

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ C^* -АЛГЕБР, ПОРОЖДЕННЫХ
СЧЕТНЫМ СЕМЕЙСТВОМ ЧАСТИЧНЫХ ИЗОМЕТРИЙ

А. Ю. КУЗНЕЦОВА

Казанский государственный университет
E-mail: alla_kuznetsova@rambler.ru

Аннотация. В работе исследуются свойства оператора T_φ на гильбертовом пространстве $l^2(\mathbb{Z})$, индуцированного отображением φ множества $\mathbb{Z}$ в себя. Показывается, что если относительно этого отображения мощность прообраза каждого элемента из $\mathbb{Z}$ конечна, но не равномерно ограничена, то оператор T_φ допускает замыкание и представляется в виде суммы счетного числа операторов частичной изометрии. Рассматриваются C^* -алгебры $\mathfrak{A}_\varphi$, $\mathfrak{P}_\varphi$ и $\mathfrak{U}_\varphi$, связанные с заданным отображением и порожденные с помощью этих операторов. Приводятся некоторые свойства алгебр и соотношения между ними.

MSC2010 number: 46L05; 46L35; 47L80

Ключевые слова: C^* -алгебры; частичные изометрии; Теплицевы операторы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Начиная с 70-х годов прошлого века публиковались статьи, посвященные различным обобщениям операторов Тёплица и C^* -алгебр, порожденных этими операторами (алгебра Тёплица). Интерес к этим алгебрам вызван тем, что они имеют широкое применение в различных областях математики, в частности K -теории и некоммутативной геометрии ([1]– [7]). Не менее широкое применение алгебра Тёплица нашла и в физике, особенно в квантовой оптике ([8], [9]).

Напомним классическое определение оператора Тёплица. Пусть H – гильбертово пространство. Оператор $T : H \rightarrow H$ называется оператором одностороннего сдвига, или оператором Тёплица, если найдется ортонормированный базис $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ в H , такой, что $Th_n = h_{n+1}$. Каждый оператор сдвига является изометрическим, т.е. $\|Th\| = \|h\|$ для любого $h \in H$ ($\|\cdot\|$ – норма в H). Согласно теореме Уолда-фон Неймана, каждый изометрический оператор есть прямая сумма унитарного оператора и копий оператора сдвига. C^* -подалгебра алгебры всех ограниченных операторов $B(H)$, порожденная оператором Тёплица, называется алгеброй Тёплица. Основные свойства этой алгебры можно найти в [15], стр.132.

В работах [10]– [13] был предложен подход, обобщающий понятие оператора Тёплица и исследован ряд свойств соответствующей алгебры. Каждое отображение $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ множества целых чисел в себя порождает отображение

$T_\varphi : \{h_n\} \longrightarrow \{h_n\}$ ортонормированного базиса $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ гильбертова пространства $H = l^2(\mathbb{Z})$ в себя: $T_\varphi h_n = h_{\varphi(n)}$. Возникает естественная задача: описать все отображения $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, при которых оператор T_φ можно продолжить на все H и исследовать C^* -алгебру, порожденную этим оператором. В частности, когда задано отображение $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $\varphi(n) = n + 1$, то оператор T_φ является оператором Тёплица. Алгебра Тёплица возникает и в ряде других случаев ([11], [12]). Оказалось, что оператор $T_\varphi : \{h_n\} \longrightarrow \{h_n\}$ можно расширить до ограниченного линейного оператора на H тогда и только тогда, когда $\gamma(\varphi) = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \text{card} E_n < \infty$, где $E_n = \{m \in \mathbb{Z} : \varphi(m) = n\}$, если $n \in \varphi(\mathbb{Z})$, и $E_n = \emptyset$ для $n \notin \varphi(\mathbb{Z})$.

Данная работа посвящена исследованию оператора T_φ в случае, когда $\gamma(\varphi) = \infty$, хотя $\text{card} E_n < \infty$, $n \in \mathbb{Z}$. Доказывается, что в этом случае оператор T_φ расширяется до замкнутого оператора, исследуются его свойства и свойства C^* -алгебр, связанных с данным отображением.

2. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть задано отображение $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$. Чтобы избежать путаницы в обозначениях, элементы множества целых чисел будем обозначать латинскими буквами x, y, z . Пусть $l^2(\mathbb{Z}) = \{f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{x \in \mathbb{Z}} |f(x)|^2 < \infty\}$ – гильбертово пространство функций со скалярным произведением $(f, g) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} f(x) \overline{g(x)}$. Семейство функций $\{e_x\}_{x \in \mathbb{Z}}$ на $\mathbb{Z}$, таких, что

$$e_x(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y, \\ 0, & \text{если } x \neq y, \end{cases}$$

образует ортонормированный базис в $l^2(\mathbb{Z})$. Отображение φ индуцирует отображение $T_\varphi : \{e_x\} \rightarrow \{e_x\}$ по правилу $T_\varphi e_x = e_{\varphi(x)}$.

