{ u : ue^{-\delta|x|} \in L_2(E^n), P(D)u = 0 \right\} \subset \left\{ u : (D^\alpha u)e^{-\delta|x|} \in L_2(E^n), \forall \alpha \in N_0^n \right\}.$$

В работах [6], [7] в разных терминах введено понятие регулярного многочлена, и доказано, что регулярный многочлен $P(\xi) \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда многогранник Ньютона (характеристический многогранник) многочлена P полный.

В работе [8] найден критерий того, что многочлен двух переменных стремился бы к бесконечности при стремлении его аргументов к бесконечности.

Цель настоящей работы – найти критерий для почти гипоеллиптических многочленов P не более трех переменных при котором $P(\xi) \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Обозначим через $\sum(P)$ множество вещественных нулей многочлена P , а через

$$\sum_k(P) = \left\{ \tau \in \sum(P); D^\alpha P(\tau) = 0, |\alpha| < k, \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha P(\tau)| \neq 0 \right\} \quad k \in N.$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие легко проверяемые предложения.

Предложение 1.1. Пусть T невырожденная матрица порядка $n \times n$. Тогда

I) многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$ почти гипоеллиптичен тогда и только тогда, когда почти гипоеллиптичен многочлен $Q(\xi) \equiv P(T\xi)$,

II) $\text{ord} Q = \text{ord} P$,

III) если $\tau \in \sum_k(P)$, то $T^{-1}\tau \in \sum_k(Q)$ ($k \in N$).

Пример. Пусть $n=2$, $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1 - \xi_2)^2 - 1$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда

$$Q(\xi_1, \xi_2) = 4\xi_1^2 - 1 \quad \text{для любого } (\xi_1, \xi_2) \in R^2.$$

$$\sum_1(P) = \{(t \pm 1, t), t \in R\}, \quad \sum_k(P) = \emptyset \quad \text{при } k \geq 2,$$

$$\sum_1(Q) = \left\{ \pm \left(\frac{1}{2}, t \right), t \in R \right\}, \quad \sum_k(Q) = \emptyset \quad \text{при } k \geq 2 \text{ и}$$

$$T : \pm \left(\frac{1}{2}, t \right) = \pm \left(t + \frac{1}{2}, t - \frac{1}{2} \right) = \pm \left(\left(t - \frac{1}{2} \right) + 1, t - \frac{1}{2} \right).$$

Предложение 1.2. Пусть $R_m(\xi_1, \xi_2)$ однородный многочлен порядка m и $\tau \in \sum_k(R_m)$ ($k \in N$). Тогда существует однородный многочлен $R_{m-k}(\xi_1, \xi_2)$ порядка $m-k$ такой, что $R_{m-k}(\tau) \neq 0$ и

$$R_m(\xi_1, \xi_2) = (\tau_2 \xi_1 - \tau_1 \xi_2)^k R_{m-k}(\xi_1, \xi_2) \quad \text{для любых } (\xi_1, \xi_2) \in R^2.$$

Доказательство. Утверждение предложения непосредственно следует из основной теоремы алгебры, если заметить, что при $\tau_1 \neq 0$ ($\tau_2 \neq 0$) в силу однородности

многочлена R_m

$$R_m(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^m R_m \left(1, \frac{\xi_2}{\xi_1} \right) \quad \text{для любого } \xi \in R^2, \quad \xi_1 \neq 0$$

или, соответственно,

$$(R_m(\xi_1, \xi_2) = \xi_2^m R_m \left(\frac{\xi_1}{\xi_2}, 1 \right) \quad \text{для любого } \xi \in R^2, \quad \xi_2 \neq 0),$$

при этом точка τ_2/τ_1 (τ_1/τ_2) является k -кратным корнем многочлена $Q(t) \equiv R_m(1, t)$ ($Q(t) \equiv R_m(t, 1)$). Предложение доказано. $\square$

Предложение 1.3. Пусть $P(\xi_1, \xi_2)$ многочлен с постоянными коэффициентами, $\tau \in R^2$ и $m \in N$. Если с некоторой постоянной $C > 0$

$$(1.2) \quad |P(\xi_1, \xi_2)| \leq C(|\tau_2 \xi_1 - \tau_1 \xi_2|^m + 1) \quad \text{для любых } (\xi_1, \xi_2) \in R^2,$$

то существуют числа $B_j \in C$ ($j = 0, \dots, m$) такие, что

$$P(\xi_1, \xi_2) = \sum_{j=0}^m B_j (\tau_2 \xi_1 - \tau_1 \xi_2)^j.$$

Доказательство. Так как при $\tau_1 \cdot \tau_2 \neq 0$, с помощью обратимой замены переменных $\tau_2 \xi_1 - \tau_1 \xi_2 = \eta_1$, $\tau_1 \xi_1 + \tau_2 \xi_2 = \eta_2$ оценка (1.2) сводится к оценке

$$|Q(\eta_1, \eta_2)| \leq C(|\eta_1|^m + 1) \quad \text{для любых } (\eta_1, \eta_2) \in R^2,$$

где

$$Q(\eta_1, \eta_2) \equiv P \left(\frac{\tau_2 \eta_1 + \tau_1 \eta_2}{\tau_1^2 + \tau_2^2}, \frac{\tau_2 \eta_2 - \tau_1 \eta_1}{\tau_1^2 + \tau_2^2} \right),$$

то достаточно рассмотреть случай $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 1$.

Но в этом случае многочлен P не зависит от ξ_2 , $\text{ord} P \leq m$ и, следовательно,

$$P(\xi_1, \xi_2) = \sum_{j=0}^m B_j \xi_1^j \quad \text{для любых } (\xi_1, \xi_2) \in R^2,$$

где B_j , $j = 0, \dots, m$ – некоторые числа. Предложение доказано. $\square$

Обозначим через $r_j(t)$, $j = 2, \dots, n$ произвольный многочлен одной переменной $t \in R^1$, а через $q_j(t_1, \dots, t_j)$ – многочлен j ($2 \leq j \leq n$) переменных $t_k \in R^1$ ($k = 1, \dots, j$).

Предложение 1.4. Пусть для многочленов $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$, $q_j(\xi_1, \dots, \xi_j)$ и $r_j(\xi_j)$, $\text{ord} r_j > \text{ord}_j q_j$ ($j = 2, \dots, n$), существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$(1.3) \quad |\xi_1| + \sum_{j=2}^n |r_j(\xi_j) + q_j(\xi_1, \dots, \xi_j)| \leq C(|P(\xi)| + 1) \quad \text{для любых } \xi \in R^n,$$

тогда $P(\xi) \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть, наоборот, при выполнении оценки (1.3) существуют последовательность $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty$, $|\xi^s| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ и постоянная $C > 0$ такие, что

$$(1.4) \quad |P(\xi^s)| \leq C, \quad s = 1, 2, \dots$$

Из оценки (1.3) в силу (1.4) имеем, что существует постоянная $C_1 > 0$, для которого

$$|\xi_1^s| \leq C_1, \quad s = 1, 2, \dots$$

За счет выбора подпоследовательности можно считать, что

$$|\xi_j^s| \leq C_j, \quad s = 1, 2, \dots, j = 1, \dots, k-1, \quad |\xi_k^s| \rightarrow \infty \text{ при } s \rightarrow \infty \ (k < n).$$

Тогда в силу условия предложения при $s \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} |r_k(\xi_k^s) + q_k(\xi_1^s, \dots, \xi_{k-1}^s, \xi_k^s)| &\geq |r_k(\xi_k^s)| - |q_k(\xi_1^s, \dots, \xi_{k-1}^s, \xi_k^s)| \geq \\ &\geq \varkappa_0 |\xi_k^s|^{\text{ord } r_k} - \varkappa_1 |\xi_k^s|^{\text{ord } q_k} \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $\varkappa_0 = \varkappa_0(r_k) > 0$, $\varkappa_1 = \varkappa_1(q_k, c_1, \dots, c_{k-1}) > 0$ некоторые постоянные. Это противоречит оценке (1.3). Предложение 1.4 доказано. $\square$

Предложение 1.5. Если многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$ почти гипоеллиптичен, то для любого j ($1 \leq j \leq n$) многочлен

$$P(\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, 0, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n)$$

также почти гипоеллиптичен.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Представим многочлен $P(\xi) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ порядка $m \geq 1$ в виде суммы однородных многочленов

$$(2.1) \quad P(\xi) = \sum_{j=0}^m R_j(\xi) \equiv \sum_{j=0}^m \sum_{|\alpha|=j} \gamma_\alpha \xi^\alpha.$$

Лемма 2.1. Пусть для почти гипоеллиптического многочлена P порядка $m \in \mathbb{N}$, представленного в виде (2.1), существуют последовательность $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ и постоянная $C > 0$ такие, что $|\xi^s| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ и

$$(2.2) \quad |P(\xi^s)| \leq C, \quad s = 1, 2, \dots$$

Тогда для любой предельной точки τ последовательности $\{\tau^s\}_{s=1}^\infty = \{\xi^s / |\xi^s|\}_{s=1}^\infty$

$$\sum_{|\alpha| \leq m-1} |D^\alpha R_m(\tau)| = 0, \quad \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha R_m(\tau)| \neq 0,$$

то есть $\tau \in \sum_m (R_m)$.

