

Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 1, 2011, стр. 35-48.

**О КОЛИЧЕСТВЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ТИПА ОДНОМЕРНЫХ
ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В
ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА-СЛОБОДЕЦКОГО**

А. Г. КАМАЛЯН, В. В. СИМОНЯН

Ереванский Государственный Университет, Армения
Институт Математики НАН Армении
E-mails: *katalyan_armen@yahoo.com*, *vahan@simonyans.com*

Аннотация. В работе исследуются однородные одномерные псевдодифференциальные уравнения неотрицательного порядка с символами вида $\sum_{i=1}^N th(k_i x + \omega_i) A_i(\xi)$. Используя связь с системами сингулярных интегральных уравнений, получены оценки для количества решений этих уравнений в пространстве Соболева-Слободецкого.

MSC2000 number: 45E05, 47G30

Ключевые слова: Псевдодифференциальное уравнение, матричное сцепление, факторизация.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть S_r^0 - множество локально суммируемых на $\mathbb{R}$ функций f , удовлетворяющих условию $|f(x)| \leq c(1+|x|)^r$, где $r \in \mathbb{R}$, а $H_r(\mathbb{R})$ -пространство Соболева-Слободецкого обобщенных функций u , преобразование Фурье $\hat{u}$ которых принадлежат весовому пространству $L_2(\mathbb{R}, (1+|\xi|)^r)$.

Определим функции

$$A^{(1)}(x, \xi) = 1 + A_0(\xi) + \sum_{k=1}^N \varphi(x, \lambda_k) A_k(\xi)$$

$$A^{(2)}(x, \xi) = 1 + P(\varphi(x, \lambda)) \tilde{A}(\xi), \quad x, \xi, \lambda \in \mathbb{R},$$

где

$$\varphi(x, \lambda) = th \frac{\pi}{\alpha} \left(x - \lambda + i \frac{\alpha\beta}{2} \right), \quad A_m, \tilde{A} \in S_r^0, \quad P(z) = \prod_{k=1}^N (z - \nu_k), \quad x \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C},$$

причем $\{\lambda_k\}_1^N \in \mathbb{R}$ и $\{\nu_k\}_1^N \in \mathbb{C}$ суть конечные последовательности, $(m = 0, 1, \dots, N)$, $\alpha > 0$, $-1 < \beta < 1$. Как известно (см. [1]) псевдодифференциальный оператор

$A^{(i)}(x, D)$ действующий по формуле

$$A^{(i)}(x, D)y = F_{\xi \rightarrow x}^{-1} A^{(i)}(x, \xi) F_{x \rightarrow \xi} y = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} A^{(i)}(x, \xi) \widehat{y}(\xi) d\xi \quad i = 1, 2,$$

является ограниченным оператором из $H_r(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R})$.

Заметим, что в случае $N = 1$ и $r = 0$ оператор $A^{(1)}(x, D)$, также как оператор $A^{(2)}(x, D)$ в случае $r = 0$ и $\deg P = 1$, становится известным интегральным оператором “плавного перехода” (более подробно см. [2]-[6]). В случае когда $N = 1$, а A_0 и A_1 - многочлены ($\deg P = 1$, $\tilde{A}$ - многочлен), дифференциальное уравнение $A^{(1)}(x, D)y = 0$ ($A^{(2)}(x, D)y = 0$) может быть записано в виде $(P_1(D) + e^x P_2(D))y = 0$, где $D = i \frac{d}{dx}$, а P_1 и P_2 некоторые многочлены. Последнее с помощью замены переменной сводится к хорошо известному дифференциальному уравнению

$$\epsilon t \prod_{j=1}^p \left(t \frac{d}{dt} - a_j + 1 \right) y + \prod_{j=1}^q \left(t \frac{d}{dt} - b_j \right) y = 0,$$

где $\epsilon = \pm 1$, $p, q \in \mathbb{N}$, а $a_j, b_j \in \mathbb{C}$. Решения этого уравнения записываются с помощью G - функции Мейера (см. [7]-[10]).

Случай $N = 1$ $r \geq 0$ при некоторых дополнительных условиях подробно рассмотрен в [11], где, в частности, получены все решения однородного уравнения $A^{(1)}(x, D)y = 0$ в классе $H_r(\mathbb{R})$. В работе [12] результаты полученные в [11] переведены на случай одной системы псевдодифференциальных уравнений. В случае $N > 1$ исследование операторов $A^{(i)}(x, D)$ ($i = 1, 2$) сводится к исследованию матричных сингулярных интегральных операторов (см. [13]).

На основе этой связи в данной работе приводятся достаточные условия обеспечивающие существование нетривиальных решений уравнений $A^{(i)}(x, D)y = 0$ ($i = 1, 2$) из класса $H_r(\mathbb{R})$. Получены оценки снизу для количества таких решений. Отдельно рассматривается дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=0}^N e^{kx} P_k(D)y = 0,$$

где $P_k(D)$ ($k = 0, 1, \dots, N$; $D = i \frac{d}{dx}$) – дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.

2. УРАВНЕНИЕ $A^{(1)}(x, D)y = 0$.

Пусть $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$ – единичная окружность комплексной плоскости, а $S_{\mathbb{T}}$ -оператор сингулярного интегрирования вдоль контура $\mathbb{T}$:

$$(S_{\mathbb{T}}y)(t) = \frac{1}{\pi i} v.p. \int_{\mathbb{T}} y(\tau) \frac{d\tau}{\tau - t} \quad (t \in \mathbb{T}).$$

Оператор $S_{\mathbb{T}}$ ограничен в пространстве $L_2(\mathbb{T}, |\tau|^\beta)$, где $\tau(\zeta) = i(\zeta + 1)/(1 - \zeta)$ ($\zeta \in \mathbb{T}$) (см. [14]). Пусть $P_{\mathbb{T}}^\pm$ действующие в пространстве $L_2(\mathbb{T}, |\tau|^\beta)$ проекторы, определенные равенствами $P_{\mathbb{T}}^\pm = \frac{1}{2}(I \pm S_{\mathbb{T}})$, а $L_2^\pm(\mathbb{T}, |\tau|^\beta) = P_{\mathbb{T}}^\pm L_2(\mathbb{T}, |\tau|^\beta)$. Аналогично, через $S_{\mathbb{R}}$ будем обозначать оператор сингулярного интегрирования вдоль $\mathbb{R}$:

$$(S_{\mathbb{R}}y)(t) = \frac{1}{\pi i} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \frac{d\tau}{\tau - t} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Пусть $\rho_0(t) = |t|^\beta$ ($t \in \mathbb{R}$), а $B : L_2(\mathbb{R}, \rho_0) \rightarrow L_2(\mathbb{T}, |\tau|^\beta)$ -оператор “пересадки”, определенный равенством $(B\varphi)(\zeta) = (1 - \zeta)^{-1} \varphi(\tau(\zeta))$ (см. [14]). Из ограниченности оператора B и равенства $B^{-1}S_{\mathbb{T}}B = S_{\mathbb{R}}$ следует ограниченность операторов $S_{\mathbb{R}}$ и $P_{\mathbb{R}}^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm S_{\mathbb{R}})$ (см. [14]).

