

РАСШИРЕНИЕ ГРОТЕНДИКА ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ГАЛУА В ОБЩИХ КАТЕГОРИЯХ

С. Г. ДАЛАЛЯН

Ереванский Государственный Университет
E-mail: *dalalyan@ysu.am*

Аннотация. Строятся контравариантные присоединения Галуа и две ассоциированные антиэквивалентности. С помощью полумонадического функтора пополнения получаются аналоги расширения Гротендика основной теоремы теории Галуа в общих категориях.

MSC2000 number: 12F10, 18A40, 18A30, 18C20.

Ключевые слова: теория Галуа, присоединения, пополнения, расширение Гротендика теории Галуа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Классическая теория Галуа была расширена и обобщена в различных направлениях, параллельные теории были созданы в разных областях математики (краткий обзор старых работ имеется в [3], из новых работ укажем [1] - [4], [9] - [13]). Как наиболее широкое обобщение теории Галуа может быть рассмотрена категорная теория сопряженных функторов ([14], IV). Основная конструкция классической теории Галуа суть контравариантное сопряжение (см. первую часть этой статьи) и аналоги первой части основной теоремы классической теории Галуа доказываются для произвольных контравариантных сопряжений (Предложение 3.2 и Следствие 3.1).

Главная цель настоящей статьи - обобщить вышеупомянутые результаты подобно тому, как Гротендик расширил основную теорему классической теории Галуа в [8]. Используя результаты статьи [6], мы строим полумонадический функтор из данной категории в ее свободное пополнение относительно (ко)произведений малых и конечных семейств объектов (§4). Применяя функтор пополнения, мы получаем Предложения 5.1 и 5.2. Эти результаты подобны результатам статей [10-12].

Несколько соглашений об обозначениях:

Морфизм $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ обозначается также $\mathcal{X}F\mathcal{Y}$. Композиция морфизмов $\mathcal{X}F\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}G\mathcal{Z}$ обозначается $F \circ G$. Образ X относительно отображения F обозначается как через $F(X)$, так и через XF . Если $(Pr_X X, Pr_Y Y)$ - произведение объектов X и Y , а (ZfX, ZgY) - произвольная пара морфизмов, то $\langle f, g \rangle$ означает морфизм, однозначно определяемый условием

$$\langle f, g \rangle \circ p_X = f, \quad \langle f, g \rangle \circ p_Y = g.$$

Автор признателен Ж.-П. Оливье за многообразную поддержку.

2. СОПРЯЖЕНИЕ ГАЛУА

Пусть $\mathcal{C}$ - произвольная категория, $A\varphi B$ - ее морфизм. С φ ассоциируются две категории:

- (i) категория $\mathcal{X} = [\varphi]$ разложений морфизма φ ,
- (ii) категория $\mathcal{A} = (\mathbf{Sgrp} \downarrow S)$ действий полугрупп $R\rho S$ на B .

Здесь $\mathbf{Sgrp}$ - категория полугрупп с 1, $S = \text{End}_\varphi B$ - полугруппа эндоморфизмов $B\beta B$, для которых $\varphi \circ \beta = \varphi$, а $R\rho S$ - гомоморфизм полугрупп (с единицей).

Объекты в категории $[\varphi]$ - все разложения $\varphi = \psi \circ \chi$. Морфизм из разложения $\varphi = \psi \circ \chi$ в разложение $\varphi = \psi' \circ \chi'$ в категории $[\varphi]$ есть морфизм γ категории $\mathcal{C}$ такой, что $\psi \circ \gamma = \psi'$ и $\gamma \circ \chi' = \chi$.

Мы построим пару сопряженных функторов $\mathcal{X}FA$ и $AG\mathcal{X}$, которую будем называть сопряжением Галуа.

Функтор F сопоставляет каждому разложению $\varphi = \psi \circ \chi$ объект $\text{End}_\chi B \hookrightarrow S$ категории $\mathcal{A}$, а морфизму γ из $\varphi = \psi \circ \chi$ в $\varphi = \psi' \circ \chi'$ категории $[\varphi]$ - естественное вложение $\text{End}_{\chi'} B \hookrightarrow \text{End}_\chi B$. Для того, чтобы построить правый сопряженный функтор G к F , необходимо наложить некоторое ограничение на B .

Определение 2.1. *Стабилизацией B относительно действия полугруппы $R\rho\text{End}B$ назовем морфизм $C\sigma B$, который удовлетворяет следующим условиям:*

- (a) $\sigma \circ (a\rho) = \sigma$ для любого $a \in R$;
- (b) *если морфизм $A\varphi B$ удовлетворяет соотношению $\varphi \circ (a\rho) = \varphi$ для всех $a \in R$, то существует единственный морфизм $A\tau C$ такой, что*

$$\tau \circ \sigma = \varphi.$$

Если стабилизация $C\sigma B$ объекта B относительно действия ρ существует, то является мономорфизмом и определена однозначно, с точностью до изоморфизма объекта C . Очевидно, стабилизация объекта B относительно действия полугруппы эндоморфизмов объекта B совпадает с уравниателем семейства всех эндоморфизмов этой полугруппы.

