

ПОЛНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МНОЖЕСТВ ТОЧЕК РАСХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ-ХААРА

Г. А. КАРАГУЛЯН

Институт математики НАН Армении

E-mail: *g.karagulyan@yahoo.com*

Аннотация. В работе доказывается следующая теорема: Для того, чтобы $E \subset [0, 1]$ было множеством точек расходимости ряда Фурье-Хаара некоторой функции $f \in L^\infty[0, 1]$ необходимо и достаточно, чтобы E было множеством типа $G_{\delta\sigma}$ меры нуль.

MSC2010 number: 42A20

Ключевые слова: Ряды Фурье-Хаара, множества расходимости, множества $G_{\delta\sigma}$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Для функционального ряда

$$(1.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in [0, 1],$$

множество $E \subset [0, 1]$ называется множеством точек расходимости, если этот ряд расходится при $x \in E$ и сходится когда $x \in [0, 1] \setminus E$. Если же расходимость в точках E неограничена, то скажем, что E является множеством точек неограниченной расходимости ряда (1.1).

Хорошо известна классическая теорема Хана-Серпинского (см. [14], [7]): для того чтобы $E \subset [0, 1]$ было множеством точек расходимости (неограниченной расходимости) некоторого ряда (1.1), с непрерывными членами $f_n(x)$, необходимо и достаточно, чтобы оно имело тип $G_{\delta\sigma}$ (G_δ).

В 1910г. А. Хаар (см. [6] или [10] часть 3.4) доказал, что ряды Фурье-Хаара непрерывных функций сходятся равномерно, и что для произвольных рядов Фурье-Хаара имеет место сходимость почти всюду на интервале $[0, 1]$. Отсюда

ясно, что множества точек расходимости рядов Фурье-Хаара могут иметь только нулевые меры. Класс множеств неограниченной расходимости рядов Фурье-Хаара полностью была охарактеризована в работе М. А. Лунины [12]. Там доказывается, что *во первых множество точек неограниченной расходимости любого ряда Фурье-Хаара является множеством типа $\tilde{G}_\delta$, и наоборот любое множество типа $\tilde{G}_\delta$ может быть множеством точек неограниченной расходимости ряда Фурье-Хаара некоторой функции*. При этом эта функция может иметь сколь угодно медленно растущую функцию распределения. Отметим, что в более ранней работе В. И. Прохоренко [13] было установлено существование функции

$$f(x) \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p$$

ряд Фурье-Хаара которой неограниченно расходится на данном множестве E меры нуль, а в 1992 В. М. Бугадзе [1] доказал, что для любого множества меры нуль существует функция из класса $L^\infty[0, 1]$ ряд Фурье-Хаара которой расходится на этом множестве.

Аналогичные задачи рассмотрены также для тригонометрических рядов Фурье ([15], [16], [8], [3], [4],[20]) а также для рядов Фурье по системе Уолша ([18], [19], [2], [5]). Мы не будем обсуждать результаты этих работ. Отметим лишь работу Целлера [20], где дается полная характеристика множеств точек неограниченной расходимости тригонометрических рядов Фурье, основываясь на знаменитом примере А. Н. Колмогорова [11]. В [20] доказывается, что *для любого множества $E \subset [0, 2\pi]$ типа G_δ существует ряд Фурье, который неограниченно расходится в каждой точке E и сходится в каждой точке его дополнения*. Отметим, что вопрос о характеристизации множеств точек расходимости рядов Фурье остается открытым. Об этой а также о других задачах аналогичного характера обсуждается в обзорной статье П. Л. Ульянова [17].

И наконец отметим, что недавно в работе [9] установлена теорема общего характера из которой следуют некоторые из результатов упомянутых выше работ. В [9] доказывается, что *если последовательность линейных операторов $U_n : L^1 \rightarrow L^\infty$ обладает свойством локализации, то для любого множества E меры нуль существует функция $f \in L^\infty$, для которой $U_n f(x)$ расходится в каждой точке E* . В настоящей работе доказывается следующий результат.