Доказательство. Пусть τ предельная точка последовательности $\{\tau^s\}_{s=1}^\infty$. Не умаляя общности, (за счет выбора подпоследовательности) можно считать, что $\tau^s \rightarrow \tau$ при $s \rightarrow \infty$.

Пусть $\alpha \in N_0^n$, $|\alpha| \leq m-1$, любой мультииндекс. Тогда в силу почти гипоеллиптичности многочлена P и оценки (2.2) с некоторой постоянной $C_1 > 0$ имеем, что

$$\begin{aligned} |D^\alpha R_m(\tau)| &= \lim_{s \rightarrow \infty} |D^\alpha R_m(\tau^s)| = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{|D^\alpha R_m(\xi^s)|}{|\xi^s|^{m-|\alpha|}} = \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\left| D^\alpha P(\xi^s) - \sum_{j=|\alpha|}^{m-1} D^\alpha R_j(\xi^s) \right|}{|\xi^s|^{m-|\alpha|}} \leq C_1 \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(|P(\xi^s)| + 1)}{|\xi^s|^{m-|\alpha|}} + \\ &+ \sum_{j=|\alpha|}^{m-1} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{|D^\alpha R_j(\xi^s)|}{|\xi^s|^{m-|\alpha|}} = \sum_{j=|\alpha|}^{m-1} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{|D^\alpha R_j(\tau^s)| \cdot |\xi^s|^{j-|\alpha|}}{|\xi^s|^{m-|\alpha|}} = 0. \end{aligned}$$

С другой стороны, в силу условия $\text{ord} P = m$ существует мультииндекс $\beta \in N_0^n$, $|\beta| = m$, для которого $D^\beta R_m(\xi) = \text{const} \neq 0$. Этим утверждение леммы доказано. $\square$

Лемма 2.2. *Для любого однородного многочлена $R_m \neq 0$ порядка m от n переменных*

- I) $\sum_m (R_m)$ -линейное многообразие,
- II) $k \equiv \dim \sum_m (R_m) \leq n-1$,
- III) *существует матрица T порядка $(n-k) \times n$, $\text{rank } T = n-k$, и однородный многочлен $n-k$ переменных $\tilde{Q}_m$ порядка m такие, что $R_m(\xi) = \tilde{Q}_m(T\xi)$.*

Доказательство. Для доказательства пункта I) в силу однородности R_m достаточно показать, что $\tau^1 + \tau^2 \in \sum_m (R_m)$ при всех $\tau^1, \tau^2 \in \sum_m (R_m)$.

Пусть

$$R_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} \delta_\alpha \xi^\alpha \quad \text{и} \quad \tau^1, \tau^2 \in \sum_m (R_m).$$

Тогда для любого мультииндекса $\beta \in N_0^n$, $|\beta| \leq m-1$, в силу формулы Тейлора из условия $\tau^1, \tau^2 \in \sum_m (R_m)$ имеем

$$\begin{aligned} D^\beta R_m(\tau^1 + \tau^2) &= \sum_{\gamma} \frac{D^{\gamma+\beta} R_m(\tau^1)}{\gamma!} (\tau^2)^\gamma = \sum_{|\gamma|=m-|\beta|} \delta_{(\beta+\gamma)} \frac{(\beta+\gamma)!}{\gamma!} (\tau^2)^\gamma = \\ &= \sum_{|\alpha|=m, \alpha \geq \beta} \delta_\alpha \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} (\tau^2)^{\alpha-\beta} = D^\beta R_m(\tau^2) = 0. \end{aligned}$$

Так как $R_m \neq 0$, то $\tau^1 + \tau^2 \in \sum_m (R_m)$. Этим утверждение пункта I) доказано.

В силу пункта I) $\sum_m (R_m) \subset R^n$ – линейное многообразие и по условию леммы $R_m \neq 0$, то $k \leq n - 1$.

Докажем утверждение пункта III). При $k = 0$ утверждение непосредственно следует из пункта II) предложения 1.1.

Пусть $k \geq 1$, $\tau^1, \dots, \tau^k$ базис в $\sum_m (R_m)$, а $\tau^1, \dots, \tau^k, \tau^{k+1}, \dots, \tau^n$ базис в R^n и

$$V = \begin{pmatrix} \tau_1^1 & \dots & \tau_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \tau_1^n & \dots & \tau_n^n \end{pmatrix}.$$

Так как $\det V \neq 0$, то V отображает R^n на R^n . Сделаем замену переменных $\xi = V^{-1}\eta$ и обозначим

$$Q_m(\eta) \equiv R_m(V^{-1}\eta) = R_m(\xi).$$

Согласно пункту II) предложения 1.1 Q_m является однородным многочленом порядка m , а в силу пункта III) предложения 1.1 и уже доказанного пункта I) леммы имеем

$$\sum_m (Q_m) = \{(\eta_1, \dots, \eta_k, 0, \dots, 0); \eta_j \in R, j = 1, \dots, k\}.$$

Покажем, что из условия $e^1 \equiv (1, 0, \dots, 0) \in \sum_m (Q_m)$ следует, что

$$(2.3) \quad Q_m(\eta) = Q_m(0, \eta_2, \dots, \eta_n) \quad \text{для любого } \eta \in R^n.$$

По формуле Тейлора многочлен Q_m представим в виде

$$(2.4) \quad Q_m(\eta) = \sum_{j=0}^m \eta_1^j \frac{D_1^j Q_m(0, \eta_2, \dots, \eta_n)}{j!} \quad \text{для любого } \eta \in R^n$$

и по индукции покажем, что $D_1^j Q_m(0, \eta_2, \dots, \eta_n) \equiv 0$ при $j = 1, \dots, m$.

Так как $D_1^j Q_m$ однородный многочлен порядка $m-j$, то $D_1^j Q_m(0) = 0$ при $j \leq m-1$.

Поэтому из условия $e^1 \in \sum_m (Q_m)$, используя представление (2.4), имеем

$$0 = Q_m(e^1) = \sum_{j=0}^m 1^j \frac{D_1^j Q_m(0)}{j!} = D_1^m Q_m(0).$$

Так как $\text{ord} Q_m = m$, то $D_1^m Q_m(\xi) \equiv \text{const}$. Следовательно,

$$D_1^m Q_m(0, \eta_2, \dots, \eta_n) = D_1^m Q_m(0) = 0 \quad \text{для любых } (\eta_2, \dots, \eta_n) \in R^{n-1}.$$

Тогда из представления (2.4) имеем

$$Q_m(\eta) = \sum_{j=0}^{m-1} \eta_1^j \frac{D_1^j Q_m(0, \eta_2, \dots, \eta_n)}{j!} \quad \text{для любого } \eta \in R^n.$$

Предположим, что $D_1^j Q_m(0, \eta_2, \dots, \eta_n) \equiv 0$ при всех j , $r \leq j \leq m$, ($r \geq 2$). Докажем, что $D_1^{r-1} Q_m(0, \eta_2, \dots, \eta_n) \equiv 0$. Из предположения индукции в силу представления (2.4) имеем

$$Q_m(\eta) = \sum_{j=0}^r \eta_1^j \frac{D_1^j Q_m(0, \eta_2, \dots, \eta_n)}{j!} \quad \text{для любого } \eta \in R^n.$$

