

Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 1, 2011, стр. 3-16.

О ЖАДНОМ АЛГОРИТМЕ В $L^1(0, 1)$ ПО РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ ХААРА

С. Л. ГОГЯН

Институт Математики НАН Армении
E-mail: gogyan@instmath.sci.am

Аннотация. В работе в $L^1(0, 1)$ описаны все квази-гриды подсистемы регулярной системы Хаара.

MSC2000 number: 42C10, 42C20

Ключевые слова: Подсистема системы Хаара, регулярная система Хаара, жадный алгоритм, квази-гриды система.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ базис в Банаховом пространстве X и $\inf_{k \in \mathbb{N}} \|\psi_k\|_X > 0$. Тогда для каждого элемента $f \in X$ имеем

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f, \Psi) \psi_k,$$

где $c_k(f, \Psi) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$. Положим $\Lambda_0 = \emptyset$ и для каждого $m \geq 1$ индуктивным методом построим множества $\Lambda_m \subset \mathbb{N}$ удовлетворяющие условиям

$$(1.1) \quad \#\Lambda_m = m, \quad \Lambda_{m-1} \subset \Lambda_m \quad \text{и} \quad \min_{k \in \Lambda_m} |c_k(f, \Psi)| \geq \max_{k \notin \Lambda_m} |c_k(f, \Psi)|.$$

Заметим, что множества Λ_m могут определяться не однозначно. Через $D(f)$ обозначим множества всех таких последовательностей $\{\Lambda_m\}$. Для любого $\Lambda = \{\Lambda_m\} \in D(f)$ положим

$$G_m(f) = G_m(f, \Psi) = G_m(f, \Psi, \Lambda) = \sum_{k \in \Lambda_m} c_k(f, \Psi) \psi_k.$$

Полином $G_m(f, \Psi)$ известен как m -членное жадное приближение элемента f по системе Ψ , а этот нелинейный метод приближения – жадным алгоритмом (см. [5]).

Определение 1.1. Базис $\Psi = \{\psi_k\}$ называется квази-гриды базисом в X если существует число $C > 0$ такое, что для любого элемента $f \in X$ существует

$\Lambda \in D(f)$ для которого выполняется следующее неравенство

$$(1.2) \quad \|G_m(f, \Psi, \Lambda)\|_X \leq C\|f\|_X.$$

Очевидно, что всякий нормированный и безусловный базис является также квази-гриди базисом.

Определение 1.2. Подсистему $F \subset \Psi$ назовем квази-гриди системой в X , если F является квази-гриди базисом в $\overline{\text{span}\{F\}}$.

В работе [9] была доказана следующая теорема.

Теорема А. Базис Ψ является квази-гриди базисом X , тогда и только тогда, когда

$$(1.3) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \|f - G_m(f, \Psi, \Lambda)\|_X = 0,$$

для любых $f \in X$ и $\Lambda \in D(f)$.

В работе [5] отмечена, что если Ψ является квази-гриди базисом, тогда условие (1.2) выполняется для всех $\Lambda \in D(f)$. В работах [6] и [7] был рассмотрен алгоритм, где условие (1.1) было заменено более слабым условием. Для любых $0 < t \leq 1$ и $f \in X$ обозначим через Λ_m^t множество m натуральных чисел, удовлетворяющее условию

$$\min_{k \in \Lambda_m^t} \|c_k(f, \Psi)\|_X \geq t \max_{k \notin \Lambda_m^t} \|c_k(f, \Psi)\|_X,$$

и положим

$$(1.4) \quad G_m^t(f) = G_m^t(f, \Psi) = \sum_{k \in \Lambda_m^t} c_k(f, \Psi) \psi_k.$$

Заметим, что при $t = 1$ получается жадный алгоритм. В работе [6] (см. также [7]) доказано, что для квази-гриди базисов последовательность $\{G_m^t(f)\}$ сходится к f .

Теорема Б. Пусть Ψ квази-гриди базис в Банаховом пространстве X . Тогда для фиксированного $0 < t \leq 1$ и для любых $m \in \mathbb{N}$ и $f \in X$ имеет место следующее неравенство

$$\|G_m^t(f, \Psi)\|_X \leq C(t)\|f\|_X.$$

В настоящей работе мы рассмотрим жадный алгоритм в $L^1(0, 1)$ по общим системам Хаара. Напомним их определение. Для начала положим $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $\Delta_0^{(1)} = [0, 1)$. Далее, выберем любую внутреннюю точку $t_2 \in \Delta_0^{(1)}$ и положим $\Delta_1^{(1)} = [0, t_2)$ и $\Delta_1^{(2)} = [t_2, 1)$. В общем случае выберем любую внутреннюю точку $t_{2^i+j} \in \Delta_i^{(j)} = [a, b)$ для любого $i = 1, 2, \dots$ и $j = 1, 2, \dots, 2^i$ и положим

$\Delta_{i+1}^{(2j-1)} = [a, t_{2^i+j})$ и $\Delta_{i+1}^{(2j)} = [t_{2^i+j}, b)$. Единственное требование, которое налагается на интервалы $\{\Delta_i^{(j)}\}$ это то, что

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \max_{1 \leq j \leq 2^i} |\Delta_i^{(j)}| = 0,$$

где $|A|$ мера Лебега мера множества A , т.е. множество точек $\{t_i\}$ должно быть плотным в $[0, 1]$. Обозначим $h_1 = h_0^{(0)} \equiv 1$, $\Delta_1 = \Delta_0^{(0)} = [0, 1)$, $\gamma_1 = 1$ и для всех $n = 2^i + j$; $j = 1, 2, \dots, 2^i$, $i = 0, 1, 2, \dots$ положим

$$h_n(t) = h_i^{(j)}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2|\Delta_{i+1}^{(2j-1)}|}, & \text{при } t \in \Delta_{i+1}^{(2j-1)}; \\ -\frac{1}{2|\Delta_{i+1}^{(2j)}|}, & \text{при } t \in \Delta_{i+1}^{(2j)}; \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

$$(1.5) \quad \Delta_n = \Delta_i^{(j)}; \quad \gamma_n = \gamma_n(\mathcal{H}) = \frac{|\Delta_{2n-1}|}{|\Delta_{2n}|}.$$