Предположим, что стабилизации объекта B относительно всех $R\rho S$ существуют. По определению, функтор G сопоставляет каждому действию $R\rho S$ разложение $\varphi = \tau \circ \sigma$. Если $R\alpha R'$ - морфизм категории $\mathcal{A}$ из объекта $R\rho S$ в объект $R'\rho' S$ и $\varphi = \tau \circ \sigma$, $\varphi' = \tau' \circ \sigma'$ - соответствующие разложения, то из равенства $\alpha \circ \rho' = \rho$ следует, что существует единственный морфизм γ такой, что $\tau' \circ \gamma = \tau$, $\gamma \circ \sigma = \sigma'$. Положим $\alpha G = \gamma$.

Пусть $\varphi = \psi \circ \chi$ - объект категории $\mathcal{X}$, $\varphi = \tau \circ \sigma$ - его образ относительно композиции функторов $F \circ G = T$.

Из Определения 2.1, b) можно заключить, что существует единственный морфизм $\eta_{\psi\chi}$ такой, что $\chi = \eta_{\psi\chi} \circ \sigma$ и, следовательно, $\tau = \psi \circ \eta_{\psi\chi}$. Таким образом, $1_{\mathcal{X}}\eta T$ - естественное преобразование.

С другой стороны, если $R\rho S$ - объект категории $\mathcal{A}$ и $\text{End}_{\sigma} B \hookrightarrow S$ - его образ относительно композиции $L = G \circ F$, то, очевидно, образ ρ лежит в $\text{End}_{\sigma} B$ (напомним, что σ - стабилизация B относительно ρ). Поэтому для каждого $\rho \in \text{Ob } \mathcal{A}$ в категории $\mathcal{A}$ существует единственный морфизм $R\varepsilon_{\rho} \text{End}_{\sigma} B$ из объекта $R\rho S$ в объект $\text{End}_{\sigma} B \hookrightarrow S$. Эта система задает естественное преобразование $1_{\mathcal{A}}\varepsilon L$.

Предложение 2.1. $(F, G, \eta, \varepsilon)$ - контравариантное сопряжение из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{A}$.

Отметим, что существует биекция между контравариантными сопряжениями $(F, G, \eta, \varepsilon) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{A}$ и ковариантными сопряжениями $(F^{\circ}, G^{\circ}, \eta, \varepsilon^{\text{op}}) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{A}^{\text{op}}$. В ковариантном сопряжении $(F^{\circ}, G^{\circ}, \eta, \varepsilon^{\text{op}})$ η - единица, тогда как ε^{op} - коединица. В контравариантном сопряжении $(F, G, \eta, \varepsilon)$ как η , так и ε являются единицами.

Замечание 2.1. В [3] $\text{End}_{\varphi} B$ называется изотропной полугруппой $A\varphi B$. Двойственно определяются коизотропная полугруппа $\text{End}^{\varphi} A$, костабилизация относительно полугруппового действия $R\rho \text{End} A$, и аналогично может быть построено косопряжение Галуа. Все результаты, двойственные к результатам этой статьи, конечно, справедливы для косопряжений Галуа.

3. ПОДКАТЕГОРИИ ЗАМКНУТЫХ ОБЪЕКТОВ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С СОПРЯЖЕНИЕМ, И ИХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

Пусть $(F, G, \eta, \varepsilon)$ - произвольное контравариантное сопряжение из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{A}$, $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ и $\mathcal{L} = (L, \varepsilon, \delta)$ - соответствующие монады. Объект X категории $\mathcal{X}$ называется замкнутым относительно монады $\mathcal{T}$, если $X\eta_X XT$ - изоморфизм. Обозначим полную подкатегорию $\mathcal{T}$ -замкнутых объектов категории $\mathcal{X}$ через $\mathcal{X}_{\mathcal{T}}$. Аналогично определяется полная подкатегория $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ $\mathcal{L}$ -замкнутых объектов категории $\mathcal{A}$.

Предложение 3.1. *Ограничением $(F, G, \eta, \varepsilon)$ определяется антиэквивалентность $(\hat{F}, \hat{G}, \hat{\eta}, \hat{\varepsilon})$ между $\mathcal{X}_{\mathcal{T}}$ и $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$.*

Доказательство. Проверим, что для всех $X \in \text{Ob}\mathcal{X}_{\mathcal{T}}$ образ XF принадлежит $\text{Ob}\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$. Так как η_X - изоморфизм, $\eta_X F$ - так же изоморфизм. Для сопряжения $(F, G, \eta, \varepsilon)$ имеем $(\eta \cdot 1_F) \circ (1_F \cdot \varepsilon) = 1_F$, где $\cdot$ означает умножение преобразований (в [14] это умножение называется горизонтальным). Следовательно, $\eta_X F \circ \varepsilon_{XF} = 1_{XF}$. Поэтому $\varepsilon_{XF} = (\eta_X F)^{-1}$ - изоморфизм, то есть $XF \in \text{Ob}\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$. Таким же образом можно получить, что $AG \in \text{Ob}\mathcal{X}_{\mathcal{T}}$ для каждого $A \in \text{Ob}\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$. Таким образом, имеем функторы $\mathcal{X}_{\mathcal{T}} \hat{F} \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{L}} \hat{G} \mathcal{X}_{\mathcal{T}}$. Естественные преобразования $\hat{\eta} : 1_{\mathcal{X}_{\mathcal{T}}} \rightarrow \hat{F} \circ \hat{G}$ и $\hat{\varepsilon} : \hat{G} \circ \hat{F} \rightarrow 1_{\mathcal{A}_{\mathcal{L}}}$ согласно определению замкнутых объектов являются функторными изоморфизмами. Предложение 3.1 доказано $\square$