Так как $e^1 \in \sum_m(Q_m)$, то для любого мультииндекса $\beta = (0, \beta_2, \dots, \beta_n) \in N_0^n$, $|\beta| = m - r (\leq m - 1)$ имеем

$$0 = D^\beta Q_m(e^1) = \sum_{j=0}^r 1^j \frac{D^\beta D_1^j Q_m(0)}{j!} = \frac{D^\beta D_1^r Q_m(0)}{r!}.$$

Так как для любого однородного многочлена R_ℓ порядка ℓ в силу формулы Эйлера

$$R_\ell(\xi) = \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{D^\alpha R_\ell(0)}{\alpha!} \xi^\alpha \quad \text{для любого } \xi \in R^n,$$

то отсюда имеем, что

$$D_1^r Q_m(0, \eta_2, \dots, \eta_n) = \sum_{|\beta|=m-r} \frac{D^\beta D_1^r Q_m(0)}{\beta!} \eta_2^{\beta_2} \dots \eta_n^{\beta_n} = 0 \quad \text{для любых } (\eta_2, \dots, \eta_n) \in R^{n-1}.$$

Этим из представления (2.4) по индукции получаем

$$Q_m(\eta) = Q_m(0, \eta_2, \dots, \eta_n).$$

Так как $e^j \equiv (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \sum_m(Q_m)$ ($j = 1, \dots, k$), то аналогичным образом можно доказать, что

$$Q_m(\eta) = Q_m(0, \dots, 0, \eta_{k+1}, \dots, \eta_n) \quad \text{для любого } \eta \in R^n.$$

Обозначим $\tilde{Q}_m(t_1, \dots, t_{n-k}) = Q_m(0, \dots, 0, t_1, \dots, t_{n-k})$. Так как $\eta = V\xi$, то $(\eta_{k+1}, \dots, \eta_n) = T\xi$, где

$$T = \begin{pmatrix} \tau_1^{k+1} & \dots & \tau_n^{k+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tau_1^n & \dots & \tau_n^n \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $R_m(\xi) = \tilde{Q}_m(T\xi)$ при всех $\xi \in R^n$. Этим утверждение пункта III) доказано. Лемма 2.2 доказана. $\square$

Лемма 2.3. Пусть $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$ эллиптический многочлен порядка $m > 0$. Тогда существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$(2.5) \quad |\xi| \leq C \left(\sum_{|\alpha|=m-1} |D^\alpha P(\xi)| + 1 \right) \quad \text{для любого } \xi \in R^n.$$

Доказательство. Представим многочлен P в виде

$$\sum_{j=0}^m R_j(\xi),$$

где R_j -однородный многочлен порядка j ($j = 0, \dots, m$). Очевидно, оценка (2.5) эквивалентна следующей оценке

$$(2.6) \quad |\xi| \leq C_1 \left(\sum_{|\alpha|=m-1} |D^\alpha R_m(\xi)| + 1 \right) \quad \text{для любого } \xi \in R^n,$$

где $C_1 > 0$ некоторая постоянная.

Покажем справедливость оценки (2.6). Предположим обратное, что существует последовательность $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty \subset R^n$ такая, что

$$(2.7) \quad |\xi^s| \rightarrow \infty, \quad \sum_{|\alpha|=m-1} \frac{|D^\alpha R_m(\xi^s)|}{|\xi^s|} \rightarrow \infty \quad \text{при } s \rightarrow \infty.$$

Не умаляя общности, (за счет выбора подпоследовательности) можно считать, что последовательность $\tau^s = \xi^s / |\xi^s|$, $s = 1, 2, \dots$, сходится к некоторой точке τ , $|\tau| = 1$. Тогда в силу непрерывности многочленов и из (2.7) получаем

$$\sum_{|\alpha|=m-1} |D^\alpha R_m(\tau)| = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{|\alpha|=m-1} |D^\alpha R_m(\tau^s)| = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{|\alpha|=m-1} \frac{|D^\alpha R_m(\xi^s)|}{|\xi^s|} = 0.$$

Так как в силу формулы Эйлера для однородных функций

$$R_m(\xi) = \frac{1}{m!} \sum_{|\alpha|=m-1} D^\alpha R_m(\xi) \xi^\alpha \quad \text{для любого } \xi \in R^n,$$

то отсюда получаем

$$R_m(\tau) = \frac{1}{m!} \sum_{|\alpha|=m-1} D^\alpha R_m(\tau) \tau^\alpha = 0,$$

что противоречит эллиптичности многочлена R_m . Полученное противоречие доказывает справедливость оценки (2.6) и тем самым оценки (2.5). Лемма доказана. $\square$

3. Почти гипоеллиптические многочлены двух переменных

Лемма 3.1. Пусть

$$P(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^m + \sum_{j=0}^{m-1} \xi_1^j r_j(\xi_2), \quad m \in N, \quad D_2 P \neq 0 \quad (\text{ord}_2 P \geq 1),$$

$$j + \text{ord} r_j \leq m-1, \quad j = 0, \dots, m-1 \quad (\text{ord}(P - \xi_1^m) \leq m-1),$$

почти гипоеллиптический многочлен. Тогда $P(\xi_1, \xi_2) \rightarrow \infty$ при $\xi_1^2 + \xi_2^2 \rightarrow \infty$.

Доказательство. В силу условия $j + \text{ord} r_j \leq m - 1$ ($j = 0, \dots, m - 1$) $r_{m-1}(\xi_2) \equiv \text{const}$, и из почти гипоеллиптичности многочлена P с некоторой постоянной $C_1 > 0$ имеем

$$\begin{aligned} |\xi_1| &= \frac{|D_1^{m-1} \xi_1^m|}{m!} = \frac{1}{m!} \left| D_1^{m-1} P(\xi_1, \xi_2) - D_1^{m-1} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \xi_1^j r_j(\xi_2) \right) \right| \leq \\ (3.1) \quad &\leq \frac{1}{m!} |D_1^{m-1} P(\xi_1, \xi_2)| + \frac{1}{m} |r_{m-1}(\xi_2)| \leq C_1 (|P(\xi_1, \xi_2)| + 1), \end{aligned}$$

для любых $(\xi_1, \xi_2) \in R^2$. Так как для любого j , $0 \leq j \leq m - 1$, в силу почти гипоеллиптичности многочлена P с некоторой постоянной $C_2 > 0$

$$\begin{aligned} \left| j! r_j(\xi_2) + \sum_{k=j+1}^{m-1} \frac{k!}{(k-j)!} \xi_1^{k-j} r_k(\xi_2) + \frac{m!}{(m-j)!} \xi_1^{m-j} \right| &= |D_1^j P(\xi_1, \xi_2)| \leq \\ &\leq C_2 (|P(\xi_1, \xi_2)| + 1) \quad \text{для любых } (\xi_1, \xi_2) \in R^2 \end{aligned}$$

($\sum'$ считаем равным нулю при $j = m - 1$), то отсюда и из оценки (3.1) имеем с некоторой постоянной $C_3 > 0$

$$\begin{aligned} |\xi_1| + \left| j! r_j(\xi_2) + \sum_{k=j+1}^{m-1} \frac{k!}{(k-j)!} \xi_1^{k-j} r_k(\xi_2) + \frac{m!}{(m-j)!} \xi_1^{m-j} \right| &\leq \\ (3.2) \quad &\leq C_3 (|P(\xi_1, \xi_2)| + 1) \quad \text{для любого } (\xi_1, \xi_2) \in R^2, j = 0, \dots, m - 1. \end{aligned}$$

Пусть $r = \max_{0 \leq j \leq m-1} \text{ord} r_j$ и $j_0 = \max \{j; \text{ord} r_j = r\}$. В силу условия $D_2 P \neq 0$ леммы $r \geq 1$, а по определению $j_0 \text{ord} r_j < \text{ord} r_{j_0}$, $j = j_0 + 1, \dots, m - 1$. Поэтому из оценки (3.2) при $j = j_0$ и предложения 1.4 следует утверждение леммы. $\square$

Для любого $n \in N$ обозначим через I_n множество многочленов P n переменных, для которых $P(\xi) \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Теорема 3.1. I) Пусть $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2) \notin I_2$ почти гипоеллиiptический многочлен порядка m , для которого $D_1 P \cdot D_2 P \neq 0$, то есть $\text{ord}_1 P \geq 1$ и $\text{ord}_2 P \geq 1$. Тогда существуют числа $a, b \in R$, $a \cdot b \neq 0$, и многочлен Q одной переменной порядка m такие, что

$$(3.3) \quad P(\xi_1, \xi_2) = Q(a\xi_1 - b\xi_2) \quad \text{для любых } (\xi_1, \xi_2) \in R^2.$$

II) Для любых $a, b \in R$, $a \cdot b \neq 0$, и многочлена Q одной переменной порядка $m \geq 1$ многочлен $P(\xi_1, \xi_2)$, определенный по формуле (3.3), является почти гипоеллиiptическим многочленом, $P \notin I_2$ и $D_1 P \cdot D_2 P \neq 0$.