Пусть $E_y = \{x \in \mathbb{Z} : \varphi(x) = y\}$ – полный прообраз элемента $y \in \mathbb{Z}$, и пусть $\gamma(y) = \text{card} E_y$. Если $E_y = \emptyset$, то мы предполагаем, что $\text{card} E_y = 0$. Элементы множества $\mathbb{Z}$, для которых $\gamma(y) = 0$, назовем *начальными*. Множество $\mathbb{Z}$ представляется в виде дизъюнктного объединения $\mathbb{Z}_k$, где $\mathbb{Z}_k = \{y \in \mathbb{Z}, \text{card} E_y = k\}$.

Приведем основные свойства оператора T_φ и сопряженного к нему.

Теорема 1. Пусть $\gamma(y) < \infty$ для любого $y \in \varphi(\mathbb{Z})$. Тогда отображение $T_\varphi : \{e_x\} \rightarrow \{e_x\}$ расширяется до замкнутого линейного оператора.

Доказательство. Пусть $P(\mathbb{Z})$ – пространство всех конечных линейных комбинаций функций из $\{e_x\}_{x \in \mathbb{Z}}$. Поскольку $\{e_x\}$ есть ортонормированный базис в $l^2(\mathbb{Z})$,

то это пространство плотно в $l^2(\mathbb{Z})$. Отображение T_φ продолжим до линейного оператора на $P(\mathbb{Z})$, полагая

$$T_\varphi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_{x_i}\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_{\varphi(x_i)}.$$

Таким образом получим линейный оператор (обозначим его также T_φ) с плотной областью определения $P(\mathbb{Z})$. Покажем, что он расширяется до замкнутого оператора на $l^2(\mathbb{Z})$. Для этого достаточно показать, что область определения сопряженного к нему оператора T_φ^* плотна в $l^2(\mathbb{Z})$ ([14], 278). Покажем, что для любого f из $P(\mathbb{Z})$ линейный функционал $F(g) = (g, T_\varphi^* f)$ продолжается до ограниченного линейного функционала на $l^2(\mathbb{Z})$. Действительно, пусть $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_{y_i}$,

и $g = \sum_{j=1}^m \beta_j e_{x_j}$ — такая функция из $P(\mathbb{Z})$, что каждый индекс x_j в представлении функции g принадлежит множеству $\bigcup_{i=1}^n E_{y_i}$. Тогда очевидно, что $m < \sum_{i=1}^n \text{card} E_{y_i}$. Поэтому

$$\begin{aligned} |(T_\varphi g, f)| &= \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \bar{\alpha}_i \beta_j (T_\varphi e_{x_j}, e_{y_i}) \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |\alpha_i \beta_j| |(e_{\varphi(x_j)}, e_{y_i})| \leq \\ &\leq c \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |\beta_j| |(e_{\varphi(x_j)}, e_{y_i})|, \end{aligned}$$

где $c = \max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i|$. Теперь, воспользовавшись тем, что в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, получим

$$\sum_{j=1}^m |\beta_j| |(e_{\varphi(x_j)}, e_{y_i})| \leq \sum_{j=1}^m |\beta_j| \leq c(y_1, y_2, \dots, y_n) \left(\sum_{j=1}^m |\beta_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = c(y_1, y_2, \dots, y_n) \|g\|_2.$$

Здесь $c(y_1, y_2, \dots, y_n)$ зависит от $\sum_{i=1}^n \text{card} E_{y_i} < \infty$. Следовательно, в случае, когда

$$g = \sum_{j=1}^m \beta_j e_{x_j}, \text{ и все } x_j \in \bigcup_{i=1}^n E_{y_i}, \text{ выполнено неравенство } |(T_\varphi g, f)| \leq M \|g\|_2,$$

где число M не зависит от выбора g из $l^2(\bigcup_{i=1}^n E_{y_i})$. Пусть теперь $g = \sum_{i=1}^l \gamma_i e_{x_i}$. Представим эту функцию в виде суммы двух функций $g = g_1 + g_2$, где g_1 и g_2 взаимно ортогональны, и g_2 есть сумма всех тех $\gamma_i e_{x_i}$, у которых x_i принадлежит объединению $\bigcup E_{y_i}$. Тогда $(T_\varphi g_1, f) = 0$. Поэтому

$$|(T_\varphi g, f)| = |(T_\varphi g_2, f)| \leq M \|g\|_2 \leq M \|g\|.$$

Следовательно, функционал

$$F(g) = (g, T_\varphi^* f) = (T_\varphi g, f)$$

ограничен на всюду плотном множестве $P(\mathbb{Z})$ и его норма не превышает M . Таким образом, сопряженный оператор T_φ^* имеет всюду плотную область определения. Следовательно, оператор T_φ допускает замыкание. $\square$

Теперь, показав, что T_φ допускает замыкание (а T_φ^* является замкнутым как сопряженный к оператору с плотной областью определения), приведем ряд достаточно очевидных свойств этих операторов. Для любого $y \in \varphi(\mathbb{Z})$ определим функцию с единичной нормой

$$g_y = \frac{1}{\sqrt{\gamma(y)}} \sum_{x \in E_y} e_x.$$

Эти функции попарно ортогональны, поскольку из $y_1 \neq y_2$ следует, что

$$E_{y_1} \cap E_{y_2} = \emptyset.$$

Легко проверить, что $T_\varphi g_y = \sqrt{\gamma(y)} e_y$.