Пусть $\mathcal{X}^{\mathcal{T}}$ - категория $\mathcal{T}$ -алгебр, $\mathcal{X}_{\mathcal{T}} K \mathcal{X}^{\mathcal{T}}$ - следующий функтор. Для $X \in \text{Ob}\mathcal{X}_{\mathcal{T}}$ положим $XK = (X, h)$ с $h = \eta_X^{-1}$. Тогда из свойства

$$(\eta \cdot 1_F) \circ (1_F \cdot \varepsilon) = 1_F$$

сопряжений следует $hT \circ h = \mu_X \circ h$. Используя свойство единицы $1\eta T$, получаем $\eta_X \circ fT = f \circ \eta_Y$ для любого XfY , отсюда $fT \circ \eta_Y^{-1} = \eta_X^{-1} \circ f$. Это означает, что $fK = f$ определяет морфизм из XK в YK . Аналогично строится функтор $\mathcal{A}_{\mathcal{L}} Q \mathcal{A}^{\mathcal{L}}$.

Предложение 3.2. *Если $(F, G, \eta, \varepsilon)$ - сопряжение Галуа, то функторы K и Q обратимы (т. е. имеем изоморфизмы категорий $\mathcal{X}_{\mathcal{T}} \cong \mathcal{X}^{\mathcal{T}}$ и $\mathcal{A}_{\mathcal{L}} \cong \mathcal{A}^{\mathcal{L}}$).*

Доказательство. Пусть (X, h) - $\mathcal{T}$ -алгебра. Для сопряжения Галуа морфизм $(XT)hX$ - монический. Тогда из равенства $\eta_X \circ h = 1_X$ $\mathcal{T}$ -алгебр следует, что

h - изоморфизм, поэтому $h = \eta_X^{-1}$. Итак, K - биекция на объектах. Но тогда K - биекция также на морфизмах. $\square$

Следствие 3.1. *Если $(F, G, \eta, \varepsilon)$ - сопряжение Галуа из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{A}$, то категории алгебр $\mathcal{X}^T$ и $\mathcal{A}^L$ антиэквивалентны.*

Эти результаты унифицируют и обобщают часть результатов различных конкретных теорий Галуа. Тем самым основной задачей и привилегией конкретных теорий Галуа остается описание замкнутых объектов.

Замечание 3.1. *Ограничение на замкнутые относительно рассматриваемого сопряжения объекты присутствует и в построениях Джанелидзе [10] - [12]. С одной стороны, определение I -нормального объекта содержит условие, что в сопряжении $(I^c, H^c, \eta^c, \varepsilon^c)$ коединица ε^c является изоморфизмом. С другой стороны, полная подкатегория $\mathbf{Spl}_I(c)$ состоит из объектов, которые распадаются над c , то есть соответствующий η^c - изоморфизм.*

4. СВОБОДНЫЕ ПОПОЛНЕНИЯ КАТЕГОРИЙ

Пусть $\mathbf{Cat}$ - 2-категория всех больших категорий, $\mathcal{S}$ - произвольная подкатегория $\mathbf{Cat}$. Любой функтор $\mathcal{U}\varphi\mathcal{X}$ с $\mathcal{U} \in \mathbf{Ob}\mathcal{S}$ называется $\mathcal{S}$ -семейством в $\mathcal{X}$. Подчеркнем, что морфизмами $\mathbf{Cat}$ являются все ковариантные функторы.

(Ко)предел любого $\mathcal{S}$ -семейства есть (ко)универсальный (ко)конус, который определяется однозначно, с точностью до изоморфизма вершины. Говорят, что функтор $\mathcal{X}F\mathcal{Y}$ сохраняет (ко)пределы $\mathcal{S}$ -семейств, если F -образ любого (ко)предельного (ко)конуса для произвольного $\mathcal{S}$ -семейства $\mathcal{U}\varphi\mathcal{X}$ является (ко)предельным (ко)конусом для образа $\mathcal{S}$ -семейства $\mathcal{U}(\varphi \circ F)\mathcal{Y}$. Обозначим через $\mathbf{Cat}_{\mathcal{S}}$ (соотв., $\mathbf{Cat}^{\mathcal{S}}$) 2-категорию, для которой

- (i) объектами являются все $\mathcal{S}$ -семейства с фиксированным (ко)пределом;
- (ii) морфизмами являются все сохраняющие (ко)пределы функторы;
- (iii) преобразованиями (= морфизмами ранга 2) являются все естественные преобразования сохраняющих (ко)пределы функторов.

Если $\mathcal{S}$ содержит терминальный объект T (как категория, имеющая единственный объект и единственный морфизм), то для любого $\mathcal{S}$ -семейства $T\tau\mathcal{X}$ в качестве фиксированного (ко)предела мы берем тождественный морфизм.