Теорема 1. *Для того чтобы множество $E \subset [0, 1]$ было множеством точек расходимости ряда Фурье-Хаара некоторой функции $f \in L^\infty[0, 1]$, необходимо и достаточно, чтобы оно было $G_{\delta\sigma}$ -множеством меры нуль.*

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Напомним определение системы Хаара $\{\chi_n(x), n = 1, 2, \dots\}$ (см. [10] часть 3.1). Если ω есть некоторый интервал с концами α и β , то обозначим $\bar{\omega} = (\alpha, \beta)$, $\bar{\omega} = [\alpha, \beta]$. Двоичными интервалами назовем интервалы вида

$$\omega_k^i = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Первая функция Хаара определяется $\chi_1(x) \equiv 1$, а при $n \geq 2$ имеем

$$(2.1) \quad \chi_n(x) = \begin{cases} 2^{k/2} & \text{при } x \in \omega_{k+1}^{2i-1}, \\ -2^{k/2} & \text{при } x \in \omega_{k+1}^{2i}, \\ 0 & \text{при } x \notin \bar{\omega}_k^i, \end{cases}$$

если $n = 2^k + i$, $1 \leq i \leq 2^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, а в точках разрыва функция $\chi_n(x)$ определяется равенствами

$$\chi_n(x) = \frac{1}{2}(\chi_n(x+) + \chi_n(x-)), \quad x \in (0, 1), \quad \chi_n(0) = \chi_n(0+), \quad \chi_n(1) = \chi_n(1-).$$

Через $S_n(x, f)$ обозначим n -ую частичную сумму ряда Фурье-Хаара функции $f \in L^1[0, 1]$. Если $\omega = (\alpha, \beta)$ есть некоторый двоичный интервал из $[0, 1]$, то обозначим

$$(2.2) \quad \omega_- = \begin{cases} (2\alpha - \beta, \alpha) & \text{при } \alpha \neq 0, \\ \emptyset & \text{при } \alpha = 0, \end{cases}$$

$$(2.3) \quad \omega_+ = \begin{cases} (\beta, 2\beta - \alpha) & \text{при } \beta \neq 1, \\ \emptyset & \text{при } \beta = 1. \end{cases}$$

Отметим, что если ω_- и ω_+ непустые, то они являются двоичными интервалами смежными для ω и при этом $|\omega_+| = |\omega_-| = |\omega|$. Формулы для частичных сумм $S_n(x, f)$ соответствующие номерам $n = |\omega|^{-1} = 2^k$ можно записывать в виде

$$(2.4) \quad \begin{aligned} S_{|\omega|^{-1}}(x, f) &= \frac{1}{|\omega|} \int_\omega f(t) dt, \quad x \in \omega, \\ S_{|\omega|^{-1}}(\alpha, f) &= \frac{1}{|\omega \cup \omega_-|} \int_{\omega \cup \omega_-} f(t) dt, \\ S_{|\omega|^{-1}}(\beta, f) &= \frac{1}{|\omega \cup \omega_+|} \int_{\omega \cup \omega_+} f(t) dt. \end{aligned}$$

где $\omega = (\alpha, \beta) \subset [0, 1]$ есть двоичный интервал (см. [10], часть 3.1).

Мы будем иметь дело с множествами из метрического пространства $[0, 1]$. Открытыми в нем будут множества, которые представимы в виде $G \cap [0, 1]$, где G — открытое множество в $\mathbb{R}$. Множества, которые можно представить в виде счетного пересечения открытых множеств отрезка $[0, 1]$, называются множествами

типа G_δ . Всевозможные счетные объединения множеств G_δ дает класс множеств типа $G_{\delta\sigma}$. В вышеупомянутой теореме Лунини были рассмотрены множества типа $\tilde{G}_\delta$. Этот класс чуть шире класса множеств типа G_δ . Множества этого класса являются счетными пересечениями множеств, представимых в виде

$$G = \left(\bigcup_k (a_k, b_k) \right) \cup A,$$

где $\{(a_k, b_k)\}$ -конечное или счетное семейство попарно не пересекающихся интервалов, а A составлено из некоторых двоично рациональных точек, содержащихся в множестве $\{a_k, b_k\}$. В Теореме 1 искажение от обычных $G_{\delta\sigma}$ множеств не будет. Причина в том, что счетные пересечения множеств типа $\tilde{G}_\delta$ в точности совпадают с классом множеств типа $G_{\delta\sigma}$, что будет показано при доказательстве Теоремы 1 в параграфе 3.