Доказательство. Сначала докажем утверждение пункта II). Очевидно, что любой многочлен одной переменной почти гипоеллиптичен. Поэтому в силу пункта I) предложения 1.1 многочлен $P(\xi_1, \xi_2)$, определенный по формуле (3.3), почти гипоеллиптичен.

При $a \cdot b \neq 0$ $P\left(\frac{s}{a}, \frac{s}{b}\right) = Q(0)$, $s = 1, 2, \dots$, и $\left(\frac{s}{a}\right)^2 + \left(\frac{s}{b}\right)^2 \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$.

Следовательно, $P \notin I_2$.

Так как $DQ \neq 0$ ($m \geq 1$), то $D_1P \cdot D_2P = -ab(DQ)^2 \neq 0$.

Докажем утверждение пункта I). Представим многочлен $P(\xi_1, \xi_2)$ в виде

$$P(\xi_1, \xi_2) = \sum_{j=0}^m R_j(\xi_1, \xi_2),$$

где R_j - однородный многочлен порядка j ($j = 0, \dots, m$). Так как $P \notin I_2$ почти гипоеллиптический многочлен, то в силу леммы 2.1 существует точка $\tau \in \sum_m(R_m)$ такая, что $\tau_1^2 + \tau_2^2 = 1$.

Сначала покажем, что из условия $D_1P \cdot D_2P \neq 0$ следует, что $\tau_1 \cdot \tau_2 \neq 0$. Пусть, наоборот, $\tau_1 \cdot \tau_2 = 0$. Тогда, не умаляя общности, можно считать, что $\tau = (0, 1)$.

Повторяя рассуждения, проводимые при доказательстве представления (2.3), можно показать, что $R_m(\xi_1, \xi_2) = C'_m \xi_1^m$ при всех $(\xi_1, \xi_2) \in R^2$, где $C'_m \neq 0$ ($\text{ord}P = m$). Следовательно, многочлен P можно представить в виде

$$P(\xi_1, \xi_2) = C'_m \xi_1^m + \sum_{j=0}^{m-1} \xi_1^j r_j(\xi_2),$$

где $j + \text{ord}r_j \leq m-1$, $j = 0, \dots, m-1$. Так как по условию теоремы $D_2P \neq 0$, то в силу леммы 3.1 получим, что $P \in I_2$. Полученное противоречие доказывает, что $\tau_1 \cdot \tau_2 \neq 0$.

Итак, имеем, что существует точка $\tau \in \sum_m(P_m)$, $\tau_1^2 + \tau_2^2 = 1$ и $\tau_1 \cdot \tau_2 \neq 0$. Тогда в силу предложения 1.2 многочлен $R_m(\xi_1, \xi_2)$ представляется в виде

$$(3.4) \quad R_m(\xi_1, \xi_2) = C_m(\tau_2 \xi_1 - \tau_1 \xi_2)^m \quad \forall (\xi_1, \xi_2) \in R^2,$$

где $C_m \neq 0$ ($\text{ord}P = m$) некоторая постоянная.

Обозначим $\tau_2 \xi_1 - \tau_1 \xi_2 = \eta_1$, $\tau_2 \xi_1 + \tau_1 \xi_2 = \eta_2$ и положим

$$Q(\eta_1, \eta_2) = P\left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{2\tau_2}, \frac{\eta_2 - \eta_1}{2\tau_1}\right) \quad \text{для любого } (\eta_1, \eta_2) \in R^2.$$

Очевидно, что $|\xi| \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $|\eta| \rightarrow \infty$. Поэтому из условия теоремы $P \notin I_2$ следует, что $Q \notin I_2$.

На основании пункта II) предложения 1.1 и представления (3.4) многочлен Q можно представить в следующем виде

$$Q(\eta_1, \eta_2) = C_m \eta_1^m + \sum_{j=0}^{m-1} \eta_1^j \tilde{r}_j(\eta_2),$$

где $j + \text{ord} \tilde{r}_j \leq m - 1$, $j = 0, \dots, m - 1$.

Так как многочлен Q в силу пункта I) предложения 1.1 почти гипоеллиптичен, то при $D_2 Q \neq 0$ согласно лемме 3.1 имеем, что $Q \in I_2$. Отсюда получаем, что

$$P(\xi_1, \xi_2) = Q(\tau_2 \xi_1 - \tau_1 \xi_2, \tau_2 \xi_1 + \tau_1 \xi_2) \in I_2.$$

Полученное противоречие показывает, что $D_2 Q = 0$, то есть $\tilde{r}_j(\eta_2) \equiv C_j$, $j = 0, \dots, m - 1$, где $C_j \in C$ ($j = 0, \dots, m - 1$) некоторые постоянные, и поэтому

$$Q(\eta_1, \eta_2) = \sum_{j=0}^m C_j \eta_1^j \text{ и } P(\xi_1, \xi_2) = \sum_{j=0}^m C_j (\tau_2 \xi_1 - \tau_1 \xi_2)^j \quad \forall (\xi_1, \xi_2) \in R^2.$$

Теорема доказана. $\square$

4. ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

Лемма 4.1. Пусть $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ почти гипоеллиiptический многочлен с постоянными коэффициентами можно представить в виде

$$(4.1) \quad P(\xi) = \xi_1^m + \sum_{j=0}^{m-1} \xi_1^j P_j(\xi_2, \xi_3),$$

где $m \in N$ и

$$(4.2) \quad P_0(\xi_2, \xi_3) = \sum_{j=0}^{m_1} B_j (a\xi_2 - b\xi_3)^j, \quad m_1 \in N, \quad a, b \in R, \quad B_j \in C \quad (j = 0, \dots, m_1).$$

Тогда многочлен P ограничен при ограниченных $|\xi_1| + |a\xi_2 - b\xi_3|$, $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in R^3$.

Доказательство. Сначала заметим, что если многочлен P вида (4.1) почти гипоеллиптичен, то существует постоянная $C_1 > 0$ такая, что

$$(4.3) \quad |P_j(\xi_2, \xi_3)| = \frac{|D_1^j P(0, \xi_2, \xi_3)|}{j!} \leq C_1 (|P(0, \xi_2, \xi_3)| + 1) = \\ = C_1 (|P_0(\xi_2, \xi_3)| + 1) \quad (\xi_2, \xi_3) \in R^2, \quad j = 1, \dots, m - 1.$$

Из оценки (4.3) и представления (4.2) в силу предложения 1.3 имеем с некоторыми числами $A_{k,j} \in C$, $k = 0, \dots, m_1$, $j = 1, \dots, m - 1$

$$(4.4) \quad P_j(\xi_2, \xi_3) = \sum_{k=0}^{m_1} A_{k,j} (a\xi_2 - b\xi_3)^k \quad j = 1, \dots, m - 1.$$

Тогда для любого $d > 0$ при всех $\xi \in R^3$ таких, что $|\xi_1| + |a\xi_2 - b\xi_3| \leq d$, в силу (4.2), (4.4) и представления (4.1) имеем

$$\begin{aligned} |P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)| &\leq |\xi_1|^m + \sum_{j=0}^{m-1} |\xi_1|^j |P_j(\xi_2, \xi_3)| \leq \\ &\leq d^m + \sum_{j=1}^{m-1} d^j \sum_{k=0}^{m_1} |A_{k,j}| d^k + \sum_{k=0}^{m_1} |B_k| d^k < \infty. \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 4.2. Пусть $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \notin I_3$ почти гипоеллиптический многочлен вида (4.1), для которого $\text{ord}(P - \xi_1^m) \leq m-1$. Тогда многочлены $P_j(\xi_2, \xi_3)$, $j = 0, \dots, m-1$, представляются в виде (4.4).