Система функций $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathcal{T}} = \{h_n\}$ есть нормированная в $L^1(0, 1)$ общая система Хаара, соответствующая делению $\mathcal{T} = \{t_n\}$. Общая система Хаара называется регулярной, если

$$(1.6) \quad \gamma = \gamma(\mathcal{H}) = \inf_{n \geq 2} (\gamma_n(\mathcal{H}), \gamma_n(\mathcal{H})^{-1}) > 0.$$

В случае, когда $\mathcal{T} = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \dots\}$ получается двоичная система Хаара. Для системы Хаара имеем, что $\gamma = 1$.

Коэффициенты $c_n(f, \mathcal{H}_{\mathcal{T}})$ определяются согласно следующим формулам:

$$c_1(f, \mathcal{H}_{\mathcal{T}}) = \int_0^1 f(t) dt,$$

$$(1.7) \quad c_n(f, \mathcal{H}_{\mathcal{T}}) = \frac{2}{1 + \gamma_n} \left[\int_{\Delta_{2n-1}} f(t) dt - \gamma_n \int_{\Delta_{2n}} f(t) dt \right] \quad n = 2, 3, \dots$$

Об эффективности жадного алгоритма в $L^p(0, 1)$ при $1 < p < +\infty$ по системе Хаара и по общим системам Хаара можно читать соответственно в [8] и [4]. Здесь только отметим, что в $L^p(0, 1)$ при $1 < p < +\infty$ общая система Хаара является безусловным базисом, следовательно, нормированная в $L^p(0, 1)$ общая система Хаара является квази-гриди базисом. Но ситуация другая в $L^1(0, 1)$. В работе [1] была отмечена, что (нормированная в $L^1(0, 1)$) система Хаара не является квази-гриди базисом в $L^1(0, 1)$. Аналогичный результат для общей системы Хаара была получена в работе [2].

Определение 1.3. Пусть $\mathcal{M}$ подмножество множества натуральных чисел. Скажем, что подсистема общей системы Хаара $\{h_i\}_{i \in \mathcal{M}}$ содержит цепь длиной H если существуют числа $k_1, k_2, \dots, k_H \in \mathcal{M}$ такие, что для любого $i = 1, 2, \dots, H-1$ имеет место либо $k_{i+1} = 2k_i - 1$ либо $k_{i+1} = 2k_i$.

Для подсистемы общей системы Хаара $\{h_i\}_{i \in \mathcal{M}}$ положим

$$H(\mathcal{M}) = \sup\{H : \text{в } \{h_i\}_{i \in \mathcal{M}} \text{ содержится цепь длиной } H\}.$$

В работе [3] была доказана следующая теорема:

Теорема В. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{N}$. Тогда подсистема двоичной системы Хаара является квази-гриди системой в $L^1(0, 1)$ тогда и только тогда, когда

$$(1.8) \quad H(\mathcal{M}) < \infty.$$

В настоящей работе доказывается следующая теорема:

Теорема 1.1. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{N}$ и $\{h_i\}$ регулярная система Хаара. Тогда подсистема $\{h_i\}_{i \in \mathcal{M}}$ является квази-гриди системой в $L^1(0, 1)$ тогда и только тогда, когда $H(\mathcal{M}) < \infty$.

Заметим, что в [2] была построена общая система Хаара (не регулярная) для которой существует подсистема $\{h_n\}_{n \in \mathcal{M}}$ с $H(\mathcal{M}) = 1$, которая не является квази-гриди системой в $L^1(0, 1)$.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Через $\|f\|_\Delta$ обозначим L^1 норму функции f на интервале Δ , т.е.

$$\|f\|_\Delta = \int_\Delta |f(t)| dt$$

и используем запись $\|f\|$ в случае $\Delta = [0, 1)$. Обозначим $c_k(f) = c_k(f, \mathcal{H})$ и $sp(\mathcal{H}, f) = \{k \in \mathbb{N} : c_k(f) \neq 0\}$. Напомним, что система Хаара имеет следующее свойство монотонности: из $m > n$ следует, что $\|S_m(f)\| \geq \|S_n(f)\|$, где

$$S_m(f) = \sum_{i=1}^m c_i(f) h_i.$$

Лемма 2.1. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $f \in L^1(0, 1)$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ с $\Delta_n \subseteq \Delta_k$ имеет место следующее неравенство

$$\|f\|_{\Delta_k} \geq \frac{1+\gamma}{2} |c_n(f)|.$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $n > 1$. Учитывая (1.6) и (1.7) получим, что

$$\begin{aligned} |c_n(f)| &\leq \frac{2}{1+\gamma_n} (\|f\|_{\Delta_{2n-1}} + \gamma_n \|f\|_{\Delta_{2n}}) \\ &\leq \frac{2}{1+\gamma} (\|f\|_{\Delta_{2n-1}} + \|f\|_{\Delta_{2n}}) = \frac{2\|f\|_{\Delta_n}}{1+\gamma} \leq \frac{2\|f\|_{\Delta_k}}{1+\gamma}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай $n = 1$. В этом случае имеем, что $\Delta_k = [0, 1)$, следовательно

$$|c_1(f)| = \left| \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \|f\| \leq \frac{2}{1+\gamma} \|f\|.$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.2. Пусть $f \in L^1(0, 1)$ и $\max\{|c_n(f)| : \Delta_n \supset \Delta_m\} \leq 1$ для некоторого натурального $m > 1$. Тогда

$$\|S_{m-1}(f)\|_{\Delta_m} \leq \frac{\gamma+1}{2\gamma}.$$

Доказательство. По индукции по k докажем, что если выполняется условие леммы при некотором m , $2^k < m \leq 2^{k+1}$, то

$$\|S_{m-1}(f)\|_{\Delta_m} \leq \frac{\gamma+1}{2\gamma} - \frac{1-\gamma}{2\gamma} (1+\gamma)^{-k}.$$