Лемма 1. *Оператор T_φ^* удовлетворяет следующим равенствам:*

- 1) $T_\varphi^* e_y = \sum_{x \in E_y} e_x = \sqrt{\gamma(y)} g_y$,
- 2) $T_\varphi T_\varphi^* e_y = \gamma(y) e_y$,
- 3) $T_\varphi^* T_\varphi g_y = \gamma(y) g_y$,
- 4) $T_\varphi^* T_\varphi e_y = \sum_{x \in E_{\varphi(y)}} e_x = \sqrt{\gamma(\varphi(y))} g_{\varphi(y)}$.

Доказательство. 1) Скалярное произведение $(T_\varphi^* e_y, e_x) = (e_y, e_{\varphi(x)})$ равно 1, если $\varphi(x) = y$, то есть $x \in E_y$, и равно 0 в противном случае. Этим свойством обладает и вектор $\sqrt{\gamma(y)} g_y$, который является суммой элементов множества E_y , так как $(e_{x_1} + e_{x_2} + \dots + e_{x_n}, e_x) = 1$, если $e_{x_i} \in E_y$, и 0 для любого $e_{x_i} \notin E_y$. Поэтому имеем $T_\varphi^* e_y = \sum_{x \in E_y} e_x$, если $\gamma(y) \neq 0$. Если же $\gamma(y) = 0$, то есть $E_y = \emptyset$, то $T_\varphi^* e_y = 0$.

2), 3), 4) проверяются непосредственной подстановкой. $\square$

Теперь рассмотрим операторы $T_\varphi T_\varphi^*$ и $T_\varphi^* T_\varphi$ более подробно. Очевидно, что на области $P(\mathbb{Z})$ они являются симметричными, поскольку выполняются равенства

$$(T_\varphi T_\varphi^* f_1, f_2) = (f_1, T_\varphi T_\varphi^* f_2) \quad \text{и} \quad (T_\varphi^* T_\varphi f_1, f_2) = (f_1, T_\varphi^* T_\varphi f_2)$$

для любых функций f_1 и f_2 из $P(\mathbb{Z})$.

Теорема 2. *Операторы $T_\varphi T_\varphi^*$ и $T_\varphi^* T_\varphi$, заданные на $P(\mathbb{Z})$, являются в существенном самосопряженными и представляются в виде:*

$$T_\varphi T_\varphi^* = \sum_{k \in \sigma(T_\varphi T_\varphi^*)} k P_k, \quad T_\varphi^* T_\varphi = \sum_{k \in \sigma(T_\varphi^* T_\varphi)} k Q_k,$$

где P_k и Q_k – взаимноортогональные проекторы.

Доказательство. Рассмотрим оператор $T_\varphi T_\varphi^*$. Поскольку он является симметричным оператором, он обладает замкнутым расширением. Пусть $A = \overline{T_\varphi T_\varphi^*}$ – замыкание оператора $T_\varphi T_\varphi^*$ и $D(A)$ – его область определения, и A^* – оператор, сопряженный к A с областью определения $D(A^*)$. Чтобы показать, что $D(A) = D(A^*)$, т.е. оператор A является самосопряженным, достаточно показать, что $\ker(A^* \mp i) = 0$ ([14], 283). Пусть существует $f \in \ker(A^* \mp i)$ и $f \neq 0$. Рассмотрим $((A^* \mp i)f, e_x) = (f, (A \pm i)e_x)$. Но для любого e_x $(A \pm i)e_x = (n \pm i)e_x$, где $n = \text{card} E_{\varphi(x)}$ – целое число (лемма 1). Таким образом, $(f, (n \pm i)e_x) = (f, e_x) = 0$ для любого e_x из $l^2(\mathbb{Z})$, что означает, что $f = 0$. Таким образом, оператор $(A^* \mp i)$ имеет нулевое ядро. $\square$

Аналогичное утверждение можно доказать и для оператора $T_\varphi^* T_\varphi$. Для этого нужно рассмотреть скалярное произведение $((B^* \mp i)f, g_y) = 0$, где B^* – замыкание $T_\varphi^* T_\varphi$, а f принадлежит ядру оператора $B^* \mp i$. Таким образом, операторы $T_\varphi T_\varphi^*$ и $T_\varphi^* T_\varphi$ являются в существенном самосопряженными.

Из леммы 1 видно, что точечный спектр операторов $T_\varphi T_\varphi^*$ и $T_\varphi^* T_\varphi$ содержится в $\mathbb{Z}_+$. Гильбертово пространство $l^2(\mathbb{Z})$ можно представить в виде прямой суммы попарно ортогональных гильбертовых пространств $l^2(\mathbb{Z}_k)$, где $l^2(\mathbb{Z}_k)$ – это множество всех функций из $l^2(\mathbb{Z})$, являющихся собственными векторами для оператора $T_\varphi T_\varphi^*$ и имеющих собственное значение k , базис в нем образуют те e_y , для которых $\gamma(y) = k$. Таким образом,

$$l^2(\mathbb{Z}) = \bigoplus_{k \in \sigma(T_\varphi T_\varphi^*)} l^2(\mathbb{Z}_k).$$

В дальнейшем для удобства будем записывать

$$l^2(\mathbb{Z}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} l^2(\mathbb{Z}_k),$$

полагая $l^2(\mathbb{Z}_k) = \{0\}$ если $k \notin \sigma(T_\varphi T_\varphi^*)$.