(Ковариантный) функтор $\mathcal{X}J\bar{\mathcal{X}}$ называется свободным пополнением категории $\mathcal{X}$ относительно (ко)пределов $\mathcal{S}$ -семейств или, кратко, свободным $\mathcal{S}$ -(ко)предельным пополнением, если выполняются следующие условия.

- (а) Любое $\mathcal{S}$ -семейство в $\bar{\mathcal{X}}$ имеет фиксированный (ко)предел.
- (б) Пусть $\mathcal{X}F\mathcal{Y}$ - произвольный функтор в категорию $\mathcal{Y}$ с системой фиксированных (ко)пределов для каждого $\mathcal{S}$ -семейства в $\mathcal{Y}$. Тогда существует единственный сохраняющий пределы $\mathcal{S}$ -семейств функтор $\bar{\mathcal{X}}B\mathcal{Y}$ со свойствами:
 - (i)_b $F = J \circ B$;
 - (ii)_b для любого $\mathcal{S}$ -семейства $\mathcal{U}\varphi\mathcal{X}$ образ фиксированного (ко)предела семейства $\mathcal{U}(\varphi \circ J)\bar{\mathcal{X}}$ относительно B совпадает с фиксированным (ко)пределом семейства $\mathcal{U}(\varphi \circ F)\mathcal{Y}$.
- (в) Пусть F и G - произвольные функторы из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$, B и C - функторы из $\bar{\mathcal{X}}$ в $\mathcal{Y}$, соответствующие F и G согласно (б), и $F\xi G$ - произвольное естественное преобразование. Тогда существует единственное естественное преобразование $B\zeta C$ со свойствами:
 - (i)_c $1_J \cdot \zeta = \xi$;
 - (ii)_c для любого $\mathcal{S}$ -семейства $\mathcal{U}\varphi\mathcal{X}$ две диаграммы, которые получаются
 - ◇ из (ко)предельного (ко)конуса $\mathcal{U}(\varphi \circ J)\bar{\mathcal{X}}$ с помощью естественного преобразования ζ и
 - ◇ посредством (ко)предела диаграммы, получающейся из $\mathcal{U}\varphi\mathcal{X}$ с помощью естественного преобразования ξ
 совпадают.

Мы называем J *свободным* пополнением, потому что мы не требуем, чтобы он сохранял существующие в $\mathcal{X}$ (ко)произведения.

Очевидно, что если свободное $\mathcal{S}$ -(ко)предельное пополнение категории $\mathcal{X}$ существует, то оно определяется однозначно, с точностью до изоморфизма категории $\bar{\mathcal{X}}$.

В статье [6] условия существования свободного $\mathcal{S}$ -(ко)предельного пополнения исследуются в более общей ситуации, когда $\mathcal{X}$ - внутренняя категория. Используя эти результаты, можно получить, что каждая (обычная) категория $\mathcal{X}$ имеет $\mathcal{S}$ -(ко)предельное пополнение в случае, когда $\mathcal{S}$ - скелет полной подкатегории всех малых или конечных дискретных объектов категории **Cat**. Обозначим эти

категории, соответственно, $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. В этих случаях (ко)предел $\mathcal{S}$ -семейства есть (ко)произведение данного (малого или конечного) дискретного семейства. Таким образом, любая категория $\mathcal{X}$ имеет пополнение (ко)произведениями как конечных, так и малых семейств. Более того, в этих случаях существует стандартное пополнение (ко)произведениями $\mathcal{X}J_{\mathcal{S}}(\mathcal{S} \nearrow \mathcal{X})$ (соотв., $\mathcal{X}J^{\mathcal{S}}(\mathcal{S} \searrow \mathcal{X})$), определяемое следующим образом.

Объектами этой категории являются все (ковариантные) функторы $\mathcal{U}\varphi\mathcal{X}$ с $\mathcal{U} \in \text{Ob}\mathcal{S}$. Морфизм $\tilde{f}$ в $\mathcal{S} \searrow \mathcal{X}$ (соотв., $\mathcal{S} \nearrow \mathcal{X}$) из $\mathcal{U}\varphi$ в $\mathcal{V}\psi$ есть пара (f, f') , где $\mathcal{U}f\mathcal{V}$ (соотв., $\mathcal{V}f\mathcal{U}$) - функтор категории $\mathcal{S}$ и f' - естественное преобразование из φ в $f \circ \psi$ (соотв., из $f \circ \varphi$ в ψ). Композиция морфизмов $(\mathcal{U}\varphi)\tilde{f}(\mathcal{V}\psi)$ и $(\mathcal{V}\psi)\tilde{g}(\mathcal{W}\chi)$ есть морфизм $(\mathcal{U}\varphi)\tilde{h}(\mathcal{W}\chi)$ с $h = f \circ g$ и $h' = \langle f', f_O \circ g' \rangle \circ m_{\mathcal{X}}$ (соотв., $h = g \circ f$ и $h' = \langle g_O \circ f', g' \rangle \circ m_{\mathcal{X}}$), где f_O и g_O суть соответствующие отображения объектов и $m_{\mathcal{X}}$ - отображение композиции. Тожественный морфизм $1_{\mathcal{U}\varphi}$ состоит из тождественного морфизма $1_{\mathcal{U}}$ и $1'_{\mathcal{U}\varphi} = \varphi_O \circ i_{\mathcal{X}}$, где $\mathcal{X}_O i_{\mathcal{X}}$ - отображение, сопоставляющее объекту соответствующий тождественный морфизм.