Обозначая $h(x) = \alpha^{-1} \ln x$ ($x \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$), определим следующие функции

$$\Psi_k = A_k \circ h, \quad \tilde{\Psi} = \left(1 + \Psi_0 - \sum_{i=1}^N \Psi_i\right)^{-1} \quad \text{и} \quad \Delta_{l,k} = \exp \left\{ i \frac{\lambda_k - \lambda_l}{\alpha} \ln x \right\},$$

где $l = 1, 2, \dots, N$; $k = 0, 1, \dots, N$, а λ_0 – произвольное действительное число.

Пусть матрица-функция $G_{\mathbb{R}}$ совпадает с единичной матрицей E_N на $\mathbb{R}_- = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+$, и на $\mathbb{R}_+$

$$G_{\mathbb{R}} = \begin{bmatrix} 1 + 2\Psi_1\tilde{\Psi} & 2\Psi_1\tilde{\Psi}\Delta_{1,2} & 2\Psi_1\tilde{\Psi}\Delta_{1,3} & \cdots & 2\Psi_1\tilde{\Psi}\Delta_{1,N} \\ 2\Psi_2\tilde{\Psi}\Delta_{2,1} & 1 + 2\Psi_2\tilde{\Psi} & 2\Psi_2\tilde{\Psi}\Delta_{2,3} & \cdots & 2\Psi_2\tilde{\Psi}\Delta_{2,N} \\ 2\Psi_3\tilde{\Psi}\Delta_{3,1} & 2\Psi_3\tilde{\Psi}\Delta_{3,2} & 1 + 2\Psi_3\tilde{\Psi} & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 2\Psi_N\tilde{\Psi}\Delta_{N,1} & 2\Psi_N\tilde{\Psi}\Delta_{N,2} & & & 1 + 2\Psi_N\tilde{\Psi} \end{bmatrix}.$$

Пусть $G_{\mathbb{T}}(\xi) = G_{\mathbb{R}}(\tau(\xi))$. Под обобщенной правой факторизацией матрицы-функции $G_{\mathbb{T}}$ в пространстве $L_2(\mathbb{T}, |\tau|^\beta)$ мы будем понимать представление

$$(2.1) \quad G_{\mathbb{T}} = G_- \Lambda G_+,$$

где

$$G_-^{\pm 1} \in L_2^-(\mathbb{T}, |\tau|^{\pm\beta}), \quad G_+^{\pm 1} \in L_2^+(\mathbb{T}, |\tau|^{\mp\beta}), \quad \Lambda(t) = \text{diag}(t^{\kappa_1}, \dots, t^{\kappa_N})$$

и $\kappa_1 \geq \dots \geq \kappa_n \geq 0 \geq \kappa_{n+1} \geq \dots \geq \kappa_N$ - целые числа называемые правыми частными индексами матрицы-функции. Заметим, что оператор $G_- S_{\mathbb{T}} G_-^{-1}$ ограничен в пространстве $L_2(\mathbb{T}, |\tau|^\beta)$.

Здесь и далее принадлежность матриц-функций функциональным классам понимается поэлементно, а действие оператора $S_{\mathbb{T}}$ ($S_{\mathbb{R}}$) на вектор-функции понимается покомпонентно.

Следуя схеме предложенной в [15] введем функции

$$\begin{aligned} \rho_+(z) &= z^{\beta/2}, \quad -\pi < \arg z \leq \pi, \quad \rho_-(z) = z^{\beta/2}, \quad -\pi \leq \arg z < \pi, \\ \rho'_+(z) &= \rho_+(\tau(z)), \quad (|z| < 1), \quad \rho'_-(z) = \rho_-(\tau(z)), \quad (|z| > 1) \end{aligned}$$

и квадратные матрицы-функции порядка N

$$\hat{\rho}_{\pm} = \text{diag}(\rho_{\pm}, \dots, \rho_{\pm}), \quad \hat{\rho}'_{\pm} = \text{diag}(\rho'_{\pm}, \dots, \rho'_{\pm}).$$

Определим также матрицы-функции

$$G' = \hat{\rho}'_- G_{\mathbb{T}} (\hat{\rho}'_+)^{-1}, \quad G'_- = \hat{\rho}'_- G_- \quad \text{и} \quad G'_+ = G_+ (\hat{\rho}'_+)^{-1}.$$

Пользуясь равенством $\rho_{\pm} L_2^{\pm}(\mathbb{T}, |t|^{\beta}) = L_2^{\pm}(\mathbb{T})$ (см. более подробно [11]) нетрудно убедиться, что представление (2.1) является обобщенной правой факторизацией в пространстве $L_2(\mathbb{T}, |\tau|^{\beta})$ тогда и только тогда, когда представление $G' = G'_- \Lambda G'_+$ является обобщенной правой факторизацией G' в пространстве $L_2(\mathbb{T})$. Переходя в последнем представлении к транспонированным матрицам, получим что представление $G'^{Tr} = G'^{Tr}_+ \Lambda G'^{Tr}_-$ является обобщенной левой факторизацией матрицы-функции G'^{Tr} в пространстве $L_2(\mathbb{T})$ (см. [16]).

Определим следующие функции

$$Q_i(x) = 1 + A_0(x) - (-1)^i \sum_{k=1}^N A_k(x), \quad i = 1, 2 \quad \text{и} \quad Q(x) = Q_1(x) Q_2^{-1}(x).$$

Ниже в теоремах 2.1 и 3.1 предполагается, что значения $\arg$ принимаются в интервале $(-\pi, \pi]$.