Аналогично, с помощью $T_\varphi^* T_\varphi$ пространство $l^2(\mathbb{Z})$ разбивается на инвариантные подпространства l_k^2 , состоящие из собственных векторов оператора $T_\varphi^* T_\varphi$ с собственным значением k , $k \geq 1$. Очевидно, что семейство g_y , для которых $\gamma(y) = k$, образует ортонормированный базис в l_k^2 . Определив l_0^2 как ортогональное дополнение ко всем l_k^2 , можно разбить $l^2(\mathbb{Z})$ на прямую сумму подпространств

$$l^2(\mathbb{Z}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} l_k^2.$$

Таким образом, P_k и Q_k являются проекторами на $l^2(\mathbb{Z}_k)$ и l_k^2 соответственно.

В дальнейшем, говоря о неограниченных операторах $T_\varphi, T_\varphi^*, T_\varphi T_\varphi^*, T_\varphi^* T_\varphi$, и т.д., будем подразумевать их замыкания и, в силу самосопряженности в существенном операторов $T_\varphi T_\varphi^*, T_\varphi^* T_\varphi$, не рассматривать детально их области определения.

3. C^* -АЛГЕБРЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЕМ

В этом параграфе мы определим C^* -алгебры, связанные с заданным отображением, и укажем их свойства. Сначала рассмотрим структуру оператора T_φ .

Лемма 2. $T_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} U_k$, где U_k – операторы частичной изометрии, и $U_k^* U_l = 0$, если $k \neq l$.

Доказательство. Определим оператор частичной изометрии U на $l^2(\mathbb{Z})$, полагая на базисных элементах

$$Ue_y = \begin{cases} 0, & \text{если } \gamma(y) = 0, \\ g_y, & \text{если } \gamma(y) \neq 0, \end{cases}$$

и продолжая по линейности на $l^2(\mathbb{Z})$. Нетрудно убедиться, что сопряженный к нему оператор будет действовать следующим образом:

$$\begin{cases} U^* g_y = e_y & \text{если } \gamma(y) \geq 1, \\ U^* f = 0 & \text{если } f \in l_0^2. \end{cases}$$

Применив оператор UU^* к векторам g_y , которые являются базисными в l_k^2 при $k \neq 0$, увидим, что он является проектором на подпространство $\bigoplus_{k=1}^{\infty} l_k^2$. Оператор

U^*U является проектором на подпространство $\bigoplus_{k=1}^{\infty} l^2(\mathbb{Z}_k)$ (достаточно рассмотреть его действие на векторах e_x). Полагая $U^*U = P$ и $UU^* = Q$, получим

$$P_1 + P_2 + \dots + P_m + \dots = P, \quad Q_1 + Q_2 + \dots + Q_m + \dots = Q.$$

Тогда $U_k = U^* Q_k$, $U_k^* U_k = Q_k U U^* Q_k = Q_k$, поскольку Q_k есть проектор на l_k^2 , а $U U^*$ проектор на $\bigoplus_{k=1}^{\infty} l_k^2$. Соответственно, оператор

$$U_k U_k^* = (U_k U_k^*)^* = U^* Q_k U = (U^* Q_k U)^2 = P_k,$$

что следует из леммы 1.

Рассмотрим оператор $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} U_k$. Можно показать, что операторы T_φ и $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} U_k$ совпадают на $P(\mathbb{Z})$, следовательно, $T_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} U_k$. $\square$

Пусть $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ – C^* -алгебра, порожденная оператором частичной изометрии U_1 ; $\mathfrak{A}_{\varphi_2}$ – C^* -алгебра, порожденная операторами U_1, U_2 ; $\mathfrak{A}_{\varphi_k}$ – C^* -алгебра, порожденная набором операторов $\{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ соответственно. Под C^* -алгеброй,

порожденной отображением, будем понимать индуктивный предел алгебр $\mathfrak{A}_{\varphi_k}$, $\mathfrak{A}_{\varphi} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathfrak{A}_{\varphi_k}$.

Помимо $\mathfrak{A}_{\varphi}$ можно определить и другие C^* -алгебры, связанные с заданным отображением. Пусть $\mathfrak{P}_{\varphi}$ – C^* -алгебра, порожденная набором операторов $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ и проекторами P и Q , а $\mathfrak{U}_{\varphi}$ – C^* -алгебра, порожденная набором операторов $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ и оператором U .

Если мощность прообраза ограничена в совокупности (т.е. $\gamma(\varphi) = m < \infty$), то все эти алгебры, очевидно, совпадают. В нашем случае $\mathfrak{A}_{\varphi} \subset \mathfrak{P}_{\varphi} \subset \mathfrak{U}_{\varphi}$. Стоит указать на еще одно отличие. Если $\gamma(\varphi) = m < \infty$, то алгебра $\mathfrak{A}_{\varphi}$ является унитарной (см. ниже). Если же $\gamma(\varphi) = \infty$, то не только $\mathfrak{A}_{\varphi}$, но и $\mathfrak{P}_{\varphi}$ и $\mathfrak{U}_{\varphi}$ могут быть, вообще говоря, не унитарными. Однако каждая подалгебра $\mathfrak{A}_{\varphi_k}$ алгебры $\mathfrak{A}_{\varphi}$ обладает единицей. Для доказательства этого утверждения сформулируем простую лемму.