Для $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ обозначим

$$\overline{D}f(x) = \limsup_{|J| \rightarrow 0: x \in J} \frac{1}{|J|} \int_J f(t) dt, \quad \underline{D}f(x) = \liminf_{|J| \rightarrow 0: x \in J} \frac{1}{|J|} \int_J f(t) dt$$

где J является интервалом в $\mathbb{R}$. Если имеем $\overline{D}f(x) = \underline{D}f(x)$, то эту величину обозначим через $Df(x)$. Если $A \subset [0, 1]$ есть некоторое измеримое множество, то обозначим

$$\lambda(A) = A \cup \left\{ x \in [0, 1] : \overline{D}\mathbb{I}_A(x) = \limsup_{|J| \rightarrow 0: x \in J} \frac{|A \cap J|}{|J|} > 0 \right\},$$

По теореме Лебега, $Df(x)$ существует и равен $f(x)$ почти всюду. Отсюда следует, что для любого измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$ имеет место равенство $|\lambda(A) \setminus A| = 0$. Если I – интервал, то через kI обозначим интервал концентрический с I и имеющий длину $k|I|$.

Лемма 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ и любого измеримого множества $A \subset \Delta = (a, b)$ существует открытое множество G такое, что*

$$A \subset G \subset \Delta,$$

$$(2.5) \quad |G \cap J| \leq |A \cap 4J| + \varepsilon |J|^2$$

для любого интервала J , с $J \not\subset \Delta$.

Доказательство. Отметим, что полуоткрытые интервалы

$$I_0 = \left[a + \frac{b-a}{4}, b - \frac{b-a}{4} \right), \quad I_k = \left[b - \frac{b-a}{2^{k+1}}, b - \frac{b-a}{2^{k+2}} \right),$$

$$I_{-k} = \left[a + \frac{b-a}{2^{k+2}}, a + \frac{b-a}{2^{k+1}} \right), \quad k = 1, 2, \dots$$

образуют разбиение интервала $\Delta = (a, b)$. Очевидно существуют открытые множества E_k такие, что

$$(2.6) \quad A \cap I_k \subset E_k \subset I_k \cup I_{k-1} \cup I_{k+1}, \quad |E_k| \leq |A \cap I_k| + \frac{\varepsilon}{16} |I_k|^2.$$

Обозначим $G = \bigcup_k E_k$. Пусть $J \not\subset (a, b)$ есть некоторый интервал. Если $J \cap (a, b) = \emptyset$, то (2.5) очевидно. В случае $(a, b) \subset J$ имеем

$$|G \cap J| = |G| \leq \sum_k |E_k| \leq \sum_k |A \cap I_k| + \frac{\varepsilon}{16} \sum_k |I_k|^2 \leq |A \cap J| + \frac{\varepsilon}{16} |J|^2$$

и получим (2.5). Итак, без ограничения общности можно предполагать $a \in J$, $b \notin J$. Пусть $m \in \mathbb{Z}$ есть максимальное число удовлетворяющее условию $E_m \cap J \neq \emptyset$. Для такого m очевидно имеем

$$\bigcup_{k \leq m} I_k \subset 4J.$$

Отсюда, с учетом (2.6), получим

$$|G \cap J| \leq \sum_{k \leq m} |E_k| \leq \sum_{k \leq m} |A \cap I_k| + \frac{\varepsilon}{16} \sum_{k \leq m} |I_k|^2 \leq |A \cap 4J| + \varepsilon |J|^2.$$

Лемма 1 доказана. $\square$

Лемма 2. Если $B \subset \mathbb{R}$ есть открытое, а $A \subset B$ измеримое множества, $\lambda(A) \subset B$, $0 \leq |A| < |B|$, то существует другое открытое множество $G \subset B$ такое, что

$$(2.7) \quad \lambda(A) \subset G, \quad \lambda(G) \subset B,$$

$$(2.8) \quad |G| = \frac{|A| + |B|}{2}.$$

Доказательство. Предположим $B = \bigcup_k \Delta_k$, где $\{\Delta_k = (a_k, b_k), k = 1, 2, \dots\}$ – конечное или счетное семейство попарно не пересекающихся интервалов. Обозначим $A_k = A \cap \Delta_k$. Из соотношения $\lambda(A) \subset B$ следует $\lambda(A_k) \subset \Delta_k$. Поэтому, применив лемму 1, можно определить открытые множества G_k такие, что справедливы соотношения

$$(2.9) \quad \lambda(A_k) \subset G_k \subset \Delta_k, \quad |G_k \cap J| \leq |A_k \cap 4J| + |\Delta_k| |J|^2$$