Теорема 2.1. Пусть $r \geq 0$, $A_k \in C(\mathbb{R}) \cap S_r^0$ ($k = 0, 1, \dots, N$), $Q_i^{-1} \in S_{-r}^0$ ($i = 1, 2$), существуют не нулевые конечные пределы $q_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} Q(x)$ и $\theta_{\pm} = \arg(e^{i\pi\beta} q_{\pm}) \neq \pi$. Если целое число

$$(2.2) \quad \kappa = \frac{1}{2\pi} \left(\text{Arg} Q(x)|_{-\infty}^{+\infty} - \theta_+ + \theta_- \right)$$

меньше нуля, то уравнение $A^{(1)}(x, D) y = 0$ имеет по крайней мере $|\kappa|$ решений из класса $H_r(\mathbb{R})$.

В случае дифференциального оператора т.е. когда функции A_k ($k = 0, 1, \dots, N$) являются многочленами, число κ равно $l_1 - l_2$, где l_i - количество нулей многочлена Q_i ($i = 1, 2$) в верхней полуплоскости.

Заметим, что в теореме 2.1 одно из условий $Q_1^{-1} \in S_{-r}^0$ и $Q_2^{-1} \in S_{-r}^0$ может быть опущено. Действительно, нетрудно убедиться, что выполнение одного из этих условий наряду с существованием не нулевых $q_{\pm}$ обеспечивает выполнение второго условия.

Доказательство. Определим сингулярный интегральный оператор

$$K = P_{\mathbb{R}}^+ \Xi_{M+N} + P_{\mathbb{R}}^- \Xi_{M-N},$$

где

$$M = \begin{bmatrix} \Psi^{-1} \Delta_{1,0} + \Psi_0 \Psi^{-1} \Delta_{1,0} & -\Delta_{1,2} & \cdots & -\Delta_{1,N} \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} \Psi_1 \Psi^{-1} \Delta_{1,0} & 0 & \cdots & 0 \\ \Psi_2 \Psi^{-1} \Delta_{2,0} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Psi_N \Psi^{-1} \Delta_{N,0} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь и ниже Ξ_{Φ} означает оператор умножения на матрицу-функцию Φ : $\Xi_{\Phi} y = \Phi y$.

Нетрудно вычислить, что

$$\det(M \pm N)^{-1} = \Psi \left[\Delta_{1,0} \left(1 + \Psi_0 \pm \sum_{k=1}^N \Psi_k \right) \right]^{-1}.$$

Из условий $Q_i^{-1} \in S_{-r}^0$, $i = 1, 2$ следует, что $Q_i(x) \neq 0$ $x \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ и что $(M \pm N)^{-1} \in L_{\infty}$. Нетрудно убедиться, что $G_{\mathbb{R}} = (M + N)(M - N)^{-1}$ и кроме того для $x > 0$ $\det G_{\mathbb{R}}(x) = Q(h(x))$, а для $x < 0$ $\det G_{\mathbb{R}}(x) = 1$. Поскольку $K = K_{\mathbb{R}} \Xi_{M-N}$, где $K_{\mathbb{R}} = P_{\mathbb{R}}^+ \Xi_{G_{\mathbb{R}}} + P_{\mathbb{R}}^-$, то $\dim \text{Ker} K = \dim \text{Ker} K_{\mathbb{R}}$. Из лемм 1 и 2 работы [13] следует, что количество линейно независимых решений, из класса $H_r(\mathbb{R})$, уравнения $A(x, D)y = 0$ совпадает с размерностью пространства $\text{Ker} K_{\mathbb{R}}$. Определим оператор

$$K_{\mathbb{T}} = B K_{\mathbb{R}} B^{-1} = P_{\mathbb{T}}^+ \Xi_{G_{\mathbb{T}}} + P_{\mathbb{T}}^-,$$

где $G_{\mathbb{T}}(\xi) = G_{\mathbb{R}}(\tau(\xi))$ ($\xi \in \mathbb{T}$). Очевидно, что $\dim \text{Ker} K_{\mathbb{R}} = \dim \text{Ker} K_{\mathbb{T}}$. Элементы матрицы-функции $G_{\mathbb{T}}$ являются непрерывными всюду на $\mathbb{T}$, за исключением

быть может точек $t_1 = 1$ и $t_2 = -1$, в которых существуют односторонние пределы $G_{\mathbb{T}}(t_j \pm 0)$ ($j = 1, 2$). Очевидно аналогичное утверждение справедливо и для матрицы-функции $G'^{Tr}(t)$. Для $t \in \mathbb{T}^+ = \{t : t \in \mathbb{T}; \text{Im} t > 0\}$ справедливо равенство $G'^{Tr}(t) = \text{diag}(e^{-i\pi\beta}, \dots, e^{-i\pi\beta})$ и потому $\det G'^{Tr}(t) \neq 0$ ($t \in \mathbb{T}^+$). Кроме того $\det G'^{Tr}(1+0) \neq 0$ и $\det G'^{Tr}(-1-0) \neq 0$. Для $t \in \mathbb{T}^- = \{t : t \in \mathbb{T}; \text{Im} t < 0\}$ имеет место равенство $G'^{Tr}(t) = G_{\mathbb{R}}^{Tr}(\tau(t))$. Поскольку $\det G_{\mathbb{R}}(\xi) = Q(h(\xi))$ при $\xi > 0$, то из условия теоремы следует, что $\det G'^{Tr}(t) \neq 0$ для $t \in \mathbb{T}^-$ и кроме того $\det G'^{Tr}(1-0) \neq 0$, $\det G'^{Tr}(-1+0) \neq 0$.

Собственные значения матриц $(G'^{Tr}(t_j - 0))^{-1} G'^{Tr}(t_j + 0)$ ($j = 1, 2$) обозначим через λ_{jk} . Непосредственным подсчетом несложно убедиться, что

$$\lambda_{11} = e^{-i\pi\beta} \frac{1 + \Psi_0(+\infty) - \sum_{k=1}^N \Psi_k(+\infty)}{1 + \Psi_0(+\infty) + \sum_{k=1}^N \Psi_k(+\infty)} = e^{-i\pi\beta} q_+^{-1},$$

$$\lambda_{1k} = e^{-i\pi\beta} \quad (k = 2, \dots, N),$$

$$\lambda_{21} = e^{i\pi\beta} \frac{1 + \Psi_0(+0) + \sum_{k=1}^N \Psi_k(+0)}{1 + \Psi_0(+0) - \sum_{k=1}^N \Psi_k(+0)} = e^{i\pi\beta} q_-,$$

$$\lambda_{2k} = e^{i\pi\beta} \quad (k = 2, \dots, N).$$

Заметим, что $\arg \lambda_{11} = -\theta_+ \neq \pi$ и $\arg \lambda_{21} = \theta_- \neq \pi$, $\arg \lambda_{jk} \neq \pi$ ($j = 1, 2; k = 2, \dots, N$).