Доказательство. Из условия $P \notin I_3$ имеем, что существуют последовательность $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty \subset R^3$ и постоянная $C > 0$ такие, что $|\xi^s| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ и

$$(4.5) \quad |P(\xi^s)| \leq C, \quad s = 1, 2, \dots,$$

а из условия $\text{ord}(P - \xi_1^m) \leq m-1$ леммы имеем

$$(4.6) \quad P_{m-1}(\xi_2, \xi_3) = \text{const} \quad (\xi_2, \xi_3) \in R^2.$$

Покажем, что при условиях леммы многочлены P_j , $j = 1, \dots, m-1$, ограничены на последовательности $\{(\xi_2^s, \xi_3^s)\}_{s=1}^\infty$, то есть для любого $j = 1, \dots, m-1$ существует постоянная $C_j > 0$ такая, что

$$(4.7) \quad |P_{m-j}(\xi_2^s, \xi_3^s)| \leq C_j, \quad s = 1, 2, \dots, \quad j = 1, \dots, m-1.$$

Оценку (4.7) докажем методом индукции по j . При $j = 1$ оценка (4.7) следует из (4.6). Пусть оценка (4.7) верна при $j \leq r$ ($1 \leq r \leq m-2$). Докажем его для $j = r+1$. Из условия почти гипоеллиптичности многочлена P для любого $j \geq 1$ в силу оценки (4.5) с некоторой постоянной $d_1 > 0$ имеем

$$\begin{aligned} &\left| \frac{m!}{(m-j)!} (\xi_1^s)^{m-j} + \frac{(m-1)!}{(m-1-j)!} (\xi_1^s)^{m-1-j} P_{m-1}(\xi_2^s, \xi_3^s) + \dots + j! P_{m-j}(\xi_2^s, \xi_3^s) \right| = \\ (4.8) \quad &= \left| D_1^j P(\xi^s) \right| \leq d_1 (|P(\xi^s)| + 1) \leq d_1 (C + 1), \quad s = 1, 2, \dots, \quad j = 1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Из (4.8) при $j = m-1$ в силу (4.6) имеем с некоторой постоянной $d_2 > 0$

$$(4.9) \quad |\xi_1^s| \leq d_2, \quad s = 1, 2, \dots$$

Тогда из (4.8) при $j = r + 1$ в силу предположения индукции и оценки (4.9) имеем с некоторой постоянной $d_3 > 0$

$$\begin{aligned} (r+1)! |P_{m-(r+1)}(\xi_2^s, \xi_3^s)| &\leq d_1 (C+1) + \frac{m!}{(m-(r+1))!} |\xi_1^s|^{m-(r+1)} + \\ &+ \frac{(m-1)!}{(m-1-(r+1))!} |\xi_1^s|^{m-1-(r+1)} |P_{m-1}(\xi_2^s, \xi_3^s)| + \dots + \\ &+ \frac{(r+2)!}{2!} |\xi_1^s| |P_{m-r}(\xi_2^s, \xi_3^s)| \leq d_1 (C+1) + \frac{m!}{(m-(r+1))!} d_2^{m-(r+1)} + \\ &+ \frac{(m-1)!}{(m-1-(r+1))!} d_2^{m-1-(r+1)} C_1 + \dots + \frac{(r+2)!}{2!} d_2 C_r \leq d_3, \quad s = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Отсюда получаем оценку (4.7) при $j = r + 1$ с постоянной $C_{r+1} = d_3/(r+1)!$. Этим по методу индукции оценка (4.7) доказана.

Из представления (4.1) многочлена P в силу оценок (4.5), (4.7) и (4.9) имеем с некоторой постоянной $C_m > 0$

$$\begin{aligned} |P_0(\xi_2^s, \xi_3^s)| &\leq |P(\xi^s)| + |\xi_1^s|^m + \sum_{j=1}^{m-1} |\xi_1^s|^j |P_j(\xi_2^s, \xi_3^s)| \leq \\ (4.10) \quad &\leq C + d_2^m + \sum_{j=1}^{m-1} d_2^j C_j \leq C_m, \quad s = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Так как $|\xi^s| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, то в силу (4.9) $(\xi_2^s)^2 + (\xi_3^s)^2 \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$. Тогда из (4.10) в силу предложения 1.1 и теоремы 1.1 при $D_2 P_0 \cdot D_3 P_0 \neq 0$ ($\text{ord}_2 P_0 \geq 1$, $\text{ord}_3 P_0 \geq 1$) имеем, что многочлен P_0 представляется в виде (4.2), где $a \cdot b \neq 0$. Так как при условиях леммы с некоторой постоянной $d_4 > 0$ (см. оценку (4.3))

$$(4.11) \quad |P_j(\xi_2, \xi_3)| \leq d_4 (|P_0(\xi_2, \xi_3)| + 1) \quad \text{для любого } (\xi_2, \xi_3) \in R^2,$$

то в силу предложения 1.3 многочлены P_j , $j = 1, \dots, m-1$, представляются в виде (4.4).

Если же $D_2 P_0 \cdot D_3 P_0 = 0$, то в силу аналитичности многочленов либо $D_2 P_0 = 0$, либо $D_3 P_0 = 0$, либо $D_2 P_0 = 0$ и $D_3 P_0 = 0$. Если $D_2 P_0 = 0$, то есть $P_0(\xi_2, \xi_3) = P_0(0, \xi_3)$ при всех $(\xi_2, \xi_3) \in R^2$, то из оценки (4.11) следует, что

$$P_j(\xi_2, \xi_3) = P_j(0, \xi_3), \quad j = 1, \dots, m-1,$$

при всех $(\xi_2, \xi_3) \in R^2$.

Следовательно, многочлены P_j представляются в виде (4.4) с $a = 0$, $b \neq 0$. Утверждение леммы в случаях $D_3 P_0 = 0$ или $D_2 P_0 = 0$ и $D_3 P_0 = 0$ доказывается

аналогичным образом с $a \neq 0, b = 0$ или с $a = 0, b = 0$ соответственно. Лемма доказана. $\square$

Из лемм 4.1 и 4.2 непосредственно следует:

Следствие 4.1. *Для того, чтобы почти гипозеллиптический многочлен P вида (4.1) с $\text{ord}(P - \xi_1^m) \leq m - 1$ не принадлежал I_3 , необходимо и достаточно, чтобы многочлены $P_j, j = 0, \dots, m - 1$, представлялись в виде (4.4).*

Предложение 4.1. *Пусть $2 \leq m \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}_+^2$ многоугольник, лежащий в $\{\nu \in \mathbb{R}_+^2, |\nu| \leq m\}$, для которого существует мультииндекс $\alpha \in \mathfrak{R} \cap N_0^2$ такой, что $|\alpha| = m$. Если для любого $\beta \in \mathfrak{R} \cap N_0^2, |\beta| = m, \beta_1 \geq 1 (\beta_2 \geq 1)$, то существует $\gamma \in \mathfrak{R} \cap N_0^2$, для которого*

$$B(\gamma) \equiv \{\beta \in \mathfrak{R} \cap N_0^2, \beta \geq (\gamma_1 - 1, \gamma_2)\} \subset \{(\gamma_1 - 1, \gamma_2), \gamma\} \equiv D(\gamma)$$

$$(B(\gamma) \equiv \{\beta \in \mathfrak{R} \cap N_0^2, \beta \geq (\gamma_1, \gamma_2 - 1)\} \subset \{(\gamma_1, \gamma_2 - 1), \gamma\} \equiv D(\gamma)).$$

Доказательство. Пусть $r = \min\{\beta_1, \beta \in \mathfrak{R} \cap N_0^2, |\beta| = m\}$. Из условия предложения имеем, что $r \geq 1$. С другой стороны, в силу определения числа r имеем, что

(4.12)

$$\gamma \equiv (r, m - r) \in \mathfrak{R} \cap N_0^2 \text{ и } (\beta_1, m - \beta_1) \notin \mathfrak{R}, \text{ для любого } \beta_1 \in N_0, \beta_1 \leq r - 1.$$