Пусть $k = 0$ и условие леммы выполняется при $m = 2$. Имеем, что $|c_1(f)| \leq 1$, следовательно

$$\|S_1(f)\| = |c_1(f)| \leq 1 = \frac{\gamma+1}{2\gamma} - \frac{1-\gamma}{2\gamma}.$$

Предположим, что утверждение леммы справедливо при некотором k и докажем для $k+1$. Пусть условие леммы выполняются при некотором m , $2^{k+1} < m \leq 2^{k+2}$. Определим число j из условия $\Delta_j \supset \Delta_m$ и $2^k < j \leq 2^{k+1}$. Ясно, что число j удовлетворяет условиям леммы, следовательно, согласно предположению индукции имеем, что

$$\|S_{j-1}(f)\|_{\Delta_j} \leq \frac{\gamma+1}{2\gamma} - \frac{1-\gamma}{2\gamma} (1+\gamma)^{-k}.$$

С учетом вышесказанного и (1.5) заключаем, что

$$\begin{aligned} \|S_{m-1}(f)\|_{\Delta_m} &= \|S_{j-1}(f) + c_j(f)h_j\|_{\Delta_m} \leq \|S_{j-1}(f)\|_{\Delta_m} + \|c_j(f)h_j\|_{\Delta_m} \leq \\ &\leq \frac{|\Delta_m|}{|\Delta_j|} \|S_{j-1}(f)\|_{\Delta_j} + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+\gamma} \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma} - \frac{1-\gamma}{2\gamma} (1+\gamma)^{-k} \right) + \frac{1}{2} \leq \\ &\leq \frac{\gamma+1}{2\gamma} - \frac{1-\gamma}{2\gamma} (1+\gamma)^{-k-1}. \end{aligned}$$

Предположение индукции доказано, откуда следует утверждение леммы 2.2. $\square$

Для любой $f \in L^1(0, 1)$, $n > 1$ и общей системы Хаара $\mathcal{H}$ положим

$$L_1(f, \mathcal{H}, n)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{при } x \notin \Delta_{2n}, \\ f(a + \gamma_n(x - t_n)), & \text{при } x \in \Delta_{2n}, \end{cases}$$

$$L_2(f, \mathcal{H}, n)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{при } x \notin \Delta_{2n-1}, \\ f(t_n + \frac{x-t_n}{\gamma_n}), & \text{при } x \in \Delta_{2n-1}, \end{cases}$$

где $[a, b) = \Delta_n$. Заметим, что $\Delta_{2n-1} = [a, t_n)$ и $\Delta_{2n} = [t_n, b)$.

Лемма 2.3. Пусть $f, g \in L^1(0, 1)$ и $\|f + g\| > 0$. Тогда для любого интервала $\Delta_n = [a, b)$ с $n > 1$ справедливо хотя бы одно из следующих неравенств

$$(2.1) \quad \|L_1(f, \mathcal{H}, n)\| \geq \frac{\|f\|}{\|f + g\|} \cdot \|L_1(f + g, \mathcal{H}, n)\|,$$

$$(2.2) \quad \|L_2(f, \mathcal{H}, n)\| \geq \frac{\|f\|}{\|f + g\|} \cdot \|L_2(f + g, \mathcal{H}, n)\|.$$

Более того, равенства в (2.1) и в (2.2) выполняются одновременно.

Доказательство. Для краткости положим

$$B = \frac{\|f\|}{\|f + g\|}.$$

Очевидно, что справедливо хотя бы одно из следующих неравенств (а равенства выполняются одновременно)

$$(2.3) \quad \|f\| - \|f\|_{\Delta_{2n}} + \frac{\|f\|_{\Delta_{2n-1}}}{\gamma_n} \geq B \left(\|f + g\| - \|f + g\|_{\Delta_{2n}} + \frac{\|f + g\|_{\Delta_{2n-1}}}{\gamma_n} \right),$$

$$(2.4) \quad \|f\| - \|f\|_{\Delta_{2n-1}} + \gamma_n \|f\|_{\Delta_{2n}} \geq B \left(\|f + g\| - \|f + g\|_{\Delta_{2n-1}} + \gamma_n \|f + g\|_{\Delta_{2n}} \right).$$

С учетом того, что

$$\|L_1(f, \mathcal{H}, n)\| = \|f\| - \|f\|_{\Delta_{2n}} + \frac{\|f\|_{\Delta_{2n-1}}}{\gamma_n},$$

$$\|L_2(f, \mathcal{H}, n)\| = \|f\| - \|f\|_{\Delta_{2n-1}} + \gamma_n \|f\|_{\Delta_{2n}},$$

$$\|L_1(f + g, \mathcal{H}, n)\| = \|f + g\| - \|f + g\|_{\Delta_{2n}} + \frac{\|f + g\|_{\Delta_{2n-1}}}{\gamma_n},$$

$$\|L_2(f + g, \mathcal{H}, n)\| = \|f + g\| - \|f + g\|_{\Delta_{2n-1}} + \gamma_n \|f + g\|_{\Delta_{2n}},$$

становится ясно, что из (2.3) следует (2.1), а из (2.4) следует (2.2). Лемма 2.3 доказана. $\square$

Для нормированной общей системы Хаара $\mathcal{H}$ и для натурального числа $n > 1$ положим

$$\mathcal{H}_1(\mathcal{H}, n) = \{h_k\}_{\Delta_k \not\subseteq \Delta_{2n}} \cup \{\gamma_n L_1(h_k, \mathcal{H}, n)\}_{\Delta_k \subseteq \Delta_{2n-1}},$$

и

$$\mathcal{H}_2(\mathcal{H}, n) = \{h_k\}_{\Delta_k \not\subseteq \Delta_{2n-1}} \cup \left\{ \frac{L_2(h_k, \mathcal{H}, n)}{\gamma_n} \right\}_{\Delta_k \subseteq \Delta_{2n}}.$$

Очевидно, что $\mathcal{H}_1(\mathcal{H}, n)$ и $\mathcal{H}_2(\mathcal{H}, n)$ являются нормированными общими системами Хаара.