для любого интервала J , с $J \not\subset \Delta_k$. При этом очевидно дополнительно можно предполагать также, что

$$(2.10) \quad |G_k| < |A_k| + \frac{|B \setminus A|}{2^{k+1}}.$$

Существует число $p \in \mathbb{N}$ такое, что

$$(2.11) \quad \sum_{k=1}^p |\Delta_k| > \frac{|A| + |B|}{2}.$$

Если семейство $\{\Delta_k\}$ конечно, то берем p равным количеству интервалов Δ_k . Обозначим

$$(2.12) \quad G(t) = \left(\bigcup_k G_k \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^p (t\Delta_k) \right), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Рассмотрим функцию $f(t) = |G(t)|$. С учетом (2.10) и (2.11), имеем

$$f(0) = \sum_k |G_k| < \sum_k |A_k| + |B \setminus A| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{|A| + |B|}{2},$$

$$f(1) > \sum_{k=1}^p |\Delta_k| > \frac{|A| + |B|}{2}.$$

Отсюда и из непрерывности $f(t)$ следует, что для некоторого $0 < t_0 < 1$ имеет место равенство

$$|G(t_0)| = \frac{|A| + |B|}{2},$$

т.е. множество $G = G(t_0)$ удовлетворяет условию (2.8). Докажем первое из соотношений (2.7). Если $x \in \lambda(A)$, то имея в виду включение $\lambda(A) \subset B$, имеем $x \in \lambda(A) \cap \Delta_k$ при некотором k . Отсюда легко усмотреть, что $x \in \lambda(A_k) \subset G_k \subset G$ и получим $\lambda(A) \subset G$. Остается доказать $\lambda(G) \subset B$. Возьмем произвольную точку $x \notin B$. Так как $0 < t_0 < 1$, имеем

$$x \notin \overline{\bigcup_{k=1}^p (t_0 \Delta_k)}.$$

Следовательно, если интервал $J \ni x$ имеет достаточно малую длину, то, с учетом (2.12), получаем

$$G \cap J = \left(\bigcup_k G_k \right) \cap J.$$

Отсюда и из неравенств (2.9) и (2.10) вытекает

$$(2.13) \quad |G \cap J| = \sum_k |G_k \cap J| \leq \sum_k |A_k \cap 4J| + |J|^2 \sum_k |\Delta_k| \leq |A \cap 4J| + |B||J|^2.$$

Так как $x \notin \lambda(A)$ имеем

$$\lim_{|J| \rightarrow 0} \frac{|A \cap 4J|}{|J|} \rightarrow 0,$$

которое вместе с (2.13) дает

$$\lim_{|J| \rightarrow 0} \frac{|G \cap J|}{|J|} \rightarrow 0,$$

а это значит, что $x \notin \lambda(G)$. Лемма 2 доказана. $\square$

Семейство открытых множеств $\{G_r : r \in E\}$, где $E \subset \mathbb{R}$ -некоторое множество индексов, является цепью, если $\lambda(G_r) \subset G_{r'}$ при любых $r, r' \in E$, с $r < r'$.

Лемма 3. *Если A и B -открытые множества в $\mathbb{R}$, с условиями $\lambda(A) \subset B$ и $\alpha = |A| < |B| = \beta$, то существует цепь открытых множеств $\{G_r : \alpha \leq r \leq \beta\}$ такая, что*

$$(2.14) \quad G_\alpha = A, \quad G_\beta = B, \quad |G_r| = r.$$

Доказательство. Определим $G_\alpha = A$, $G_\beta = B$ и применим лемму 2 к паре открытых множеств G_α, G_β . Этим определяется открытое множество $G = G_{(\alpha+\beta)/2}$, с условиями (2.7) и (2.8), а это означает, что множества $G_\alpha, G_{(\alpha+\beta)/2}, G_\beta$ образуют цепь. Далее, продолжим рассуждения по индукции. Обозначим

$$\mathcal{D}_k[\alpha, \beta] = \left\{ \alpha + \frac{i(\beta - \alpha)}{2^k}, 0 \leq i \leq 2^k \right\},$$