Покажем, что $B(\gamma) \setminus D(\gamma) = \emptyset$. Пусть, наоборот, существует мультииндекс $\beta \in B(\gamma) \setminus D(\gamma)$. Из условия $\beta \in B(\gamma)$ ($B(\gamma) \subset \mathfrak{R}$) имеем $r - 1 \leq \beta_1 \leq r, m - r \leq \beta_2 \leq m - r + 1$. Так как $(r, m - r + 1) \notin \mathfrak{R}$, то из условия $\beta \in B(\gamma) \setminus D(\gamma)$ имеем, что $\beta = (r - 1, m - r + 1) \in \mathfrak{R}$. Это противоречит (4.12) и доказывает, что $B(\gamma) \subset D(\gamma)$. Предложение доказано. $\square$

Пусть многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{\alpha \in (P)} \delta_\alpha \xi^\alpha$ порядка $m \geq 2$ представляется в виде

$$(4.13) \quad P(\xi) = R_m(\xi_1, \xi_2) + \sum_{j=0}^r \xi_3^j P_j(\xi_1, \xi_2),$$

где $1 \leq r \leq m - 1$,

$$R_m(\xi_1, \xi_2) = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, 0) \in (P), \alpha_1 + \alpha_2 = m} \delta_{(\alpha_1, \alpha_2, 0)} \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \equiv \sum_{\alpha \in (R_m)} \delta_{(\alpha, 0)} \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2}$$

однородный многочлен порядка m , $D_1 R_m \cdot D_2 R_m \neq 0$ ($\text{ord}_1 R_m \geq 1, \text{ord}_2 R_m \geq 1$), $P_r \neq 0, \text{ord}(P - R_m) \leq m - 1$.

Лемма 4.3. Пусть $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ почти гипоэллиптический многочлен представляется в виде (4.13). Если $R_m(1, 0) \cdot R_m(0, 1) = 0$ ($\delta_{(m,0,0)} \cdot \delta_{(0,m,0)} = 0$), то $P(\xi) \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{R}$ характеристический многогранник многочлена P , а $\mathfrak{R}_0$ его проекция на плоскость $\alpha_3 = 0$.

Так как характеристический многогранник почти гипоэллиптического многочлена правильный (см. [4]), то

$$\mathfrak{R}_0 = \{(\nu_1, \nu_2, 0) \in \mathfrak{R}\} \quad \text{и} \quad \mathfrak{M} \equiv \{(\nu_1, \nu_2); (\nu_1, \nu_2, 0) \in \mathfrak{R}_0\} = \mathfrak{R}(R_m + P_0).$$

Очевидно, многоугольник $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условиям многоугольника $\mathfrak{R}$ предложения 4.1. Ради определенности (см. условие леммы) будем считать, что $R_m(0, 1) = 0$ ($\delta_{(0,m,0)} = 0$). Следовательно, если $(\beta_1, m - \beta_1) \in \mathfrak{R}$, то $\beta_1 \geq 1$. Тогда в силу предложения 4.1 существует мультииндекс $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathfrak{M}$, $|\gamma| = m$ такой, что $B(\gamma) \subset D(\gamma)$ (обозначения см. в предложении 4.1).

Так как в силу условия $\text{ord}(P - R_m) \leq m - 1$ $D_1^{\gamma_1-1} D_2^{\gamma_2} P_j(\xi_1, \xi_2) \equiv 0$, $j = 1, \dots, m - 1$, и для некоторого C_1 $D_1^{\gamma_1-1} D_2^{\gamma_2} P_0(\xi_1, \xi_2) \equiv C_1$, то

$$(4.14) \quad D_1^{\gamma_1-1} D_2^{\gamma_2} P(\xi) = D_1^{\gamma_1-1} D_2^{\gamma_2} R_m(\xi_1, \xi_2) + C_1 \quad \text{для всех} \quad \xi \in R^3.$$

В силу предложения 4.1 $B(\gamma) \subset D(\gamma)$ и, очевидно, что $\{\gamma\} = D(\gamma) \cap (R_m)$. Поэтому

$$\begin{aligned} D_1^{\gamma_1-1} D_2^{\gamma_2} R_m(\xi_1, \xi_2) &= \sum_{\beta \in B(\gamma) \cap (R_m)} \delta_{(\beta,0)} \cdot \frac{\beta!}{(\beta_1 - \gamma_1 + 1)! (\beta_2 - \gamma_2)!} \xi_1^{\beta_1 - \gamma_1 + 1} \xi_2^{\beta_2} = \\ &= \sum_{\beta \in D(\gamma) \cap (R_m)} \delta_{(\beta,0)} \cdot \frac{\beta!}{(\beta_1 - \gamma_1 + 1)! (\beta_2 - \gamma_2)!} \xi_1^{\beta_1 - \gamma_1 + 1} \xi_2^{\beta_2} = \delta_{(\gamma,0)} \cdot \gamma! \xi_1. \end{aligned}$$

Поскольку в силу определения мультииндекса γ $\delta_{(\gamma,0)} \neq 0$, то отсюда, из (4.14) и почти гипоэллиптичности многочлена P с некоторой постоянной $C_2 > 0$ имеем

$$\begin{aligned} |\xi_1| &= \left| \frac{\delta_{(\gamma,0)} \cdot \gamma! \xi_1}{\delta_{(\gamma,0)} \cdot \gamma!} \right| \leq \frac{|\delta_{(\gamma,0)} \cdot \gamma! \xi_1 + C_1| + |C_1|}{|\delta_{(\gamma,0)} \cdot \gamma!|} = \\ (4.15) \quad &= \frac{|D_1^{\gamma_1-1} D_2^{\gamma_2} P(\xi)| + |C_1|}{|\delta_{(\gamma,0)} \cdot \gamma!|} \leq C_2 (|P(\xi)| + 1) \quad \text{для всех} \quad \xi \in R^3. \end{aligned}$$

Так как $\gamma_1 + (\gamma_2 - 1) = m - 1$, то в силу условия $\text{ord}(P - R_m) \leq m - 1$ с некоторой постоянной $C_3 > 0$ имеем

$$\begin{aligned} D_1^{\gamma_1} D_2^{\gamma_2-1} P(\xi) &= D_1^{\gamma_1} D_2^{\gamma_2-1} R_m(\xi_1, \xi_2) + C_3 = \\ &= \delta_{(\gamma,0)} \cdot \gamma! \xi_2 + \delta_{(\gamma_1+1, \gamma_2-1, 0)} \cdot (\gamma_1 + 1)! (\gamma_2 - 1)! \xi_1 + C_3 \quad \forall \xi \in R^3. \end{aligned}$$

Отсюда в силу почти гипоеллиптичности многочлена P с некоторой постоянной $C_4 > 0$ имеем

$$(4.16) \quad |\xi_2 + d_1 \xi_1| \leq C_4 (|P(\xi)| + 1) \quad \forall \xi \in R^3,$$

где $d_1 = (\gamma_1 + 1) \delta_{(\gamma_1+1, \gamma_2-1, 0)} / \gamma_1 \delta_{(\gamma, 0)}$.

Так как $P_r \neq 0$, то существует мультииндекс $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ и постоянная $C_5 \neq 0$ такая, что

$$D_1^{\beta_1} D_2^{\beta_2} P_r(\xi_1, \xi_2) = C_5 \quad \text{при всех} \quad (\xi_1, \xi_2) \in R^2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} D^\beta D_3^{r-1} P(\xi) &= D^\beta D_3^{r-1} R_m(\xi_1, \xi_2) + \sum_{j=r-1}^r D_3^{r-1} \xi_3^j D^\beta P_j(\xi_1, \xi_2) = \\ &= r! C_5 \xi_3 + (r-1)! D^\beta P_{r-1}(\xi_1, \xi_2) + D^\beta D_3^{r-1} R_m(\xi_1, \xi_2). \end{aligned}$$

Отсюда ($C_5 \neq 0$) в силу почти гипоеллиптичности многочлена P с некоторой постоянной $C_6 > 0$ имеем, что

$$\begin{aligned} &|\xi_3 + d_2 D^\beta P_{r-1}(\xi_1, \xi_2) + d_3 D^\beta D_3^{r-1} R_m(\xi_1, \xi_2)| \leq \\ (4.17) \quad &\leq C_6 (|P(\xi)| + 1) \quad \text{при всех} \quad \xi \in R^3, \end{aligned}$$

где $d_2 = 1/rC_5$, $d_3 = 1/r!C_5$.