Лемма 3. Пусть A – такой самосопряженный оператор на конечномерном пространстве, что для любого элемента x из этого пространства $Ax \neq 0$. Тогда оператор A обратим.

Доказательство. Каждый самосопряженный оператор в некотором базисе приводится к диагональному виду. Если A нигде не обращается в 0, то все его собственные значения отличны от 0. Следовательно, оператор A обратим. $\square$

Теорема 3. Для любого $k \in \mathbb{N}$ подалгебра $\mathfrak{A}_{\varphi_k}$ унитарна.

Доказательство. Гильбертово пространство $l^2(\mathbb{Z})$ можно представить в виде прямой суммы, $l^2(\mathbb{Z}) = \bigoplus_{y \in \mathbb{Z}} l^2(E_y)$, причем все $l^2(E_y)$ конечномерные подпространства размерности $\gamma(y)$. Рассмотрим операторы

$$P_1 + P_2 + \dots + P_k = \widetilde{P}_k \in \mathfrak{A}_{\varphi_k} \quad \text{и} \quad Q_1 + Q_2 + \dots + Q_k = \widetilde{Q}_k \in \mathfrak{A}_{\varphi_k}.$$

Очевидно, что оператор $\widetilde{P}_k + \widetilde{Q}_k$ является положительным. Мы хотим показать, что в алгебре $\mathfrak{A}_{\varphi_k}$ этот оператор обратим. Элементы алгебры $\mathfrak{A}_{\varphi_k}$ нетривиально действуют на подпространстве

$$\left(\bigoplus_{y \in \mathbb{Z}, \gamma(y) \leq k} l^2(E_y) \right) \oplus \left(\bigoplus_{y \in \mathbb{Z}, \gamma(y) > k} l^2(E_y \cap (\bigcup_{1 \leq p \leq k} \mathbb{Z}_p)) \right).$$

На каждом подпространстве

$$l^2(E_y \cap (\bigcup_{1 \leq p \leq k} \mathbb{Z}_p)), \quad \gamma(y) > k$$

оператор $\widetilde{Q}_k$ равен 0, а оператор $\widetilde{P}_k$ действует как тождественный.

Рассмотрим действие $\widetilde{P}_k + \widetilde{Q}_k$ на $\bigoplus_{y \in \mathbb{Z}, \gamma(y) \leq k} l^2(E_y)$. Каждое $l^2(E_y)$ является для него инвариантным. В общем случае любое из этих подпространств можно представить в виде $l^2(E_y) = H_{1y} \oplus H_{2y}$, где H_{1y} – те элементы $l^2(E_y)$, на которых $\widetilde{P}_k$ и $\widetilde{Q}_k$ равны 0, т.е. элементы, принадлежащие одновременно и $l^2(\mathbb{Z}_0)$ и l^2_0 , а на пространстве H_{2y} оператор $\widetilde{P}_k + \widetilde{Q}_k$ нигде не обращается в 0. Но $H_{1y} \subset \ker T_\varphi \cap \ker T_\varphi^*$, поэтому пространство H_{1y} можно не рассматривать.

Обозначим сужение оператора $\widetilde{P}_k + \widetilde{Q}_k$ на H_{2y} через A_y . Рассмотрим произвольный элемент e_y , $\gamma(y) = l \leq k$, и действие $\widetilde{P}_k + \widetilde{Q}_k$ на $l^2(E_y)$. Пусть на первых m элементах из E_y оператор $\widetilde{P}_k$ равен 0, т.е. эти элементы либо начальные, либо принадлежат $\bigoplus_{i=k+1}^{\infty} l^2(\mathbb{Z}_i)$, $0 \leq m \leq l$. Тогда базисными в H_{2y} будут элементы $\{f, e_{m+1}, e_{m+2}, \dots, e_l\}$, где $f = \frac{e_1 + e_2 + \dots + e_m}{\sqrt{m}}$, элементы же вида, к примеру, $e_1 - e_2$, принадлежат H_{1y} . Запишем действие A_y на базисных элементах (лемма 1, теорема 2):

$$\begin{aligned} A_y f &= \frac{\sqrt{m}}{l}(\sqrt{m}f + e_{m+1} + e_{m+2} + \dots + e_l); \\ A_y e_i &= e_i + \frac{1}{l}(\sqrt{m}f + e_{m+1} + e_{m+2} + \dots + e_l) = \frac{1}{l}(\sqrt{m}f + e_{m+1} + e_{m+2} + \dots + (l+1)e_i + \dots + e_l). \end{aligned}$$