Для любых $f, g \in L^1(0, 1)$, $\|f + g\| > 0$, общей системы Хаара $\mathcal{H}$ и натурального $n > 1$, положим

$$L((f, g, \mathcal{H}), n) = \begin{cases} (L_1(f, \mathcal{H}, n), L_1(g, \mathcal{H}, n), \mathcal{H}_1(\mathcal{H}, n)) , & \text{если имеет место (2.1) и} \\ & \|L_1(f + g, \mathcal{H}, n)\| > 0, \\ (L_2(f, \mathcal{H}, n), L_2(g, \mathcal{H}, n), \mathcal{H}_2(\mathcal{H}, n)) , & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

и

$$E((f, g, \mathcal{H}), n) = \begin{cases} \Delta_{2n} , & \text{если имеет место (2.1) и} \\ & \|L_1(f + g, \mathcal{H}, n)\| > 0, \\ \Delta_{2n-1} , & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Лемма 2.4. Пусть функции $f, g \in L^1(0, 1)$ общая система Хаара $\mathcal{H}$ и число $n \geq 2$ таковы, что

- i) $c_n(\mathcal{H}, f) = c_n(\mathcal{H}, g) = 0$,
- ii) $sp(\mathcal{H}, f) \cap sp(\mathcal{H}, g) = \emptyset$,
- iii) $\|f\| > 0, \|f + g\| > 0$.

Тогда для $(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{\mathcal{H}}) = L((f, g, \mathcal{H}), n)$ и $\tilde{E} = E((f, g, \mathcal{H}), n)$ справедливы следующие утверждения

- 1) $c_n(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{f}) = c_n(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{g}) = 0$,
- 2) $c_k(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{f}) = c_k(\mathcal{H}, f)$ и $c_k(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{g}) = c_k(\mathcal{H}, g)$ для всех k с $\Delta_k \not\subseteq \tilde{E}$,
- 3) $sp(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{f}) \cap sp(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{g}) = \emptyset$,
- 4) $\gamma(\tilde{\mathcal{H}}) \geq \gamma(\mathcal{H})$,
- 5) $\|\tilde{f}\| > 0, \|\tilde{f} + \tilde{g}\| > 0$,
- 6) $\frac{\|f\|}{\|f+g\|} \leq \frac{\|\tilde{f}\|}{\|\tilde{f}+\tilde{g}\|}$.
- 7) $H(sp(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{f} + \tilde{g})) \leq H(sp(\mathcal{H}, f + g))$.

Доказательство. 1) - 2). Носитель i -той функции системы $\tilde{\mathcal{H}}$ обозначим через $\tilde{\Delta}_i$. Также положим $\tilde{\gamma}_i = \frac{|\tilde{\Delta}_{2i-1}|}{|\tilde{\Delta}_{2i}|}$. Согласно определению функции $\tilde{f}$ имеем, что

$$\int_{\Delta_{2n-1}} \tilde{f} = \gamma_n \int_{\Delta_{2n}} \tilde{f}.$$

Из условия i) следует, что

$$(2.5) \quad \int_{\Delta_{2n-1}} f = \gamma_n \int_{\Delta_{2n}} f.$$

Учитывая две последние равенства, а также то, что функции f и $\tilde{f}$ совпадают либо на Δ_{2n-1} либо на Δ_{2n} , можно заключить, что

$$\int_{\Delta_{2n-1}} f = \int_{\Delta_{2n-1}} \tilde{f} \quad \text{и} \quad \int_{\Delta_{2n}} f = \int_{\Delta_{2n}} \tilde{f}.$$

Итак имеем, что функции f и $\tilde{f}$ совпадают вне интервала $\tilde{E}$, а на $\tilde{E}$ имеют равные интегралы. Следовательно, для любого натурального k с $\Delta_k \not\subseteq \tilde{E}$ будем иметь, что

$$\int_{\Delta_{2k-1}} f = \int_{\Delta_{2k-1}} \tilde{f}, \quad \text{и} \quad \int_{\Delta_{2k}} f = \int_{\Delta_{2k}} \tilde{f}.$$

Также заметим, что $\Delta_{2k-1} = \tilde{\Delta}_{2k-1}$, $\Delta_{2k} = \tilde{\Delta}_{2k}$ и $\gamma_k = \tilde{\gamma}_k$ для всех k с $\Delta_k \not\subseteq \tilde{E}$. С учетом всего вышесказанного и (1.7) заключаем, что $c_k(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{f}) = c_k(\mathcal{H}, f)$. Аналогичные утверждения справедливы также для функций g и $\tilde{g}$.

3) - 4). Покажем, что $c_k(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{f}) \cdot c_k(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{g}) = 0$ и $\tilde{\gamma}_k \in \{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$ для любого натурального k . Для этого рассмотрим два случая.