Таким образом выполнены условия:

- (1) для всех $t \in \mathbb{T}$ $\det G'^{Tr}(t \pm 0) \neq 0$,
- (2) все собственные значения матриц $(G'^{Tr}(t_j - 0))^{-1} G'^{Tr}(t_j + 0)$ ($j = 1, 2$) лежат вне $\mathbb{R}_-$.

Из теоремы 5.16 работы [16] следует, что матрица-функция G'^{Tr} допускает левую обобщенную факторизацию в пространстве $L_2(\mathbb{T})$, причем левый суммарный индекс матрицы-функции G'^{Tr} вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{2\pi} \{ \text{Arg} \det G'^{Tr}(t) \}_{t \in \mathbb{T}^-} + \frac{1}{2\pi} \{ \text{Arg} \det G'^{Tr}(t) \}_{t \in \mathbb{T}^+} + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^N \arg \lambda_{jk} = \frac{1}{2\pi} \left(\{ \text{Arg} \det G'^{Tr}(t) \}_{t \in \mathbb{T}^-} - \theta_+ + \theta_- \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\text{Arg} Q(x) |_{-\infty}^{+\infty} - \theta_+ + \theta_- \right). \end{aligned}$$

Как было уже отмечено выше, тогда матрица-функция $G_{\mathbb{T}}$ обладает правой обобщенной факторизацией в пространстве $L_2(\mathbb{T}, |\tau|^\beta)$, причем правые частные индексы (соответственно правый суммарный индекс) $G_{\mathbb{T}}$ совпадают с левыми частными индексами (соответственно с левым суммарным индексом) G'^{Tr} . Из теоремы 4.2 работы [17] следует, что число $\dim \text{Ker} K_{\mathbb{R}} = \dim \text{Ker} K_{\mathbb{T}}$ равно модулю суммы отрицательных правых частных индексов матрицы-функции $G_{\mathbb{T}}$, которая в случае $\kappa < 0$, не меньше чем $|\kappa|$.

В случае дифференциального оператора имеет место равенство $q_+ = q_-$, а число $\frac{1}{2\pi} \left(\text{Arg} Q(x) \right)_{-\infty}^{+\infty}$ равно разности нулей и полюсов в верхней полуплоскости рациональной функции Q . Теорема 2.1 доказана. $\square$

3. УРАВНЕНИЕ $A^{(2)}(x, D)y = 0$.

Функция $A^{(2)}(x, \xi)$ при подходящем выборе чисел λ_k ($k = 1, \dots, N$) и функций $A_k(\xi)$ может быть записана в виде

$$1 + A_0(\xi) + \sum_{k=1}^N \varphi(x, \lambda_k) A_k(\xi).$$

Тем не менее применение теоремы 2.1 к уравнению $A^{(2)}(x, D)y = 0$ осложнено в связи с необходимостью явного нахождения упомянутых переменных λ_k , $A_k(\xi)$. Для оценки количества решений уравнения $A^{(2)}(x, D)y = 0$ мы здесь предлагаем прямой подход не опирающийся на теорему 2.1.

Теорема 3.1. Пусть $r > 0$, $\tilde{A} \in S_r^0 \cap C(\mathbb{R})$, $\tilde{A}^{-1} \in S_{-r}^0 \cap C(\mathbb{R})$, $P(\pm 1) \neq 0$, $1 + P(\pm 1)\tilde{A}(x) \neq 0$ ($x \in \mathbb{R}$), $\arg \left(e^{-i\pi\beta \frac{\nu_k+1}{\nu_k-1}} \right) \neq \pi$ ($k = 1, \dots, N$) и целое число κ определяется равенством

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} \text{Arg} \frac{1 + P(1)\tilde{A}(x)}{1 + P(-1)\tilde{A}(x)} \Big|_{-\infty}^{+\infty}.$$

Тогда, если $\kappa < 0$, то уравнение $A^{(2)}(x, D)y = 0$ имеет по крайней мере $|\kappa|$ решений из $H_r(\mathbb{R})$.

Доказательство. Пусть $M_r(\mathbb{R})$ – некоторое прямое дополнение к линейному пространству $H_r(\mathbb{R})$ в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, а $\pi_1 : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow H_r(\mathbb{R})$, $\pi_2 : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_r(\mathbb{R})$ операторы проектирования связанные соотношением $\pi_1 y + \pi_2 y = y$ для $y \in L_2(\mathbb{R})$.

Очевидно, что оператор $\gamma : L_2(\mathbb{R}_+, \rho_0) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ определенный равенством $\gamma y = e^{sx} y(e^{\alpha x})$ ($\sigma = \alpha(\beta + 1)/2$; $s = \sigma + i\lambda$; $\lambda \in \mathbb{R}$) является ограниченным и обратимым.

Определим операторы

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \pi_1 F^{-1} \gamma : L_2(\mathbb{R}_+, \rho_0) \rightarrow H_r(\mathbb{R}), \\ \omega_2 &= \sum_{k=0}^N c_k S_{\mathbb{R}_+}^k \gamma^{-1} F \tilde{A}(D) : H_r(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}_+, \rho_0), \\ \omega_3 &= \pi_2 F^{-1} \gamma : L_2(\mathbb{R}_+, \rho_0) \rightarrow M_r(\mathbb{R}), \\ \omega_4 &= \Lambda_{\Psi^{-1}} : W \rightarrow L_2(\mathbb{R}_+, \rho_0),\end{aligned}$$

где $W = \left\{ f : \tilde{A}^{-1}(h)f \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho_0) \right\}$.