Таким образом, оператор A_y описывается матрицей размерности $l - m + 1 \times l - m + 1$, $l \leq k$, $0 \leq m \leq l$, с указанными выше матричными коэффициентами. Причем, поскольку k – фиксированное число, количество таких матриц, отличных друг от друга, ограничено. Отсюда следует, что оператор $\widetilde{P}_k + \widetilde{Q}_k$ можно представить в следующем виде:

$$\widetilde{P}_k + \widetilde{Q}_k = \bigoplus_{i=1}^d \left(\bigoplus_{y, \gamma(y) \leq k} A_{yi} \right),$$

где операторы A_{yi} действуют каждый на своем подпространстве $l^2(E_y)$ и имеют одинаковое матричное представление. Оператору $\widetilde{P}_k + \widetilde{Q}_k$ сопоставим конечномерный оператор $\bigoplus_{i=1}^d A_i$, где каждый A_i удовлетворяет условию леммы 3. Этот оператор обратим, значит, обратим и оператор $\widetilde{P}_k + \widetilde{Q}_k$ в алгебре $\mathfrak{A}_{\varphi_k}$. $\square$

Обозначим через I_k единицу алгебры $\mathfrak{A}_{\varphi_k}$. В общем случае последовательность $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ является аппроксимативной единицей алгебры $\mathfrak{A}_{\varphi}$.

Теорема 4. *Следующие условия эквивалентны:*

- 1) $\mathfrak{A}_{\varphi}$ – унитарная алгебра;
- 2) существует такой номер n , что для любого $y \in \mathbb{Z}$ сужение оператора $\widetilde{P}_n + \widetilde{Q}_n$ на $l^2(E_y)$ обратим.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Из унитарности $\mathfrak{A}_\varphi$ следует, что последовательность $\{I_k\}_{k=1}^\infty$ сходится к единице I . Это значит, что существует такой номер n , что единица алгебры $\mathfrak{A}_{\varphi_n}$ совпадает с I (поскольку $\{I_k\}_{k=1}^\infty$ – возрастающая последовательность проекторов, и если она сходится, то имеет вид $\{I_1, I_2, \dots, I_{n-1}, I, I, \dots\}$). Следовательно, сужение оператора $\widetilde{P}_n + \widetilde{Q}_n$ обратим на каждом $l^2(E_y)$, $y \in \mathbb{Z}$.

2) $\Rightarrow$ 1) Если существует такой номер n , что сужение $\widetilde{P}_n + \widetilde{Q}_n$ обратим на каждом $l^2(E_y)$, значит, он обратим на $l^2(\mathbb{Z}) \setminus \ker T_\varphi \cap \ker T_\varphi^*$. (Согласно теореме 3, оператор $\widetilde{P}_n + \widetilde{Q}_n$ обратим на $\bigoplus_{y, \gamma(y) \leq n} (l^2(E_y))$. Но на каждом $l^2(E_y)$, $\gamma(y) > n$, оператор $\widetilde{Q}_n$ будет равен 0. Значит, чтобы $\widetilde{P}_n + \widetilde{Q}_n$ был обратим, $\widetilde{P}_n$ должен действовать как тождественный оператор на каждом элементе из $l^2(E_y)$.) Таким образом, $\mathfrak{A}_\varphi$ – унитарная алгебра. $\square$

Следствие 1. Пусть φ – такое отображение, что, начиная с некоторого n , для любого y , с $\gamma(y) > n$,

$$l^2(E_y) \subset \bigoplus_{k=1}^n l^2(\mathbb{Z}_k).$$

Тогда алгебра $\mathfrak{A}_\varphi$ унитарна.

Теперь перейдем к алгебре $\mathfrak{P}_\varphi$. Если для отображения φ нет начальных элементов, то $\mathfrak{P}_\varphi$ унитарна, поскольку содержит $P = I$. Поэтому считаем, что множество $\mathbb{Z}_0 \neq \emptyset$. Опять рассмотрим оператор $P + Q$. Это самосопряженный оператор и каждое $l^2(E_y)$ является для него инвариантным подпространством. Возьмем произвольное множество E_y , $\gamma(y) = n$. Возможны два крайних случая: либо все элементы E_y являются начальными; либо оно не содержит ни одного начального элемента. В первом случае имеем $(P + Q)g_y = g_y$, все остальные элементы принадлежат $l_0^2 \cap l^2(\mathbb{Z}_0)$ (см. теорему 3). Во втором случае $(P + Q)g_y = 2g_y$.

Пусть теперь первые k элементов E_y – начальные. Тогда сужение оператора $P + Q$ на подпространство, натянутое на вектора $\{f, e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n\}$, $f = \frac{e_1 + e_2 + \dots + e_k}{\sqrt{k}}$, описывается матрицей размерности $n - k + 1 \times n - k + 1$ (см. теорему 3). Перейдем к новому ортонормированному базису $\{f_1, f_2, \dots, f_{n-k+1}\}$, где

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{e_{k+1} - e_{k+2}}{\sqrt{2}}; \\ f_2 &= \frac{e_{k+1} + e_{k+2} - e_{k+3}}{\sqrt{6}}; \\ f_{n-k-1} &= \frac{e_{k+1} + e_{k+2} + \dots + e_{n-1} - (n-k-1)e_n}{\sqrt{n-k-1 + (n-k-1)^2}}; \\ f_{n-k} &= \frac{e_{k+1} + e_{k+2} + \dots + e_n - \frac{(n-k)}{k}\sqrt{k}f}{\sqrt{n-k + \frac{(n-k)^2}{k}}}; \end{aligned}$$

$$f_{n-k+1} = \frac{e_{k+1} + e_{k+2} + \dots + e_n + \sqrt{k}f}{\sqrt{n}}.$$

Нетрудно проверить, что в этом базисе матрица оператора $P + Q$ имеет вид:

$$P + Q \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{k}{n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n} \end{pmatrix}.$$

Теперь можно сформулировать критерий унитарности $\mathfrak{p}_\varphi$.