Случай 1: $\Delta_k \not\subseteq \tilde{E}$. Согласно утверждению 2) леммы имеем, что $c_k(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{f}) = c_k(\mathcal{H}, f)$ и $c_k(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{g}) = c_k(\mathcal{H}, g)$. С учетом условия ii) получаем, что $c_k(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{f}) \cdot c_k(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{g}) = 0$. Также в пункте 2) мы показали, что $\tilde{\gamma}_k = \gamma_k$ для всех k с $\Delta_k \not\subseteq \tilde{E}$.

Случай 2: $\Delta_k \subseteq \tilde{E}$. Для определенности предположим, что $\tilde{E} = \Delta_{2n-1}$. Тогда при некотором натуральном j с $\Delta_j \subseteq \Delta_{2n}$ имеем, что $\tilde{h}_k = \frac{L_2(h_j, \mathcal{H}, n)}{\gamma_n}$. Заметим, что $|\tilde{\Delta}_{2j-1}| = \gamma_n |\Delta_{2k-1}|$ и $|\tilde{\Delta}_{2j}| = \gamma_n |\Delta_{2k}|$, следовательно $\tilde{\gamma}_k = \gamma_j$. Также легко проверить, что $c_k(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{f}) = \gamma_n c_j(\mathcal{H}, f)$ и $c_k(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{g}) = \gamma_n c_j(\mathcal{H}, g)$. Итак имеем, что $c_k(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{f}) \cdot c_k(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{g}) = 0$ и $\tilde{\gamma}_k \in \{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$. Заметим, что в случае, когда $\tilde{E} = \Delta_{2n}$ все вышесказанное остается верным, только γ_n меняется на $\frac{1}{\gamma_n}$.

5) - 6). Для краткости положим $B = \frac{\|f\|}{\|f+g\|}$. В случае, когда

$$(\tilde{f}, \tilde{g}) = (L_1(f, \mathcal{H}, n), L_1(g, \mathcal{H}, n))$$

имеем, что $\|\tilde{f}\| \geq B\|\tilde{f} + \tilde{g}\| > 0$. Отсюда следуют утверждения пунктов 5) и 6). Рассмотрим случай, когда $(\tilde{f}, \tilde{g}) = (L_2(f, \mathcal{H}, n), L_2(g, \mathcal{H}, n))$. В этом случае имеем, что либо $\|L_1(f + g, \mathcal{H}, n)\| = 0$, либо $\|L_1(f + g, \mathcal{H}, n)\| > 0$ но не выполняется неравенство (2.1). Рассмотрим эти случаи по отдельности.

Случай 1: $\|L_1(f + g, \mathcal{H}, n)\| = 0$. Это означает, что $f + g = 0$ вне интервала Δ_{2n} . и согласно (2.5), а также аналогичной формулы для функции g получаем, что

$$c_k(f + g) = 0 \quad \text{для всех } k \text{ с } \Delta_k \not\subseteq \Delta_{2n}.$$

С учетом данного свойства и условия ii) получаем, что

$$c_k(f) = 0 \text{ для всех } k \text{ с } \Delta_k \not\subseteq \Delta_{2n}.$$

Следовательно, $f = 0$ вне множества Δ_{2n} и поэтому

$$\|\tilde{f}\| = \|L_2(f, \mathcal{H}, n)\| = (1 + \gamma_n)\|f\|.$$

Также имеем, что $\|\tilde{f} + \tilde{g}\| = (1 + \gamma_n)\|f + g\|$. Из последних двух равенств следуют утверждения 5) и 6) леммы.

Случай 2: $\|L_1(f, \mathcal{H}, n)\| < B\|L_1(f + g, \mathcal{H}, n)\|$. В этом случае, согласно лемме 2.3 имеем, что $\|\tilde{f}\| > B\|\tilde{f} + \tilde{g}\|$. Остается показать, что $\|\tilde{f} + \tilde{g}\| > 0$. Это следует из того, что $\|\tilde{f}\| > 0$ и из утверждения пункта 3) данной леммы.

7) Пусть $\tilde{\Delta}_{\alpha_1} \supset \tilde{\Delta}_{\alpha_2} \supset \dots \supset \tilde{\Delta}_{\alpha_r}$ является цепью в $\{\tilde{h}_i\}_{i \in sp(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{f} + \tilde{g})}$. Покажем, что в $\{h_i\}_{i \in sp(\mathcal{H}, f + g)}$ содержится цепь длиной r . Имеем, что

$$c_{\alpha_1}(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{f} + \tilde{g}) \neq 0, c_{\alpha_2}(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{f} + \tilde{g}) \neq 0, \dots, c_{\alpha_r}(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{f} + \tilde{g}) \neq 0.$$

Согласно утверждению пункта 1) имеем, что $c_n(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{f} + \tilde{g}) = 0$, поэтому возможны следующие два случая:

Случай 1: $\tilde{\Delta}_{\alpha_r} \not\subseteq \tilde{E}$. Тогда $\Delta_{\alpha_i} = \tilde{\Delta}_{\alpha_i} \not\subseteq \tilde{E}$ для всех $1 \leq i \leq r$. С учетом утверждения пункта 2) получим, что

$$c_{\alpha_i}(\mathcal{H}, f + g) = c_{\alpha_i}(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{f} + \tilde{g}) \neq 0 \text{ для всех } 1 \leq i \leq r.$$

Следовательно $\Delta_{\alpha_1} \supset \Delta_{\alpha_2} \supset \dots \supset \Delta_{\alpha_r}$ является цепью в $\{h_i\}_{i \in sp(\mathcal{H}, f + g)}$.