Непосредственным подсчетом нетрудно убедиться, что

$$\begin{bmatrix} I_{H_r(\mathbb{R})} + \omega_1 \omega_2 & -\omega_1 & 0 \\ \omega_3 \omega_2 & -\omega_3 & I_{M_r(\mathbb{R})} \\ -\omega_4^{-1} \omega_2 & \omega_4^{-1} & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_{H_r(\mathbb{R})} & 0 & \omega_1 \omega_4 \\ \omega_2 & 0 & \omega_4 + \omega_2 \omega_1 \omega_4 \\ 0 & I_{M_r(\mathbb{R})} & \omega_3 \omega_4 \end{bmatrix}.$$

Поскольку оператор $A^{(2)}(x, D)$ может быть представлен равенством

$$A^{(2)}(x, D) = \begin{bmatrix} I_{H_r(\mathbb{R})} + \omega_1 \omega_2 \\ \omega_3 \omega_2 \end{bmatrix} : H_r(\mathbb{R}) \rightarrow \begin{matrix} H_r(\mathbb{R}) \\ \oplus \\ M_r(\mathbb{R}) \end{matrix},$$

то полученное матричное тождество осуществляет матричное сцепление (см. [18]) между оператором $A^{(2)}(x, D)$ и

$$K' = \begin{bmatrix} \omega_4 + \omega_2 \omega_1 \omega_4 \\ \omega_3 \omega_4 \end{bmatrix} : W \rightarrow \begin{matrix} L_2(\mathbb{R}_+, \rho_0) \\ \oplus \\ M_r(\mathbb{R}) \end{matrix}.$$

Из свойств матричного сцепления следует, что $\dim \text{Ker} A^{(2)}(x, D) = \dim \text{Ker} K'$.

Пусть $z \in W$ и $K'z = 0$. Последнее в раскрытой форме означает справедливость следующий двух равенств

$$(3.1) \quad \Xi_{\Psi^{-1}} z + \sum_{k=0}^N c_k S_{\mathbb{R}_+}^k \gamma^{-1} F \tilde{A}(D) \pi_1 F^{-1} \gamma \Xi_{\Psi^{-1}} z = 0,$$

$$(3.2) \quad \pi_2 F^{-1} \gamma \Xi_{\Psi^{-1}} z = 0.$$

Равенство (3.2) эквивалентно тому, что $z \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho_0)$ (см. например доказательство леммы 2 из [13]). Из равенства (3.2) следует, что равенство (3.1) может быть записано в виде

$$(3.3) \quad \Xi_{\Psi^{-1}} z + \sum_{k=0}^N c_k S_{\mathbb{R}_+}^k \Xi_{\tilde{A} \circ h} \Xi_{\Psi^{-1}} z = 0.$$

Умножив обе части равенства (3.3) на $A' = \tilde{A} \circ h$ и обозначив $A'\Psi^{-1}z$ через u получим, что $K_{\mathbb{R}_+}^{(1)}u = 0$, где $K_{\mathbb{R}_+}^{(1)}u = u + A' \sum_{k=0}^N c_k S_{\mathbb{R}_+}^k u$. Поскольку $\tilde{A} \in S_r^0$, то $A'\Psi^{-1}$ ограничена и потому $u \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho_0)$. Из условия $\tilde{A}^{-1} \in S_{-r}^0$ следует, что $z = \Psi A'^{-1}u$ принадлежит $L_2(\mathbb{R}_+, \rho_0)$ как только $u \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho_0)$. Отсюда следует, что если $K_{\mathbb{R}_+}^{(1)}u = 0$ и $u \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho_0)$, то $K'z = 0$, где $z = \Psi A'^{-1}u$. Таким образом $\dim \text{Ker} K'$ совпадает с количеством линейно независимых решений из $L_2(\mathbb{R}_+, \rho_0)$ уравнения $K_{\mathbb{R}_+}^{(1)}u = 0$.

Обозначая $u_1 = u$, $u_N = (S_{\mathbb{R}_+} - \nu_N I) u_1$ и $u_i = (S_{\mathbb{R}_+} - \nu_i I) u_{i+1}$ ($i = 2, \dots, N-1$) легко видеть, что количество линейно независимых решений из $L_2(\mathbb{R}_+, \rho_0)$ уравнения $K_{\mathbb{R}_+}^{(1)}u = 0$ совпадает с количеством линейно независимых решений системы уравнений

$$(3.4) \quad \begin{cases} u_1 + A' (S_{\mathbb{R}_+} - \nu_1 I) u_2 = 0 \\ u_2 - (S_{\mathbb{R}_+} - \nu_2 I) u_3 = 0 \\ \dots \\ u_{N-1} - (S_{\mathbb{R}_+} - \nu_{N-1} I) u_N = 0 \\ u_N - (S_{\mathbb{R}_+} - \nu_N I) u_1 = 0 \end{cases}$$

из $L_2^N(\mathbb{R}_+, \rho_0) = L_2(\mathbb{R}_+, \rho_0) \oplus \dots \oplus L_2(\mathbb{R}_+, \rho_0)$.

Введем матрицы

$$M' = \begin{bmatrix} 1 & -A'\nu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \nu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \nu_{N-1} \\ \nu_N & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N' = \begin{bmatrix} 0 & A' & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

и оператор $K_{\mathbb{R}_+}^{(N)}$ действующий в пространстве $L_2^N(\mathbb{R}_+, \rho_0)$ по формуле

$$K_{\mathbb{R}_+}^{(N)} \bar{u} = M' \bar{u} + N' S_{\mathbb{R}_+} \bar{u}.$$

Систему (3.4) можно записать в виде $K_{\mathbb{R}_+}^{(N)} \bar{u} = 0$.