Теорема 5. *Если φ – сюръекция, то алгебра $\mathfrak{p}_\varphi$ унитарна. Если φ не является сюръекцией, то для того, чтобы алгебра $\mathfrak{p}_\varphi$ была унитарна, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\sup_{y, l^2(E_y) \cap l^2(\mathbb{Z}_0) \neq \emptyset} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \frac{k(y)}{n(y)}} < 1.$$

Доказательство. Первое утверждение очевидно, поэтому докажем второе. Используя матричное представление оператора $P + Q$ в базисе $\{f_1, \dots, f_{n-k+1}\}$, легко получить его собственные значения, это 1 и $1 \pm \sqrt{1 - \frac{k}{n}}$. Обобщая рассуждения, приведенные выше, можно утверждать, что спектр оператора $P + Q$ – это множество чисел $\{1, 2, 1 \pm \sqrt{1 - \frac{k}{n}}\}_{n, k \in \mathbb{N}}$. Допустим, что выполнено условие теоремы 4. Тогда спектр оператора $P + Q$ ограничен снизу, следовательно, он обратим. Пусть теперь

$$\sup_{y, l^2(E_y) \cap l^2(\mathbb{Z}_0) \neq \emptyset} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \frac{k(y)}{n(Y)}} = 1.$$

Для простоты рассуждений допустим, что для любого n найдется такой e_{y_n} , $\gamma(y) = n$, что множество E_{y_n} содержит ровно один начальный элемент. Для удобства обозначим его $e_1(n)$. Предположим, что $\mathfrak{p}_\varphi$ унитарна. Множество C^* -алгебр $\mathfrak{p}_{\varphi_k} = \langle \mathfrak{A}_{\varphi_k} P, \mathfrak{A}_{\varphi_k} Q, \mathfrak{A}_{\varphi_k} \rangle + \langle P, Q \rangle$ плотно в $\mathfrak{p}_\varphi$. Значит, единицу можно приблизить полиномами из $\mathfrak{p}_{\varphi_k}$, т.е. для любого $\epsilon > 0$ должно найтись $k \in \mathbb{N}$ и полином $A_k \in \mathfrak{p}_{\varphi_k}$, что $\|I - A_k\| < \epsilon$. Полином A_k может состоять из слагаемых вида $A_1 A'$, $A_2 P$, $A_3 Q$, где A_i – конечное произведение операторов из $\mathfrak{p}_{\varphi_k}$, а A' – элемент алгебры $\mathfrak{A}_{\varphi_k}$. Выберем элемент $e_1(n)$, причем возьмем $n \gg k$, и рассмотрим на нем действие каждого слагаемого по отдельности.

Любой элемент A' из $\mathfrak{A}_{\varphi_k}$ можно представить в виде $A' I_k$, где I_k – единица алгебры $\mathfrak{A}_{\varphi_k}$. Но в алгебре $\mathfrak{A}_\varphi$ I_k – проектор (условие теоремы 4 не выполняется), и $I_k e_1(n) = 0$. Значит, $A_1 A' e_1(n) = 0$. Очевидно, что и $A_2 P e_1(n) = 0$, так как $e_1(n)$

– начальный элемент. Осталось рассмотреть слагаемые вида A_3Q . Допустим, $A_3Qe_1(n) \neq 0$. Имеем

$$Qe_1(n) = \frac{1}{n}(e_1(n) + e_2 + \dots + e_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}g_{y_n}, \quad \text{и} \quad \|Qe_1(n)\| = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Но A_3 – конечное произведение ограниченных операторов, поэтому при $n \rightarrow \infty$ $\|A_3Qe_1(n)\| \rightarrow 0$. Таким образом, с одной стороны имеем $A_3Qe_1(n) = f$, причем $\|f\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. С другой стороны, $Ie_1(n) = e_1(n)$, $\|e_1(n)\| = 1$. Пришли к противоречию. Значит, алгебра $\mathfrak{P}_\varphi$ не может содержать единицу. Теорема доказана. $\square$

Теорема 6. Пусть для любого $k \in \mathbb{N}$ проектор P_k конечного ранга. Тогда:

- 1) алгебра $\mathfrak{A}_\varphi$ является AF -алгеброй;
- 2) алгебра $\mathfrak{A}_\varphi$ – идеал для алгебры $\mathfrak{P}_\varphi$;
- 3) алгебра $\mathfrak{A}_\varphi$ – идеал для алгебры $\mathfrak{U}_\varphi$.