Случай 2: $\tilde{\Delta}_{\alpha_1} \subseteq \tilde{E}$. Для определенности предположим, что $\tilde{E} = \Delta_{2n-1}$. Определим числа $\beta_1, \dots, \beta_r$ из условий $\tilde{h}_{\alpha_i} = \frac{L_2(h_{\beta_i}, \mathcal{H}, n)}{\gamma_n}$ для $1 \leq i \leq r$. Повторяя рассуждения, сделанные при рассмотрении второго случая при доказательстве пунктов 3) и 4) данной леммы заключаем, что $\Delta_{\beta_1} \supset \Delta_{\beta_2} \supset \dots \supset \Delta_{\beta_r}$ образует цепь в $sp(\mathcal{H}, f + g)$. Лемма 2.4 доказана. $\square$

3. ПОДСИСТЕМЫ РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ ХААРА КАК КВАЗИ-ГРИДИ БАЗИС

Пусть $\mathcal{M}$ последовательность натуральных чисел. Скажем, что интервал Δ_n , $n \notin \mathcal{M}$ имеет k -тый уровень в $\mathcal{M}$, если

$$\#\{i > 1 : i \notin \mathcal{M}, \Delta_n \subseteq \Delta_i\} = k.$$

Заметим, что если $H(\mathcal{M}) < \infty$, то

1. Любой интервал k -го уровня является объединением не более чем $2^{H(\mathcal{M})+1}$ интервалов $(k+1)$ -ого уровня.

2. Все интервалы k -того уровня не пересекаются, а их объединение дает интервал $[0, 1)$.

Для функций $f, g \in L^1(0, 1)$, общей системы Хаара $\mathcal{H}$, измеримого множества $S \subset [0, 1)$ и натурального $n > 1$, положим

$$\tilde{L}((f, g, \mathcal{H}), S, \Delta_n) = (L((f, g, \mathcal{H}), n), S \cup E(f, g, \mathcal{H}, n)).$$

Лемма 3.1. Пусть p полином по регулярной системе Хаара $\mathcal{H}$. Далее пусть функция $q \in L^1(0, 1)$ такова, что

- 1) $sp(\mathcal{H}, p) \cap sp(\mathcal{H}, q) = \emptyset$,
- 2) $\|p\| > 0, \|p + q\| > 0$,
- 3) $H = H(sp(\mathcal{H}, p + q)) < \infty$,
- 4) $1 \notin sp(\mathcal{H}, p + q), 2 \notin sp(\mathcal{H}, p + q)$,
- 5) $|c_i(\mathcal{H}, p)| \geq |c_j(\mathcal{H}, q)|$ для всех $i \in sp(\mathcal{H}, p)$ и $j \in sp(\mathcal{H}, q)$.

Тогда

$$\frac{\|p\|}{\|p + q\|} \leq 2^H \left(\frac{1 + \gamma}{\gamma} \right)^2$$

где $\gamma = \gamma(\mathcal{H})$.

Доказательство. Лемма очевидна в случае $q = 0$. Рассмотрим случай $\|q\| > 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\max_{j \in \mathbb{N}} |c_j(q)| = 1$.

Интервалы i -го уровня в $sp(\mathcal{H}, p + q)$ обозначим через $\delta_i^{(1)}, \delta_i^{(2)}, \dots, \delta_i^{(d_i)}$. Заметим, что из условия 4) следует, что $\delta_1^{(1)} = [0, 1)$ и $d_1 = 1$. Через k обозначим наименьшее натуральное число, для которого полином p постоянен на всех интервалах k -того уровня. Положим

$$\begin{aligned} & ((p', q', \mathcal{H}'), E) = \\ & = \tilde{L}(\tilde{L}(\dots \tilde{L}(\tilde{L}((p, q, \mathcal{H}), \emptyset), \delta_{k-1}^{(1)}), \delta_{k-1}^{(2)}), \dots), \delta_{k-1}^{(d_{k-1})}, \delta_{k-2}^{(1)}, \delta_{k-2}^{(2)}, \dots), \delta_1^{(1)}). \end{aligned}$$

Согласно Лемме 2.4 имеем, что

$$(3.1) \quad \frac{\|p\|}{\|p + q\|} \leq \frac{\|p'\|}{\|p' + q'\|},$$

$$(3.2) \quad \|p'\| > 0,$$

$$(3.3) \quad sp(\mathcal{H}', p') \cap sp(\mathcal{H}', q') = \emptyset \quad \text{и} \quad \{1, 2\} \cap sp(\mathcal{H}', p' + q') = \emptyset.$$

$$(3.4) \quad c_k(\mathcal{H}', p') = c_k(\mathcal{H}, p) \quad \text{и} \quad c_k(\mathcal{H}', q') = c_k(\mathcal{H}, q) \quad \text{для всех } k \text{ с } \Delta_k \not\subseteq E',$$

$$(3.5) \quad \gamma' := \gamma(\mathcal{H}') \geq \gamma(\mathcal{H}),$$

$$H(sp(\mathcal{H}', p' + q')) \leq H(\mathcal{H}, sp(p + q)).$$

Из условий леммы и из (3.4) следует, что

$$(3.6) \quad |c_k(\mathcal{H}', q')| \leq 1 \text{ для всех } k \text{ с } \Delta_k \not\subseteq E',$$

и

$$|c_k(\mathcal{H}', p')| \geq 1 \text{ для всех } k \text{ с } \Delta_k \not\subseteq E', c_k(\mathcal{H}', p') \neq 0,$$

Заметим, что

А) E' является объединением интервалов k -того уровня.

Если некоторый интервал Δ_j с уровнем $1 \leq i < k$ не содержится в множестве E' , то

$$\text{В) } L_1(p', \mathcal{H}', j) = L_2(p', \mathcal{H}', j) \text{ и } L_1(q', \mathcal{H}', j) = L_2(q', \mathcal{H}', j)$$

С) Либо Δ_{2j-1} , либо Δ_{2j} можно представить в виде объединения интервалов $(i+1)$ -го уровня, каждый из которых не содержится в E' .