Из оценок (4.15)-(4.17) с некоторой постоянной $C_7 > 0$ имеем, что

$$\begin{aligned} &|\xi_1| + |\xi_2 + d_1 \xi_1| + |\xi_3 + d_2 D^\beta P_{r-1}(\xi_1, \xi_2) + d_3 D^\beta D_3^{r-1} R_m(\xi_1, \xi_2)| \leq \\ &\leq C_7 (|P(\xi)| + 1) \quad \text{при всех} \quad \xi \in R^3. \end{aligned}$$

Отсюда в силу предложения 1.4 непосредственно получаем утверждение леммы.

Лемма доказана. $\square$

Аналогичными рассуждениями можно доказать следующую лемму.

Лемма 4.4. Пусть для почти гипоеллиптического многочлена P вида (4.13) вместо условия $\text{ord}(P - R_m) \leq m - 1$ выполняется условие $\text{ord} P_j \leq m - 2$, $j = 1, \dots, r$. Если $R_m(1, 0) \cdot R_m(0, 1) = 0$, то $P(\xi) \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Лемма 4.5. Пусть $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ почти гипоеллиптический многочлен вида (4.13), где $R_m(\xi_1, \xi_2)$ однородный эллиптический многочлен. Тогда $P(\xi) \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Доказательство. В силу условия $\text{ord}(P - R_m) \leq m - 1$ имеем, что

$$(4.18) \quad \sum_{j=1}^r |D^\alpha P_j(\xi_1, \xi_2)| \equiv 0$$

$$(4.19) \quad D^\alpha P_0(\xi_1, \xi_2) \equiv C_\alpha,$$

для любого $(\xi_1, \xi_2) \in R^2$, и любого $\alpha \in N_0^2$, $|\alpha| = m - 1$.

Из условия почти гипоеллиптичности многочлена P в силу (4.18) и (4.19) имеем с некоторой постоянной $d_1 > 0$

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = m-1} |D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} R_m(\xi_1, \xi_2)| = \\ & = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = m-1} |D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} P(\xi) - D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} P_0(\xi_1, \xi_2)| \leq \\ & \leq \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = m-1} |D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} P(\xi)| + \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = m-1} |C_{\alpha_1, \alpha_2}| \leq d_1 (|P(\xi)| + 1) \quad \text{при всех } \xi \in R^3. \end{aligned}$$

Отсюда в силу леммы 2.3 с некоторой постоянной $d_2 > 0$ имеем, что

$$(4.20) \quad |\xi_1| + |\xi_2| \leq d_2 (|P(\xi)| + 1) \quad \text{при всех } \xi \in R^3.$$

Так как $P_r \neq 0$, то существуют мультииндекс $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ и постоянная $\varkappa \neq 0$ такие, что $D^\beta P_r(\xi_1, \xi_2) \equiv \varkappa$. Тогда из почти гипоеллиптичности многочлена P в силу того, что

$$\begin{aligned} D^\beta D_3^{r-1} P(\xi) &= \xi_3 r! D^\beta P_r(\xi_1, \xi_2) + (r-1)! D^\beta P_{r-1}(\xi_1, \xi_2) + \\ &+ D^\beta D_3^{r-1} R_m(\xi_1, \xi_2) = \xi_3 r! \varkappa + (r-1)! D^\beta P_{r-1}(\xi_1, \xi_2) + \\ &+ D^\beta D_3^{r-1} R_m(\xi_1, \xi_2) \quad \text{при всех } \xi \in R^3, \end{aligned}$$

с некоторой постоянной $d_3 > 0$, при всех $\xi \in R^3$, имеем

$$\left| \xi_3 + \frac{1}{r\varkappa} D^\beta P_{r-1}(\xi_1, \xi_2) + \frac{1}{r!\varkappa} D^\beta D_3^{r-1} R_m(\xi_1, \xi_2) \right| \leq d_3 (|P(\xi)| + 1).$$

Отсюда и из оценки (4.20) в силу предложения 1.3 получаем утверждение леммы.

Лемма доказана. $\square$

Лемма 4.6. Пусть $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ почти гипоеллиiptический многочлен вида (4.13), для которого $R_m(1, 0) \cdot R_m(0, 1) \neq 0$, $\sum (R_m) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ и $\sum_m (R_m) = \{0\}$. Тогда $P(\xi) \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть $\tau \in \sum (R_m) \setminus \{0\}$. Тогда в силу предложения 1.2 многочлен R_m можно представить в следующем виде

$$R_m(\xi_1, \xi_2) = (\tau_2 \xi_1 - \tau_1 \xi_2)^k R_{m-k}(\xi_1, \xi_2) \quad \forall (\xi_1, \xi_2) \in R^2,$$

где $1 \leq k < m$ ($0 \neq \tau \in \sum (R_m) \setminus \sum_m (R_m)$) порядок нуля многочлена R_m в точке τ , R_{m-k} - однородный многочлен порядка $m-k$ и $R_{m-k}(\tau) \neq 0$.

Так как $R_m(1, 0) \cdot R_m(0, 1) \neq 0$, то $\tau_1 \cdot \tau_2 \neq 0$. Тогда в силу пункта I) предложения 1.1 многочлен

$$Q(\eta) = Q(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = P\left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{2\tau_2}, \frac{\eta_2 - \eta_1}{2\tau_1}, \eta_3\right)$$

почти гипоеллиптичен.

Из представления (4.13) многочлена P в силу пункта II) предложения 1.1 следует, что многочлен Q можно представить в следующем виде

$$Q(\eta) = Q_m(\eta_1, \eta_2) + \sum_{j=0}^{r_1} \eta_3^j q_j(\eta_1, \eta_2) = \eta_1^k Q_{m-k}(\eta_1, \eta_2) + \sum_{j=0}^{r_1} \eta_3^j q_j(\eta_1, \eta_2),$$

где $r_1 \in N$, Q_{m-k} - однородный многочлен порядка $m-k$, $q_{r_1} \neq 0$ и $\text{ord}(Q - Q_m) \leq m-1$. Так как в силу пункта III) предложения 1.1 порядок нуля многочлена R_m равно k , при этом $k < m$, то $\text{ord}_2 Q_m \geq 1$. Поэтому, учитывая также, что $Q_m(0, 1) = 0$ и $\text{ord}_1 Q_m \geq 1$, в силу леммы 4.3 имеем, что $Q(\eta) \rightarrow \infty$ при $|\eta| \rightarrow \infty$. Так как $|\xi| \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $|\eta| \rightarrow \infty$, то отсюда получаем утверждение леммы. Лемма доказана. $\square$

Теорема 4.1. *Для того, чтобы почти гипоеллиiptический многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $D_1 P \cdot D_2 P \cdot D_3 P \neq 0$ ($\text{ord}_j P \geq 1$, $j = 1, 2, 3$), не принадлежал множеству I_3 , необходимо и достаточно, чтобы существовали почти гипоеллиiptический многочлен $Q(\xi) = Q(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $D_1 Q \cdot D_2 Q \cdot D_3 Q = 0$ (то есть многочлен Q на самом деле зависит от одного или двух переменных) и невырожденная матрица T порядка 3×3 такие, что*

$$P(\xi) = Q(T\xi) \quad \text{при всех } \xi \in R^3.$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $Q(\xi) = Q(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ почти гипоеллиiptический многочлен, $D_1 Q \cdot D_2 Q \cdot D_3 Q = 0$, $T = (t_{ij})$ невырожденная матрица порядка 3×3 и $P(\xi) = Q(T\xi)$. Тогда в силу пункта I) предложения 1.1 многочлен P почти гипоеллиiptичен. Ради определенности предположим, что $D_1 Q = 0$,

то есть $Q(\eta) = Q(0, \eta_2, \eta_3)$ при всех $\eta \in R^3$. Пусть $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty$ такое решение системы

$$\begin{cases} t_{21}\xi_1 + t_{22}\xi_2 + t_{23}\xi_3 = 0 \\ t_{31}\xi_1 + t_{32}\xi_2 + t_{33}\xi_3 = 0 \end{cases},$$

что $|\xi^s| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$. Существование таких решений очевидно.