Доказательство. Поскольку P_k – проектор на подпространство $l^2(\mathbb{Z}_k)$, то оно является конечномерным. Значит, и оператор U_k тоже конечного ранга, так как имеет конечномерный образ, $U_k(l^2(\mathbb{Z})) = l^2(\mathbb{Z}_k)$. Соответственно, и U_k^* тоже конечного ранга. Каждая $\mathfrak{A}_{\varphi_k}$ есть конечномерная алгебра, таким образом алгебра $\mathfrak{A}_\varphi$ есть AF -алгебра, как замыкание объединения вложенных друг в друга конечномерных алгебр.

Для доказательства утверждений 2) и 3) достаточно рассмотреть элементы U_kP , PU_k , U_kU , UU_k . Равенство $PU_k = U_k$ выполняется в силу определения проектора P , а $U_kP \in \mathfrak{A}_{\varphi_n} \subset \mathfrak{A}_\varphi$ как оператор конечного ранга, $n \geq k$. Отсюда же и операторы U_kU и UU_k принадлежат $\mathfrak{A}_\varphi$. $\square$

Следствие 2. Если выполнено условие теоремы 5 и отображение φ сюръективно, то:

- 1) алгебра $\mathfrak{P}_\varphi/\mathfrak{A}_\varphi$ двумерна;
- 2) алгебра $\mathfrak{U}_\varphi/\mathfrak{A}_\varphi$ изоморфна алгебре Тёплица.

Доказательство. Если φ – сюръекция, то для него на $\mathbb{Z}$ нет начальных элементов. Тогда в этом случае $P = I$, и алгебра $\mathfrak{P}_\varphi/\mathfrak{A}_\varphi$ порождается двумя взаимно ортогональными проекторами Q и $I - Q$. Оператор U в этом случае является изометрией, поскольку удовлетворяет соотношениям: $U^*U = I$; $UU^* = Q$. Следовательно, по теореме Кобурна, алгебра $\mathfrak{U}_\varphi/\mathfrak{A}_\varphi$ изоморфна алгебре Тёплица. $\square$

Abstract. The paper investigates the properties of an operator T_φ on Hilbert space $l^2(\mathbb{Z})$ induced by the mapping φ of set $\mathbb{Z}$ into itself. It is shown if the mapping φ is such that every preimage has finite, but not equipotentially bounded cardinality,

then the operator T_φ allows a closure and can be represented as a countable sum of partial isometries. The C^* -algebras $\mathfrak{A}_\varphi$, $\mathfrak{P}_\varphi$ and $\mathfrak{U}_\varphi$ associated with given mapping and generated by the mentioned partial isometries are considered. Some properties of these algebras and some relations between them are given.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. A. Coburn, "The C^* -algebras generated by an isometry", I. Bull. Am. Math. Soc., **73**, 722 – 726 (1967); II Trans. Am. Math. Soc., **137**, 211 – 217 (1969).
- [2] R. G. Douglas, "On the C^* -algebra of a one-parameter semigroup of isometries", Acfa. Math., **128**, 143 – 152 (1972).
- [3] G. J. Murphy, "Ordered groups and Toeplitz algebras", J. Oper. Theory, **18**, 303 – 326 (1987).
- [4] J. Xia, "The K-theory and the invertibility of almost periodic Toeplitz operators", Integral Equations Oper. Theory, **11**, 267 – 286 (1988).
- [5] R. Ji, "On the smoothed Toeplitz extensions and K-theory", Proc. Amer. Math. Soc., **109**, 31 – 38 (1990).
- [6] H. M. Carmen, J. P. Pedro, "Properties of generalized Toeplitz operators", Integral Equations Oper. Theory, **40**, 106 – 126 (2001).
- [7] I. Cho, P. Jorgensen, " C^* -algebras generated by partial isometries", J. Appl. Math. Comput., **26**, 1 – 48 (2008).
- [8] А. В. Лебедев, А. Одзиевич, "Расширения C^* -алгебр частичными изометриями", Мат. Сборник, **195** (7), 37 – 70 (2004).
- [9] M. Horowski, A. Odziejewicz, A. Tereszkiewicz, "Some integrable systems in nonlinear quantum optics", arXiv:math-ph/0207031 (2002).
- [10] С. А. Григорян, А. Ю. Кузнецова, " C^* -алгебры, порожденные отображениями", материалы школы-семинара "Волга-2006", **28** (2006).
- [11] S. Grigoryan, A. Kuznetsova, " C^* -algebras generated by mappings", Lobachevskii Journal of Mathematics, **29** (1), 5 – 8 (2008).
- [12] А. Ю. Кузнецова, "Примеры C^* -алгебр, порожденных отображениями", Новейшие проблемы теории поля 2005-2006, Казань: издательство Казанского государственного университета, 170 – 175 (2007).
- [13] С. А. Григорян, А. Ю. Кузнецова, "AF-подалгебры C^* -алгебр, порожденных отображениями", Известия ВУЗов. Математика, **3**, 82 – 87 (2010).
- [14] М. Рид, Б. Саймон, "Методы современной математической физики. 1", Функциональный анализ, Мир, Москва (1977).
- [15] Дж. Мёрфи, " C^* -алгебры и теория операторов", перевод с английского под редакцией проф. А. Я. Хелемского, Факториал, Москва (1997).

Поступила 17 апреля 2010