Докажем, что для любого интервала $\delta_i^{(s)}$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq s \leq d_i$ с $\delta_i^{(s)} \not\subseteq E'$ справедливы соотношения

$$(3.7) \quad \|p'\|_{\delta_i^{(s)}} \leq \left(\frac{1+\gamma'}{\gamma'}\right)^2 2^H \|p' + q'\|_{\delta_i^{(s)}} + \frac{1+\gamma'}{2\gamma'} \quad \text{если } p' \text{ постоянна на } \delta_i^{(s)}$$

$$(3.8) \quad \|p'\|_{\delta_i^{(s)}} \leq \left(\frac{1+\gamma'}{\gamma'}\right)^2 2^H \|p' + q'\|_{\delta_i^{(s)}} - 2^{H-1} \left(\frac{1+\gamma'}{\gamma'}\right)^2 \quad \text{если } p' \text{ не постоянна на } \delta_i^{(s)}.$$

Доказательство проведем индукцией по $i = k, k-1, \dots, 1$. Предположим $i = k$. Пусть интервал k -того уровня $\Delta_j = \delta_k^{(s)}$ не содержится в множестве E' . Тогда, согласно первому свойству множества E' имеем, что $\Delta_j \cap E' = \emptyset$. Следовательно, p' постоянна на Δ_j . С учетом монотонности системы Хаара, Леммы 2.2 и (3.6) получим, что

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \|p'\|_{\Delta_j} &= \|S_{j-1}(p')\|_{\Delta_j} \leq \|S_{j-1}(p' + q')\|_{\Delta_j} + \|S_{j-1}(q')\|_{\Delta_j} \leq \\ &\leq \|p' + q'\|_{\Delta_j} + \|S_{j-1}(q')\|_{\Delta_j} \leq 2^H \left(\frac{1+\gamma'}{\gamma'}\right)^2 \|p' + q'\|_{\Delta_j} + \frac{1+\gamma'}{2\gamma'}. \end{aligned}$$

Предположим, что (3.7) и (3.8) справедливы при некотором $1 < i \leq k$ и докажем для $i-1$. Пусть $\delta_{i-1}^{(s)} \not\subseteq E'$ при некотором $1 \leq s \leq d_{i-1}$. Определим число j из условия $\Delta_j = \delta_{i-1}^{(s)}$. В случае, когда p' постоянна на интервале Δ_j , неравенство (3.7) получается аналогично случаю $i = k$. Рассмотрим случай, когда p' не постоянна на интервале Δ_j . С учетом свойства В множества E' имеем, что p' не постоянна на интервалах Δ_{2j-1} и Δ_{2j} . С учетом свойства С множества E' заключаем, что

$$(3.10) \quad \Delta_m = \delta_i^{(\alpha_1)} \cup \delta_i^{(\alpha_1)} \cup \dots \cup \delta_i^{(\alpha_r)}$$

где $m = 2j - 1$ или $m = 2j$, а каждый интервал правой части (3.10) не содержится в E' . Также заметим, что согласно условию 3) данной леммы имеем, что $r \leq 2^H$. Для всех интервалов правой части (3.10) имеет место либо (3.7), либо (3.8). Через b обозначим количество интервалов, на которых справедливо (3.8). Рассмотрим 2 случая.

Случай 1. $b = 0$. В этом случае p' постоянна на всех интервалах правой части (3.10). Положим

$$\tilde{q} = \sum_{\Delta'_n \not\subseteq \delta_i^{(\alpha_t)}, 1 \leq t \leq r} c_n(\mathcal{H}', q') h_n'.$$

Согласно монотонности общей системы Хаара имеем

$$(3.11) \quad \|p' + q'\|_{\Delta_m} \geq \|p' + \tilde{q}\|_{\Delta_m}.$$

Также, согласно (3.4) и лемме 2.2 имеем, что

$$\|\tilde{q}\|_{\delta_i^{(\alpha_t)}} \leq \frac{1 + \gamma'}{2\gamma'} \quad \text{для всех } 1 \leq t \leq r,$$

следовательно

$$(3.12) \quad \|\tilde{q}\|_{\Delta_m} \leq 2^H \frac{1 + \gamma'}{2\gamma'}.$$

Комбинируя (3.11) и (3.12) получим, что

$$(3.13) \quad \|p'\|_{\Delta_m} - \|p' + q'\|_{\Delta_m} \leq 2^H \frac{1 + \gamma'}{2\gamma'}.$$

Из того, что p' не постоянна на Δ_m , но постоянна на всех интервалах правой части (3.10), следует, что $c_\beta(\mathcal{H}', p') \neq 0$ при некотором β , для которой $\Delta_\beta \subset \Delta_m$ и Δ_β содержит один из интервалов правой части (3.10). Следовательно, согласно (3.4) и лемме 2.1 имеем, что

$$\|p'\|_{\Delta_m} \geq \frac{1 + \gamma'}{2}.$$

Учитывая (3.3) получаем, что

$$\|p' + q'\|_{\Delta_m} \geq \frac{1 + \gamma'}{2}.$$

С учетом (3.13) заключаем, что

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1 + \gamma'}{\gamma'} \right)^2 2^H \|p' + q'\|_{\Delta_m} - \|p'\|_{\Delta_m} \geq \\ & \geq \left[\left(\frac{1 + \gamma'}{\gamma'} \right)^2 2^H - 1 \right] \|p' + q'\|_{\Delta_m} - 2^H \frac{1 + \gamma'}{2\gamma'} > 2^{H-1} \frac{1 + \gamma'}{\gamma'^2}. \end{aligned}$$