Для каждого функтора $\mathcal{X}F\mathcal{Y}$ определим функтор

$$\mathcal{S} \nearrow F : \mathcal{S} \nearrow \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S} \nearrow \mathcal{Y} \text{ (соотв., для } \searrow)$$

следующим образом. Образ объекта $\mathcal{U}\varphi\mathcal{X}$ есть $\mathcal{U}(\varphi \circ F)\mathcal{Y}$. Образ морфизма $(\mathcal{U}\varphi)\tilde{f}(\mathcal{V}\psi)$ есть пара $(f, f'F)$.

Наконец, для каждого естественного преобразования $F\xi G$ между функторами $F, G : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ определим естественное преобразование $\mathcal{S} \nearrow \xi : \mathcal{S} \nearrow F \rightarrow \mathcal{S} \nearrow G$, положив $(\mathcal{S} \nearrow \xi)_{\mathcal{U}\varphi} = (1_{\mathcal{U}}, 1_{\varphi} \cdot \xi)$ для любого объекта $\mathcal{U}\varphi$ in $\mathcal{S} \nearrow \mathcal{X}$ (аналогично для $\searrow$).

Предложение 4.1. $\mathcal{S} \nearrow$ и $\mathcal{S} \searrow$ - эндофункторы 2-категории **Cat**.

Свободное $\mathcal{S}$ -(ко)пополнение является частным случаем более общего понятия $\mathcal{S}$ -универсальности. Пусть $\mathcal{S} = (S_M, S_T)$, где S_M и S_T - некоторые свойства для морфизмов и преобразований, соответственно. Для 2-функтора $\mathcal{D}u\mathcal{C}$ и объекта $\mathcal{X}$ категории $\mathcal{C}$ пара $(\tilde{\mathcal{X}}, \mathcal{X}J_{\mathcal{X}}(\tilde{\mathcal{X}}u))$, состоящая из объекта $\tilde{\mathcal{X}}$ категории $\mathcal{D}$ и морфизма $J_{\mathcal{X}}$ категории $\mathcal{C}$, называется $\mathcal{S}$ -универсальной парой из $\mathcal{X}$ в u , если

- (i) для любого объекта $\mathcal{P}$ категории $\mathcal{D}$ и любого морфизма $\mathcal{X}F(\mathcal{P}u)$ существует единственный морфизм $\tilde{\mathcal{X}}\tilde{F}\mathcal{P}$ категории $\mathcal{D}$ со свойством S_M и такой, что $J_{\mathcal{X}} \circ \tilde{F}u = F$;

- (ii) пусть $\mathcal{P}$ - произвольный объект категории $\mathcal{D}$, F и G - произвольные морфизмы из $\tilde{X}$ в $\mathcal{P}u$, $F\xi G$ - произвольное преобразование; тогда существует единственное преобразование $\tilde{F}\tilde{\xi}\tilde{G}$, которое удовлетворяет свойству S_T и $1_J \cdot \tilde{\xi} = \xi$.

Обычно мы предполагаем, что пара свойств S унитарна и мультипликативна, т. е. соответственно тождественный морфизм и преобразование, а также композиция любых двух морфизмов и любых двух преобразований, со свойствами, соответственно, S_M и S_T удовлетворяют этим же свойствам.

Определение свободного (ко)пополнения получим, если взять в качестве $\mathcal{C} = \mathbf{Cat}$, $\mathcal{D} = \mathbf{Cat}_s$ (или $\mathbf{Cat}^s$) и $Du\mathcal{C}$ забывающий функтор. Отметим, что свойства $(ii)_b \equiv S_M$ и $(ii)_c \equiv S_T$ унитарны и мультипликативны.

Как теория сопряженных функторов, монад и алгебр над монадами строится для универсальных морфизмов (в [14] для обычных категорий, а в [7] для 2-категорий), точно так же теория полусопряженных функторов, полумонад и алгебр над полумонадами строится для S -универсальных морфизмов и аналогичные утверждения получаются в этом случае ([5] и [6]). Так, полусопряжение из 2-категории $\mathcal{X}$ в 2-категорию $\mathcal{A}$ - это шестерка

$$(F, G, \varphi_M, \psi_M, \varphi_T, \psi_T),$$

состоящая

- (i) из функторов 2-категорий $\mathcal{X}F\mathcal{A}$, $\mathcal{A}G\mathcal{X}$;
(ii) из семейства отображений

$$\varphi_M : \mathcal{A}(xF, a) \rightarrow \mathcal{X}(x, aG), \psi_M : \mathcal{X}(x, aG) \rightarrow \mathcal{A}(xF, a),$$

для любых объектов $x \in \text{Ob}\mathcal{X}$, $a \in \text{Ob}\mathcal{A}$, которые естественны как по x , так и a , и удовлетворяют условию $\psi_M \circ \varphi_M = 1$;

- (iii) для произвольных морфизмов f, g из x в aG из отображений

$$\varphi_T : \mathcal{A}(fF, gF) \rightarrow \mathcal{X}(f, g), \psi_T : \mathcal{X}(f, g) \rightarrow \mathcal{A}(fF, gF),$$

которые совместимы (согласованы) с φ_M и ψ_M , естественны по x и a , и удовлетворяют условию $\psi_T \circ \varphi_T = 1$.