Пусть

$$\widetilde{M}(x) = \begin{cases} M'(x) & x \in \mathbb{R}_+ \\ E_N & x \in \mathbb{R}_- \end{cases}, \quad \widetilde{N}(x) = \begin{cases} N'(x) & x \in \mathbb{R}_+ \\ 0 & x \in \mathbb{R}_- \end{cases}.$$

Определим оператор $K_{\mathbb{R}}^{(N)}$ действующий в пространстве $L_2^N(\mathbb{R}, \rho_0)$ по формуле

$$K_{\mathbb{R}}^{(N)} \bar{u} = \Xi_{\widetilde{M}} \bar{u} + \Xi_{\widetilde{N}} S_{\mathbb{R}} \bar{u}.$$

Очевидно, что $\dim \text{Ker} K_{\mathbb{R}}^{(N)} = \dim \text{Ker} K_{\mathbb{R}_+}^{(N)}$. Следовательно

$$\dim \text{Ker} A^{(2)}(x, D) = \dim \text{Ker} K_{\mathbb{R}}^{(N)}.$$

Обозначив $\tilde{G}^\pm = \tilde{M} \pm \tilde{N}$ и $\tilde{G}_\mathbb{R} = \left(\tilde{G}^-\right)^{-1} \tilde{G}^+$, получим, что

$$K_\mathbb{R}^{(N)} \bar{u} = \Xi_{\tilde{G}^+} P_\mathbb{R}^+ \bar{u} + \Xi_{\tilde{G}^-} P_\mathbb{R}^- \bar{u} = \Xi_{\tilde{G}^-} \tilde{K}_\mathbb{R} \bar{u},$$

где $\tilde{K}_\mathbb{R} = \Xi_{\tilde{G}_\mathbb{R}} P_\mathbb{R}^+ + P_\mathbb{R}^-$.

Учитывая, что на $\mathbb{R}_+$ справедливо равенство $\det \tilde{G}^- = 1 + P(-1) A'$ нетрудно убедиться, что элементы матрицы-функции $\left(\tilde{G}^-\right)^{-1} = \|g_{ij}^-\|_{i,j=1}^N$, на $\mathbb{R}_+$ допускают представление $g_{ij}^- = \frac{\sigma_{ij} + k_{ij} A'}{1 + P(-1) A'}$, где $\sigma_{ij}, k_{ij} \in \mathbb{C}$ ($i, j = 1, \dots, N$), причем $k_{i1} = 0$ ($i = 1, \dots, N$). Учитывая также, что на $\mathbb{R}_+$ все элементы матрицы $\tilde{G}^+ = \|g_{ij}^+\|_{i,j=1}^N$ постоянные числа кроме $g_{1,2}^+ = (1 - \nu_1) A'$, нетрудно видеть, что элементы матрицы $\tilde{G}_\mathbb{R} = \|g_{ij}\|_{i,j=1}^N$ на $\mathbb{R}_+$ могут быть представлены в виде $g_{ij} = \frac{\gamma_{ij} + \delta_{ij} A'}{1 + P(-1) A'}$, где $\gamma_{ij}, \delta_{ij} \in \mathbb{C}$ ($i, j = 1, \dots, N$). Поскольку $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tilde{A}(x) = \infty$, то отсюда следует существование пределов $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_{ij}(x)$ и $\lim_{x \rightarrow +0} g_{ij}(x)$.

Определим оператор

$$\tilde{K}_\mathbb{T} = B \tilde{K}_\mathbb{R} B^{-1} = \Xi_{\tilde{G}_\mathbb{T}} P_\mathbb{T}^+ + P_\mathbb{T}^-,$$

где $\tilde{G}_\mathbb{T}(\xi) = \tilde{G}_\mathbb{T}(\tau(\xi))$ ($\xi \in \mathbb{T}$). Очевидно, что $\dim \text{Ker} A^{(2)}(x, D) = \dim \text{Ker} \tilde{K}_\mathbb{T}$.

Определим

$$\tilde{G}'^{Tr}(t) = \begin{cases} \text{diag}(e^{-i\pi\beta}, \dots, e^{-i\pi\beta}) & t \in \mathbb{T}^+ \\ \tilde{G}_\mathbb{R}^{Tr}(\tau(t)) & t \in \mathbb{T}^- \end{cases}.$$

Легко видеть, что матрица-функция $\tilde{G}'^{Tr}$ непрерывна всюду на $\mathbb{T}$, быть может за исключением точек $t_1 = 1$ и $t_2 = -1$. В силу условий $1 + P(\pm 1) \tilde{A}(x) \neq 0$ ($x \in \mathbb{R}$) следует, что $\det \tilde{G}'^{Tr}(t) \neq 0$ ($t \in \mathbb{T} \setminus \{-1, 1\}$). Кроме того, справедливы равенства

$$\tilde{G}'^{Tr}(1-0) = \tilde{G}_\mathbb{R}^{Tr}(+\infty), \quad \tilde{G}'^{Tr}(1+0) = \text{diag}(e^{-i\pi\beta}, \dots, e^{-i\pi\beta}),$$

$$\tilde{G}'^{Tr}(-1-0) = \text{diag}(e^{-i\pi\beta}, \dots, e^{-i\pi\beta}), \quad \tilde{G}'^{Tr}(-1+0) = \tilde{G}_\mathbb{R}^{Tr}(+0).$$

Поскольку $r > 0$, то

$$\tilde{G}_\mathbb{R}^{Tr}(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + P(1) A'(x)}{1 + P(-1) A'(x)} = \frac{P(1)}{P(-1)},$$

$$\tilde{G}_\mathbb{R}^{Tr}(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 + P(1) A'(x)}{1 + P(-1) A'(x)} = \frac{P(1)}{P(-1)}.$$

Таким образом можно утверждать, что $\det \tilde{G}'^{Tr}(t \pm 0) \neq 0$ для всех $t \in \mathbb{T}$.

Вычислим собственные значения матриц $\left(\tilde{G}'^{Tr}(t_j - 0)\right)^{-1} \tilde{G}'^{Tr}(t_j + 0)$ ($j = 1, 2$).

Заметим, что

$$\left(\tilde{G}'^{Tr}(1-0)\right)^{-1} \tilde{G}'^{Tr}(1+0) = \left[\left(e^{i\pi\beta} \tilde{G}_\mathbb{R}(+\infty)\right)^{Tr}\right]^{-1},$$

$$\left(\tilde{G}'^{Tr}(-1-0)\right)^{-1} \tilde{G}'^{Tr}(-1+0) = \left(e^{i\pi\beta} \tilde{G}_{\mathbb{R}}(+0)\right)^{Tr}.$$

Поскольку

$$\det \left\{ \left[\left(e^{i\pi\beta} \tilde{G}_{\mathbb{R}}(+\infty) \right)^{Tr} \right]^{-1} - \lambda E_N \right\} = \frac{\det \left(e^{i\pi\beta} \tilde{G}_{\mathbb{R}}(+\infty) - \frac{1}{\lambda} E_N \right)}{\det \left(e^{i\pi\beta} \tilde{G}_{\mathbb{R}}(+\infty) \right) \det \left(-\frac{1}{\lambda} E_N \right)},$$

то собственное значение матрицы $\left(\tilde{G}'^{Tr}(1-0)\right)^{-1} \tilde{G}'^{Tr}(1+0)$ совпадает с корнями уравнения $\det \left(e^{i\pi\beta} \tilde{G}_{\mathbb{R}}(+\infty) - \frac{1}{\lambda} E_N \right) = 0$.