Обозначим через $\eta_2^s = t_{21}\xi_1^s + t_{22}\xi_2^s + t_{23}\xi_3^s$, $\eta_3^s = t_{31}\xi_1^s + t_{32}\xi_2^s + t_{33}\xi_3^s$, $s = 1, 2, \dots$

Тогда $P(\xi^s) = Q(T\xi^s) = Q(0, \eta_2^s, \eta_3^s) = Q(0)$, $s = 1, 2, \dots$, то есть $P \notin I_3$.

Необходимость. Пусть $m \equiv \text{ord} P = 1$, то есть $P(\xi) = a\xi_1 + b\xi_2 + c\xi_3 + d$, $abc \neq 0$.

Очевидно, существуют $h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R}$, $h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 \neq 0$ такие, что $h_1a + h_2b + h_3c = 0$.

Для определенности $h_1 \neq 0$, $(h_1 = 1)$. Тогда $P(\xi) = b(-h_2\xi_1 + \xi_2) + c(-h_3\xi_1 + \xi_3) + d$ и $P \notin I_3$. Обозначим

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -h_2 & 1 & 0 \\ -h_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad T\xi = \eta.$$

Тогда $P(\xi) = Q(\eta)|_{\eta=T\xi} = Q(T\xi)$. Так как любой многочлен первого порядка почти гипоеллиптичен, то этим утверждение теоремы для многочленов первого порядка доказана.

Пусть для почти гипоеллиптического многочлена $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \notin I_3$ $m \geq 2$. Представим многочлен $P(\xi)$ в следующем виде

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^m R_j(\xi),$$

где R_j — однородный многочлен порядка j , $j = 0, \dots, m$. Из условия теоремы в силу леммы 2.1 имеем, что $\sum_m (R_m) \setminus \{0\} \neq \emptyset$.

Рассмотрим следующие возможные случаи (см. пункт II) леммы 2.2):

I) $\dim \sum_m (R_m) = 2$, II) $\dim \sum_m (R_m) = 1$.

Пусть в случае I) τ^1, τ^2 базис в $\sum_m (R_m)$, а τ^1, τ^2, τ^3 базис в R^3 . Обозначим через T_1 матрицу

$$T_1 = \begin{pmatrix} \tau_1^1 & \tau_2^1 & \tau_3^1 \\ \tau_1^2 & \tau_2^2 & \tau_3^2 \\ \tau_1^3 & \tau_2^3 & \tau_3^3 \end{pmatrix}^{-1}$$

и положим $Q(\xi) = P(T_1\xi)$. Так как T_1 отображает R^3 на R^3 , то $Q(T_1^{-1}\xi) = P(\xi)$. В силу пункта I) предложения 1.1 многочлен Q почти гипоеллиптичен, а в силу пункта III) леммы 2.2 и пункта II) предложения 1.1 многочлен Q можно представить в следующем виде

$$(4.21) \quad Q(\xi) = d\xi_3^m + \sum_{j=0}^{m-1} \xi_3^j Q_j(\xi_1, \xi_2) \quad \forall \xi \in R^3,$$

где $d \neq 0$, $\text{ord}(Q - d\xi_3^m) \leq m - 1$.

Так как $P \notin I_3$, и $|T\xi| \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $|\xi| \rightarrow \infty$, то $Q \notin I_3$.

Из представления (4.21) и условий $Q \notin I_3$, $\text{ord}(Q - d\xi_3^m) \leq m - 1$ в силу следствия 4.1 имеем, что многочлен Q представляется в следующем виде

$$Q(\xi) = d\xi_3^m + \sum_{j=0}^{m-1} \xi_3^j \sum_{k=0}^{m-1-j} A_{k,j} (a\xi_1 - b\xi_2)^k,$$

где $A_{k,j} \in C$, $k = 0, \dots, m - 1 - j$, $j = 0, \dots, m - 1$, некоторые числа.

Отсюда непосредственно следует необходимая часть теоремы в случае I).

Рассмотрим случай II). Пусть $0 \neq \tau^1 \in \sum_m(R_m)$ и τ^1, τ^2, τ^3 базис в R^3 . Тогда в силу пункта III) леммы 2.2 и пункта II) предложения 1.1 многочлен $Q(\xi) = P(T_1\xi)$ можно представить в следующем виде

$$Q(\xi) = R_m(\xi_2, \xi_3) + \sum_{j=0}^{m-1} \xi_1^j q_j(\xi_2, \xi_3),$$

где R_m - однородный многочлен порядка m , $D_2R_m \cdot D_3R_m \neq 0$ (случай II) и $\text{ord}(Q - R_m) \leq m - 1$.

Пусть для некоторого $1 \leq r \leq m - 1$, $q_r \neq 0$, $q_j = 0$, $j = r + 1, \dots, m - 1$. Тогда

$$(4.22) \quad Q(\xi) = R_m(\xi_2, \xi_3) + \sum_{j=0}^r \xi_1^j q_j(\xi_2, \xi_3), \quad q_r \neq 0, \quad D_2R_m \cdot D_3R_m \neq 0.$$

Из условия почти гипоэллиптичности многочлена P в силу пункта I) предложения 1.1 многочлен Q почти гипоэллиптичен. Так как $P \notin I_3$, и $|T_1\xi| \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $|\xi| \rightarrow \infty$, то $Q \notin I_3$.

Если R_m эллиптический многочлен, то в силу леммы 4.5 $Q(\xi) \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, что противоречит вышесказанному.

Если $R_m(1, 0) \cdot R_m(0, 1) \neq 0$ и R_m не эллиптивен, то $\sum(R_m) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ и $\sum_m(R_m) = \{0\}$ (случай II), тогда противоречие вышесказанному следует из леммы 4.6.

Если же $R_m(1, 0) \cdot R_m(0, 1) = 0$, то противоречие с условием теоремы получим в силу леммы 4.3. Полученные противоречия доказывают, что при условиях теоремы в случае II) $r = 0$ (см. представление (4.22)), то есть

$$Q(\xi) = R_m(\xi_2, \xi_3) + q_0(\xi_2, \xi_3) \quad \text{при всех } \xi \in R^3.$$

Следовательно, $D_1Q = 0$. Так как матрица T_1 обратима, то этим утверждение необходимой части теоремы в случае II) также доказана. Теорема доказана. $\square$

Из теоремы 4.1 непосредственно следует

Следствие 4.2. *Почти гипозэллиптический многочлен P не более трех переменных стремится к бесконечности при $|\xi| \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда не существуют многочлен Q $r \leq n - 1$ переменных и матрица T размерности $r \times n$ такие, что*

$$P(\xi) = Q(T\xi) \quad \text{при всех } \xi \in R^n.$$

Abstract. The paper gives criteria for almost hypoelliptic polynomials of two and three variables, providing that $P(\xi) \rightarrow \infty$ as $|\xi| \rightarrow \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, **2**, Springer-Verlag (1983).
- [2] I. G. Petrowsky, "Sur l'analyticité des solutions des systèmes d'équations différentielles", Rec. Math N. S., **5**(47), no. 1, 3 - 70 (1939).
- [3] L. Hörmander, "On interior regularity of solutions of partial differential equations", Comm. Pure. Appl. Math., **11**, 197 - 218 (1956).
- [4] Г. Г. Казарян, "О почти гипозэллиптических многочленах", Докл. Росс. Акад. Наук, **398**, (6), 701 - 703 (2004).
- [5] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Об одном классе почти гипозэллиптических операторов", Изв. НАН Арм., **41**, no. 6, 39 - 56 (2006).
- [6] В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, **150**, no. 4, 143 - 159 (1965).
- [7] S. Gindikin, L. Volevich, The Method of Newtons Polyhedron in the Theory of PDE, Kluwer (1992).
- [8] H. G. Ghazaryan, V. N. Margaryan, "Behavior at infinity of polynomials of two variable", Kluwer Acad. Publ. NATO Since Series. Dordrecht-Boston-London, Topics in Analysis an Applications, 163 - 190 (2004).

Поступила 26 мая 2010