Каждое полусопряжение определяет полумонаду $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$, которая отличается от монады тем условием, что $(1_T \cdot \eta) \circ \mu$ - тождественный морфизм, но $(\eta \cdot 1_T) \circ \mu$ - всего лишь идемпотент. Аналогично (точнее, двойственно) определяются полумонада и т.д.

В [5] доказывается, что каждая система фиксированных S -универсальных пар $(\tilde{X}, \mathcal{X}J_{\mathcal{X}}(\tilde{X}u))$ из всех объектов $\mathcal{X}$ 2-категории $\mathcal{C}$ в 2-функтор $Du\mathcal{C}$ определяет полусопряжение между 2-функторами $\mathcal{C}c\mathcal{D}$ и $Du\mathcal{C}$ с полуединицей J , состоящей из $J_{\mathcal{X}}$, $\mathcal{X} \in \text{Ob}\mathcal{C}$. Применяя этот результат к пополнениям по (ко)произведениям, получаем

Предложение 4.2. *Для $S = M, N$ существуют стандартные полусопряжения малых, если $S = M$, и конечных, если $S = N$, пополнений по (ко)произведениям*

$$(c_S, u_S, (J_S)_M, (H_S)_M, (J_S)_T, (H_S)_T)$$

или соответственно

$$(c^S, u^S, (J^S)_M, (H^S)_M, (J^S)_T, (H^S)_T).$$

из $\mathcal{C} = \mathbf{Cat}$ в $\mathcal{D} = \mathbf{Cat}_S$ (или соответственно, $\mathbf{Cat}^S$).

Здесь u - забывающий функтор, c - функтор пополнения. Ниже доказывается, что это - полумонадической функтор.

Пусть $t = c \circ u$ и $\mathbf{t}$ - полумонада (t, J, μ) , где естественное преобразование $\mu : t \circ t \rightarrow t$ 2-функторов определяется с помощью

$$\mu(\mathcal{X}) = (H(\mathcal{X}c))u \text{ для всех } \mathcal{X} \in \text{Ob}\mathcal{C}$$

или, иначе говоря, $\mu = 1_c \cdot H \cdot 1_u$. Категория $\mathcal{C}^t$ $\mathbf{t}$ -алгебр в $\mathcal{C}$ имеет

- (i) в качестве объектов - все пары $(\mathcal{X}, A)$ с $\mathcal{X} \in \text{Ob}\mathcal{C}$, а 2-функтор $(\mathcal{X}\mathbf{t})A\mathcal{X}$ удовлетворяет условию $At \circ A = \mu(\mathcal{X}) \circ A$ и $J(\mathcal{X}) \circ A = 1_{\mathcal{X}}$;
- (ii) в качестве морфизмов $(\mathcal{X}, A)F(\mathcal{Y}, B)$ - все морфизмы $\mathcal{X}F\mathcal{Y}$, удовлетворяющие условию $A \circ F = Ft \circ B$;
- (iii) в качестве преобразований $F\xi G$ для $F, G : (\mathcal{X}, A) \rightarrow (\mathcal{Y}, B)$ - все преобразования $(\mathcal{X}F\mathcal{Y})\xi(\mathcal{X}G\mathcal{Y})$, такие что $1_A \cdot \xi = \xi t \cdot 1_B$.

Сравнивающий функтор $\mathcal{D}K\mathcal{C}^t$ определяется условиями

- (i)' $\mathcal{P}K = (\mathcal{P}u, (H(\mathcal{P}))u)$ для всех $\mathcal{P} \in \text{Ob}\mathcal{D}$;
- (ii)' $RK = Ru$ для всех $R \in \mathcal{D}(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$;
- (iii)' $\zeta K = \zeta u$ для всех $\zeta \in \mathcal{D}(\mathcal{P}R\mathcal{P}', \mathcal{P}R'\mathcal{P}')$.

С помощью функтора A каждое фиксированное (ко)произведение в $\mathcal{X}t_S = \mathcal{X}_S$ (соотв., $\mathcal{X}t^S = \mathcal{X}^S$) индуцирует фиксированное (ко)произведение в $\mathcal{X}$ следующим образом.

Пусть $\mathcal{U}\varphi\mathcal{X}$ - малое или конечное дискретное семейство в $\mathcal{X}$. Тогда $\varphi \circ J_S$ (соответственно, $\varphi \circ J^S$) - малое или конечное дискретное семейство в $\mathcal{X}_S$ (соответственно, $\mathcal{X}^S$). Оно имеет фиксированное (ко)произведение в $\mathcal{X}_S$ (соотв.. $\mathcal{X}^S$) и образ этого (ко)произведения относительно A - (ко)произведение $\mathcal{U}\varphi$ в $\mathcal{X}$. Зафиксировав это (ко)произведение для каждого $\mathcal{U}\varphi$, получим систему фиксированных (ко)произведений на $\mathcal{X}$.