Для $x > 0$ имеет место равенство

$$\det \left(e^{i\pi\beta} \tilde{G}_{\mathbb{R}}(x) - \frac{1}{\lambda} E_N \right) = \frac{\det \left(e^{i\pi\beta} \tilde{G}^+(x) - \frac{1}{\lambda} \tilde{G}^-(x) \right)}{\det \left(\tilde{G}^-(x) \right)}.$$

Обозначим $\eta_{\pm} = e^{i\pi\beta} \pm \frac{1}{\lambda}$. Вычисляя определитель матрицы

$$e^{i\pi\beta} \tilde{G}^+(x) - \frac{1}{\lambda} \tilde{G}^-(x) = \begin{bmatrix} \eta_- & A'(x)[\eta_+ - \nu_1 \eta_-] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \eta_- & \nu_2 \eta_- - \eta_+ & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \eta_- & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \nu_{N-1} \eta_- - \eta_+ \\ \nu_N \eta_- - \eta_+ & 0 & \cdots & 0 & \eta_- \end{bmatrix}$$

для $x > 0$ и учитывая равенство $\det \tilde{G}^-(x) = 1 + P(-1) A'(x)$ ($x > 0$) получим

$$(3.5) \quad \det \left(e^{i\pi\beta} \tilde{G}_{\mathbb{R}}(x) - \frac{1}{\lambda} E_N \right) = \frac{\eta_-^N + (-1)^N A'(x) \prod_{k=1}^N [\nu_k \eta_- - \eta_+]}{1 + P(-1) A'(x)}.$$

Заметив, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + P(-1) \tilde{A}(x) \right]^{-1} = 0$, и переходя в (3.5) к пределу $x \rightarrow +\infty$, получим что уравнение

$$\det \left(e^{i\pi\beta} \tilde{G}_{\mathbb{R}}(+\infty) - \frac{1}{\lambda} E_N \right) = 0$$

эквивалентно соотношению

$$\prod_{k=1}^N [\lambda e^{i\pi\beta} (1 - \nu_k) + (1 + \nu_k)] = 0.$$

Таким образом $\lambda_{1k} = e^{-i\pi\beta} \frac{\nu_k + 1}{\nu_k - 1}$ ($k = 1, \dots, N$).

Аналогично, нетрудно убедиться, что собственные значения матрицы

$$\left(\tilde{G}'^{Tr}(-1-0)\right)^{-1} \tilde{G}'^{Tr}(-1+0)$$

совпадают с числами $\lambda_{2k} = e^{i\pi\beta} \frac{\nu_k - 1}{\nu_k + 1}$ ($k = 1, \dots, N$).

Из теоремы 5.16 [16] следует что матрица-функция $\tilde{G}'^{Tr}$ допускает левую обобщенную факторизацию в пространстве $L_2(\mathbb{T})$, причем левый суммарный индекс матрицы-функции $\tilde{G}'^{Tr}$ вычисляется по формуле

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} \left\{ \operatorname{Arg} \det \tilde{G}'^{Tr}(t) \right\}_{t \in \mathbb{T}^-} + \frac{1}{2\pi} \left\{ \operatorname{Arg} \det \tilde{G}'^{Tr}(t) \right\}_{t \in \mathbb{T}^+} + \\ + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^N \arg \lambda_{jk} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arg} \frac{1 + P(1) \tilde{A}(x)}{1 + P(-1) \tilde{A}(x)} \Big|_{-\infty}^{+\infty}.$$

Для завершения доказательства теоремы остается повторить рассуждения сделанные в конце теоремы 2.1, при этом вновь пользуясь теоремой 4.2 из [17]. $\square$

В качестве иллюстрации теоремы 3.1 приведем следующее замечание.

Замечание. Пусть $\beta = 0$, P -многочлен, корни которого находятся вне отрезка $[-1; 1]$ и существуют числа w_1, w_2 такие что $Im w_1 > 1$, $0 < Im w_2 < 1$ а $P(1) = 4(w_1^2 + 1)^{-1}$, $P(-1) = 4(w_2^2 + 1)^{-1}$.

Тогда уравнение $y'' - y' + \frac{1}{P(\varphi)}y = 0$ имеет решение в $H_2(\mathbb{R})$. Примером такого многочлена служит $P(z) = q(z^2)(kz + b)$, где корни многочлена q находятся вне отрезка $[0; 1]$, и кроме того $q(1) = 1$, $k = \frac{2}{w_1^2 + 1} - \frac{2}{w_2^2 + 1}$, $b = \frac{2}{w_1^2 + 1} + \frac{2}{w_2^2 + 1}$, $b/k \in [-1; 1]$.

4. СЛУЧАЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В качестве следствия теоремы 2.1 докажем следующий результат.

Теорема 4.1. Пусть $P_k(D)$ ($k = 0, 1, \dots, N$; $D = i \frac{d}{dx}$) - дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами и $r = \max_{k=0, \dots, N} \deg P_k$. Если $P_0(x) \neq 0$, $P_N(x) \neq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, $\deg P_0 = \deg P_N = r$ и количество корней l_0 многочлена P_0 в верхней полуплоскости $Im z > 0$ больше чем количество корней l_N многочлена P_N в верхней полуплоскости, то дифференциальное уравнение

$$(4.1) \quad [P_0(D) + e^x P_1(D) + e^{2x} P_2(D) + \dots + e^{Nx} P_N(D)] y = 0$$

имеет по крайней мере $l_0 - l_N$ решений в классе $H_r(\mathbb{R})$.

Доказательство. Пусть σ_k ($k = 1, 2, \dots, N$) комплексные числа удовлетворяющие условию $\arg \sigma_k = -\pi\beta$.