Случай 2. $b > 0$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \|p'\|_{\Delta_m} &= \sum_{t=1}^r \|p'\|_{\delta_i^{(\alpha_t)}} \leq 2^H \left(\frac{1+\gamma'}{\gamma'} \right)^2 \sum_{t=1}^r \|p' + q'\|_{\delta_i^{(\beta_t)}} - \\ &- b \cdot 2^{H-1} \left(\frac{1+\gamma'}{\gamma'} \right)^2 + (r-b) \frac{1+\gamma'}{2\gamma'} \leq 2^H \left(\frac{1+\gamma'}{\gamma'} \right)^2 \|p' + q'\|_{\Delta_m} - 2^{H-1} \frac{1+\gamma'}{\gamma'^2}. \end{aligned}$$

Итак, в обоих случаях имеем, что

$$(3.14) \quad \|p'\|_{\Delta_m} \leq 2^H \left(\frac{1+\gamma'}{\gamma'} \right)^2 \|p' + q'\|_{\Delta_m} - 2^{H-1} \frac{1+\gamma'}{\gamma'^2}.$$

Учитывая свойство В, (3.14) и то, что $\frac{|\Delta_j \setminus \Delta_m|}{|\Delta_m|} \geq \gamma'$ заключаем, что

$$\|p'\|_{\Delta_j} \leq 2^H \left(\frac{1+\gamma'}{\gamma'} \right)^2 \|p' + q'\|_{\Delta_j} - 2^{H-1} \left(\frac{1+\gamma'}{\gamma'} \right)^2.$$

Предположение индукции доказано. Имеем, что $\delta_1^{(1)} = [0, 1)$, а из (3.2) следует, что p' не постоянна на $[0, 1)$. Следовательно, согласно (3.8) имеем, что

$$\|p'\| \leq 2^H \left(\frac{1+\gamma'}{\gamma'} \right)^2 \|p' + q'\|.$$

С учетом (3.1) и (3.5) лемма 3.1 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 1.1. Достаточность. Пусть последовательность $\mathcal{M}$ такова, что $H(\mathcal{M}) < \infty$ и $1; 2 \notin \mathcal{M}$. Пусть $f \in \overline{\text{span}\{h_n\}_{n \in \mathcal{M}}}$. Очевидно, что полином $G_m(f)$ и функция $f - G_m(f)$ удовлетворяют всем требованиям леммы 3.1, следовательно

$$\frac{\|G_m(f)\|}{\|f\|} \leq \left(\frac{1+\gamma}{\gamma} \right)^2 2^{H(\mathcal{M})}.$$

Достаточность условия $H(\mathcal{M})$ доказана.

Необходимость. Пусть $H(\mathcal{M}) = \infty$. Для любого натурального B выберем числа $k, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2B} \in \mathcal{N}$ так, чтобы

$$\Delta_{k+1}^{(\alpha_1)} \supset \Delta_{k+2}^{(\alpha_2)} \supset \dots \supset \Delta_{k+2B}^{(\alpha_{2B})},$$

являлась цепью в $\{h_n\}_{n \in \mathcal{M}}$. Для простоты предположим, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{2B} = 1$. Положим

$$f = \sum_{j=1}^{2B} \frac{h_{k+j}^{(\alpha_j)}}{1 + \gamma_{k+j}^{(\alpha_j)}} = \frac{\mathcal{J}_{\Delta_{k+2B+1}^{(1)}} - \mathcal{J}_{\Delta_{k+1}^{(1)}}}{2},$$

где

$$\mathcal{J}_E(x) = \begin{cases} \frac{1}{|E|} & , \quad \text{при } x \in E, \\ 0 & , \quad \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Заметим, что при некотором $\Lambda \in D(f, \gamma)$ имеем, что (см (1.4))

$$G_B^\gamma(f, \Lambda) = \sum_{j=1}^B \frac{h_{k+2j}^{(1)}}{1 + \gamma_{k+2j}^{(1)}}.$$

Легко проверить, что

$$\|f\| < 1 \quad \text{и} \quad \|G_B^\gamma(f)\| > \frac{B\gamma^2}{2(1+\gamma)^2},$$

следовательно

$$\|G_B^\gamma(f)\| > B \cdot \frac{\gamma^2}{2(1+\gamma)^2} \cdot \|f\|.$$

Ввиду произвольности B и теоремы Б заключаем, что система $\{h_n\}_{n \in \mathbb{M}}$ не является квази-гриди системой в $L^1(0, 1)$. Теорема 1.1 доказана.

Abstract. The paper describes all quasi-greedy subsystems of the regular Haar system in $L^1(0, 1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S.J. Dilworth, D. Kutzarova and P. Wojtaszczyk, “On Approximate l_1 systems in Banach spaces”, Journal of Approximation Theory **114** (2), 214 – 241 (2002).
- [2] S. Gogyan, “Greedy algorithm with regard to Haar subsystems”, East Journal on Approximations, **11** (2), 221 – 236 (2005).
- [3] С. Гогян, “О жадном алгоритме в $L^1(0, 1)$ по подсистемам системы Хаара и о ω -квази-гриди базисах”, Матем. Заметки, **88** (1), 18–29, (2010).
- [4] A. Kamont, “General Haar systems and greedy approximation”, Studia Mathematica, **145** (2), 165 – 184 (2010).
- [5] S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, “A remark on greedy approximation in Banach spaces”, East J. Approx. **5**, 365 – 379 (1999).
- [6] S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, “Convergence of greedy approximation I. General Systems”, Studia Mathematica **159** (1), 143 – 160 (2003).
- [7] S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, “Greedy approximation with regard to bases and general minimal systems”, Serdica math. j. **28** (4), 305 – 328 (2002).
- [8] V. N. Temlyakov, “The best m -term approximation and Greedy Algorithms, Advances in Comp. Math., **8** (3), 249-265 (1998).
- [9] P. Wojtaszczyk, “Greedy algorithms for general biorthogonal systems, J. Approx Theory **107** (2), 293 – 314 (2000).

Поступила 21 июня 2010