Нетрудно проверить, что

- (i) если $(\mathcal{X}, A)F(\mathcal{Y}, B)$ - морфизм $\mathbf{t}$ -алгебр, то $\mathcal{X}F\mathcal{Y}$ сохраняет (ко)пределы на $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, индуцированные, соответственно, с помощью A и B ;
- (ii) если $F\zeta G$ - естественное преобразование между $F, G : (\mathcal{X}, A) \rightarrow (\mathcal{Y}, B)$, то оно - естественное преобразование между сохраняющими (ко)пределы функторами $F, G : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$.

Предложение 4.3. *Сопоставляя*

- (i) каждой $\mathbf{t}$ -алгебре $(\mathcal{X}, A)$ категорию $\mathcal{X}$ с системой фиксированных (ко)пределов на $\mathcal{X}$, индуцированных посредством A ;
- (ii) каждому морфизму $\mathbf{t}$ -алгебр $(\mathcal{X}, A)F(\mathcal{Y}, B)$ - соответствующий сохраняющий (ко)пределы морфизм $\mathcal{X}F\mathcal{Y}$;
- (iii) каждому естественному преобразованию $F\zeta G$ между $F, G : (\mathcal{X}, A) \rightarrow (\mathcal{Y}, B)$ - то же самое преобразование, рассматриваемое как естественное преобразование сохраняющих (ко)пределы функторов $F, G : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$

получаем обратные к сравнивающим функторам функторы

$$(K_S)^{-1} : \mathbf{Cat}^{\mathbf{t}^S} \rightarrow \mathbf{Cat}_S, \quad (\mathbf{K}^S)^{-1} : \mathbf{Cat}^{\mathbf{t}^S} \rightarrow \mathbf{Cat}^S.$$

Следствие 4.1. *Функторы пополнения по (ко)произведениям c_S и c^S , где $S = \mathcal{M}$ или $\mathcal{N}$, полумонадические.*

5. РАСШИРЕНИЕ ГРОТЕНДИКА СОПРЯЖЕНИЯ ГАЛУА

Для произвольного ковариантного сопряжения $(F, G, \eta, \varepsilon)$ между категориями $\mathcal{X}$ и $\mathcal{A}$ и для любого эндифунктора c 2-категории $\mathbf{Cat}$ образ $(Fc, Gc, \eta c, \varepsilon c)$ является ковариантным сопряжением между $\mathcal{X}c$ и $\mathcal{A}c$.

Действительно, равенства

$$(1_G \cdot \eta) \circ (\varepsilon \cdot 1_G) = 1_G, \quad (\eta \cdot 1_F) \circ (1_F \cdot \varepsilon) = 1_F$$

влекут равенства

$$(1_{Gc} \cdot \eta c) \circ (\varepsilon c \cdot 1_{Gc}) = 1_{Gc}, (\eta c \cdot 1_{Fc}) \circ (1_{Fc} \cdot \varepsilon c) = 1_{Fc}.$$

С контравариантным сопряжением несколько посложнее. Чтобы вычислить образ, необходимо предварительно перейти к соответствующему ковариантному сопряжению $(F^o, G^o, \eta, \varepsilon^{op})$ между $\mathcal{X}$ и $\mathcal{A}^{op}$. Затем, используя предыдущий результат, можно получить ковариантное сопряжение $(F^oc, G^oc, \eta c, \varepsilon^{op}c)$ между $\mathcal{X}c$ и $\mathcal{A}^{op}c$. Наконец, надо вернуться к контравариантному сопряжению $((F^oc)^o, (G^oc)^o, \eta c, (\varepsilon^{op}c)^{op})$ между $\mathcal{X}c$ и $(\mathcal{A}^{op}c)^{op}$.

Исследуем случай, когда c - 2-функтор $\mathcal{S} \nearrow$ или $\mathcal{S} \searrow$. Нетрудно заметить, что

$$(\mathcal{S} \nearrow \mathcal{A}^{op})^{op} = \mathcal{S} \searrow \mathcal{A}, \quad (\mathcal{S} \searrow \mathcal{A}^{op})^{op} = \mathcal{S} \nearrow \mathcal{A}.$$

Для контравариантного функтора $\mathcal{X}FA$ введем обозначения

$$\mathcal{S} \nearrow F = (\mathcal{S} \nearrow F^o)^o, \quad \mathcal{S} \searrow F = (\mathcal{S} \searrow F^o)^o.$$

Они определяются по тем же формулам, что и в случае ковариантного функтора F . Можно проверить, что

$$(\mathcal{S} \nearrow \varepsilon^{op})^{op} = \mathcal{S} \searrow \varepsilon, \quad (\mathcal{S} \searrow \varepsilon^{op})^{op} = \mathcal{S} \nearrow \varepsilon.$$

Таким образом, для каждого контравариантного функтора $\mathcal{X}FA$ получаем два ассоциированных контравариантных функтора

$$(\mathcal{S} \nearrow \mathcal{X})(\mathcal{S} \nearrow F)(\mathcal{S} \searrow \mathcal{A}) \quad \text{и} \quad (\mathcal{S} \searrow \mathcal{X})(\mathcal{S} \searrow F)(\mathcal{S} \nearrow \mathcal{A}).$$