Пусть $S_k(x_1, \dots, x_N) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N} x_{i_1} \dots x_{i_k}$ ($k = 1, \dots, N$) элементарные симметрические функции. Введем также числа $u_{k,l}$ ($k = 1, \dots, N$; $l = 0, \dots, N$) определенные равенствами

$$u_{k,0} = S_k(\sigma_1, \dots, \sigma_N) \quad (k = 1, \dots, N),$$

$$u_{k,l} = S_k(\sigma_1, \dots, \sigma_{l-1}, -\sigma_l, \sigma_{l+1}, \dots, \sigma_N) \quad (k, l = 1, \dots, N).$$

Определим матрицу

$$U = \begin{bmatrix} u_{N,0} & u_{N,1} & u_{N,2} & \cdots & u_{N,N} \\ u_{N-1,0} & u_{N-1,1} & u_{N-1,2} & \cdots & u_{N-1,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_{1,0} & u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,N} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что $U^{-1} = (b_{i,j})_{i,j=1}^{N+1}$, где числа $b_{i,j}$ определены по формулам

$$b_{1,1} = \frac{1}{2\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_N}, \quad b_{1,l} = 0 \quad (l = 2, \dots, N), \quad b_{1,N+1} = \frac{1}{2},$$

$$b_{k+1,l} = \frac{-(\sigma_k)^{l-1}}{2\sigma_k(\sigma_1 - \sigma_k) \cdots (\sigma_{k-1} - \sigma_k)(\sigma_{k+1} - \sigma_k) \cdots (\sigma_N - \sigma_k)}$$

($k = 1, \dots, N$; $l = 1, \dots, N+1$). Дифференциальные операторы $A_k(D)$ определим с помощью равенств

$$[A_0(D), \dots, A_N(D)]^{Tr} = U^{-1} [P_0(D), \dots, P_N(D)]^{Tr}.$$

Непосредственным подсчетом нетрудно убедиться, что функция $y(x)$ удовлетворяет (4.1) тогда и только тогда, когда справедливо

$$\left[A_0(D) + \sum_{k=1}^N \frac{e^x - \sigma_k}{e^x + \sigma_k} A_k(D) \right] y = 0.$$

Поскольку $\frac{e^x - \sigma_k}{e^x + \sigma_k} = th \frac{1}{2}(x - s_k + i\pi\beta)$, где $s_k = \ln |\sigma_k| \in \mathbb{R}$, то в силу теоремы 2.1 количество решений дифференциального уравнения (4.1) из класса $H_r(\mathbb{R})$ (r -степень дифференциального уравнения) не меньше чем $l_1 - l_2$, где l_1 - количество нулей многочлена $A_0 + \sum_{i=1}^N A_i$ в верхней полуплоскости, а l_2 - количество нулей в верхней полуплоскости многочлена $A_0 - \sum_{i=1}^N A_i$.

Из равенства $[P_0(D), \dots, P_N(D)]^{Tr} = U [A_0(D), \dots, A_N(D)]^{Tr}$ следует, что

$$A_0 + \sum_{i=1}^N A_i = P_N, \quad A_0 - \sum_{i=1}^N A_i = \frac{1}{\sigma_1 \cdots \sigma_N} P_0.$$

Теорема 4.1 доказана. $\square$

Abstract. The paper considers homogeneous one-dimensional pseudodifferential equations of nonnegative order with symbols of the form $\sum_{i=1}^N th(k_i x + \omega_i) A_i(\xi)$. Using a relationship between these equations and systems of singular equations, estimates for the number of solutions pseudodifferential equations in the Sobolev-Slobodetski space are obtained.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. И. Эскин, Краевые Задачи Для Эллиптических Псевдодифференциальных Уравнений, М., Наука (1973).
- [2] Ю. И. Черский, "Нормально разложимое уравнение плавного перехода", ДАН СССР, **190** (1), 57 – 60 (1970).
- [3] Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский, Уравнения Типа Свертки, М., Наука (1978).
- [4] Да. Фан Танг, "Об одном интегральном уравнении типа плавного перехода", Диф. уравнения, **8** (6), 1058 – 1067 (1972).
- [5] Да. Фан Танг, "Об одной краевой задаче Газемана для полуплоскости и интегральных уравнениях типа свертки с аналитическими ядрами", Изв. вузов. Мат., **10**, 73 – 82 (1973).
- [6] А. Г. Камалян, А. Б. Нерсисян, "Интегральные операторы типа плавного перехода", АН СССР, Функ. анализ и его прилож., М., **23** (2), 32 – 39 (1989).
- [7] С. S. Meijer, "On the G-Function. II-VIII", Nederl. Akad. Wetensch., Proc. 49, 344 - 456, 457 - 469, 632 - 641, 765 - 772, 936 - 943, 1063 - 1072, 1165 - 1175 (1946).
- [8] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие Трансцендентные Функции, **1**, М., Наука (1973).
- [9] A. M. Mathai, R. K. Saxena, "Generalized Hypergeometric functions with applications in statistics and physical sciences", Lecture Notes in Mathematics, **348**, Berlin: Springer (1973).
- [10] Y. A. Brychkov, Handbook of Special Functions: Derivatives, Integrals, Series and Other Formulas, CRC Press (2008).
- [11] А. Г. Камалян, В. В. Симонян, "О разрешимости одного типа одномерных псевдодифференциальных операторов", Изв. НАН Армении, Математика, **43** (4), 233 – 245, (2008).
- [12] В. В. Симонян, "Об одной системе псевдодифференциальных уравнений", Математика в высш. шк., **5** (3), 5 – 13 (2009).
- [13] V. V. Simonyan, "On connection of one class of one-dimensional pseudodifferential operators with singular integral operators", Proceedings of the Yerevan State University, **2**, 8 – 15 (2009).
- [14] И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, Введение в Теорию Одномерных Сингулярных Интегральных Операторов, Кишинев, Штинца (1973).
- [15] В. А. Пааташвили, "О разрывной задаче линейного сопряжения", Сообщ. АН ГССР, **36** (3), 539 – 540 (1964).
- [16] G. S. Litvinchuk, I. M. Spitkovskii, Factorization of Measurable Matrix Functions, Berlin, Akademie - Verlag (1987).
- [17] Н. Я. Крупник, "Некоторые общие вопросы теории одномерных сингулярных операторов с матричными коэффициентами", Мат. исслед., **42**, 91 – 112 (1976).
- [18] H. Bart, I. Gohberg, M. A. Kaashoek, "The coupling method for solving integral equations", Advances and Applications, **12**, Birkhauser, Verlag, Basel, 39 – 73 (1984).

Поступила 15 сентября 2010