Предложение 5.1. *С любым контравариантным сопряжением $(F, G, \eta, \varepsilon)$ между категориями $\mathcal{X}$ и $\mathcal{A}$ канонически ассоциируются два контравариантных сопряжения*

$$(\mathcal{S} \nearrow F, \mathcal{S} \searrow G, \mathcal{S} \nearrow \eta, \mathcal{S} \searrow \varepsilon) \quad \text{между} \quad \mathcal{S} \nearrow \mathcal{X} \quad \text{и} \quad \mathcal{S} \searrow \mathcal{A},$$

$$(\mathcal{S} \searrow F, \mathcal{S} \nearrow G, \mathcal{S} \searrow \eta, \mathcal{S} \nearrow \varepsilon) \quad \text{между} \quad \mathcal{S} \searrow \mathcal{X} \quad \text{и} \quad \mathcal{S} \nearrow \mathcal{A}.$$

Их можно назвать, соответственно, расширением и корасширением Гротендика сопряжения $(F, G, \eta, \varepsilon)$, поскольку первый пример такого расширения появился в [8] как расширение классического сопряжения Галуа для категории полей. Впоследствии результаты Гротендика были обобщены в различных направлениях (см. [10] - [13], [15]).

Пусть $\mathcal{S} \nearrow \mathcal{T}$ и $\mathcal{S} \searrow \mathcal{L}$ - монады, соответственно, в $\mathcal{S} \nearrow \mathcal{X}$ и $\mathcal{S} \searrow \mathcal{A}$, ассоциированные с контравариантным сопряжением

$$(\mathcal{S} \nearrow F, \mathcal{X} \searrow G, \mathcal{S} \nearrow \eta, \mathcal{S} \searrow \varepsilon).$$

С применением результатов предложений 3.2 и 3.3 получается

Предложение 5.2. *Существует антиэквивалентность между категориями*

- (i) $(\mathcal{S} \nearrow \mathcal{X})_{\mathcal{S} \nearrow \mathcal{T}}$ - объектов, замкнутых относительно $\mathcal{S} \nearrow \mathcal{T}$ и $(\mathcal{S} \searrow \mathcal{A})_{\mathcal{S} \searrow \mathcal{L}}$ - объектов, замкнутых относительно $\mathcal{S} \searrow \mathcal{L}$;
- (ii) $(\mathcal{S} \nearrow \mathcal{T})$ -алгебр $(\mathcal{S} \nearrow \mathcal{X})^{\mathcal{S} \nearrow \mathcal{T}}$ и $(\mathcal{S} \searrow \mathcal{L})$ -алгебр $(\mathcal{S} \searrow \mathcal{A})^{\mathcal{S} \searrow \mathcal{L}}$.

Abstract. The contravariant Galois adjunctions and two associated antiequivalences are constructed. By semimonadic functors of completions the analogs of Grothendieck's extension of the fundamental theorem of Galois theory are obtained in abstract categories.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Barr, "Abstract Galois theory", J. Pure Appl. Algebra, **19**, 21 – 42 (1980).
- [2] M. Barr, "Abstract Galois theory, II, J. Pure Appl. Algebra, **25**, 227 – 247 (1982).
- [3] S. H. Dalalyan, "Main theorem in categorial Galois theory", J. Contemp. Math. Analysis (Armen. Acad. Sci.), **27** (4), 1 - 26 (1992).
- [4] S. H. Dalalyan, "Main theorem in categorial Galois theory in regular case", J. Contemp. Math. Analysis (Armen. Acad. Sci.), **27** (6), 23 - 47 (1992).
- [5] S. H. Dalalyan, "S-universality in 2-categories", Proc. of the Yerevan State Univ., no. 1 (2011).
- [6] S. H. Dalalyan, "Semijunctions, semimonads and algebras over them", (in print).
- [7] S. H. Dalalyan, "The semimonads of completions", (in print).
- [8] J. Gray, "Formal Category Theory: Adjointness for 2-categories", Lecture Notes in Math., **391**, Springer-Verlag (1974).
- [9] A. Grothendieck, "Revêtements étales et groupe fondamental", SGA I, Lecture Notes in Math., **269**, Springer-Verlag (1972).
- [10] A. Grothendieck, "La longue marche a travers la theorie de Galois", **1**, Univ. Montpellier II (1995).
- [11] G. Janelidze, "The fundamental theorem of Galois theory", Math. USSR sbornik, **64** (2), 359 - 374 (1989).
- [12] G. Janelidze, "Pure Galois theory in categories", J. Algebra, **132**, 270 – 286 (1990).
- [13] G. Janelidze, "Precategories and Galois theory", Lecture Notes in Math., **1488**, Springer-Verlag, 157 - 173 (1991).
- [14] A. Joyal, M. Tierny, "An extension of the Galois theory of Grothendieck", Memoirs AMS., **309** (1984).
- [15] S. Mac Lane, "Categories for the Working Mathematician", Graduate Texts in Math., Springer-Verlag (1971). (Русский пер.: Теория категорий для работающих математиков, М., Физматлит. 2004.)
- [16] A. R. Magid, The Separable Galois Theory of Commutative Rings", Marcel Dekker (1974).

Поступила 11 октября 2010