и предположим, что уже выбраны множества G_r , для всех $r \in \mathcal{D}_k[\alpha, \beta]$, при этом они образуют цепь и $|G_r| = r$. Каждое из множеств $G_{(2i+1)/2^{k+1}}$, $0 \leq i \leq 2^k - 1$ получается очередным применением леммы 2 к паре множеств $G_{i/2^k}, G_{(i+1)/2^k}$. Ясно, что полученное таким путем семейство $\{G_r, r \in \mathcal{D}_{k+1}[\alpha, \beta]\}$ тоже будет цепью. При этом сохраняется свойство $|G_r| = r$ теперь уже при $r \in \mathcal{D}_{k+1}[\alpha, \beta]$. В самом деле, имеем

$$|G_{(2i+1)/2^{k+1}}| = \frac{1}{2}(|G_{i/2^k}| + |G_{(i+1)/2^k}|) = \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2^k} + \frac{i+1}{2^k} \right) = \frac{2i+1}{2^{k+1}}.$$

Продолжив этот процесс, получим семейство множеств G_r , определенных при всех

$$r \in \mathcal{D} = \left\{ \alpha + \frac{i(\beta - \alpha)}{2^k}, 0 \leq i \leq 2^k, k = 0, 1, \dots \right\},$$

которое будет цепью и $|G_r| = r$. Если же $r \in [\alpha, \beta]$ -произвольное число, то определим

$$G(r) = \bigcup_{r' \in \mathcal{D}: r' < r} G(r'), \quad r \in [\alpha, \beta].$$

Легко проверить, что $\{G(r) : r \in [\alpha, \beta]\}$ станет цепью и удовлетворяет условию (2.14). Лемма 3 доказана. $\square$

Лемма 4. *Пусть открытые множества $A \subset B \subset \mathbb{R}$ таковы, что $\alpha = |A| < |B| = \beta$ и $\lambda(A) \subset B$. Тогда, если $f(x) \in C[0, \beta]$ и $f(x) = 1$ при $x \in [0, \alpha]$, то*

существует функция $h(x)$, $x \in B$ такая, что

$$(2.15) \quad h(x) = 1, \quad x \in A,$$

$$(2.16) \quad |\{x \in B : h(x) > t\}| = |\{x \in [0, \beta] : f(x) > t\}|, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$(2.17) \quad Dh(x) = h(x) \text{ в каждой точке } x \in B.$$

Доказательство. Согласно лемме 3, существует цепь открытых множеств $\{G(r) : r \in [\alpha, \beta]\}$, удовлетворяющая условиям

$$G_\alpha = A, \quad G_\beta = B, \quad |G_r| = r.$$

Определим функцию

$$\tau(x) = \inf\{r : x \in G_r\}, \quad x \in B \setminus A,$$

которая отображает множество $B \setminus A$ на $[\alpha, \beta]$. Легко проверить соотношение

$$\tau(x) \leq c \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad x \in \bigcap_{r>c} G_r,$$

из которого следует

$$\tau^{-1}(a, b] = \{x : a < \tau(x) \leq b\} = \left(\bigcap_{r>b} G_r \right) \setminus \left(\bigcap_{r>a} G_r \right).$$

Отсюда, в силу (2.14), вытекает $|\tau^{-1}(a, b]| = b - a$ и следовательно

$$(2.18) \quad |\tau^{-1}(E)| = |E|$$

для любого открытого множества $E \subset [\alpha, \beta]$. Определим

$$(2.19) \quad h(x) = \begin{cases} f(\tau(x)) & \text{при } x \in B \setminus A, \\ 1 & \text{при } x \in A. \end{cases}$$

Имеем

$$(2.20) \quad \begin{aligned} |\{x \in B \setminus A : h(x) > t\}| &= |\{x \in B \setminus A : f(\tau(x)) > t\}| = \\ &= |\tau^{-1}\{x \in [\alpha, \beta] : f(x) > t\}| = |\{x \in [\alpha, \beta] : f(x) > t\}|. \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из (2.18) и из того, что $\{x \in [\alpha, \beta] : f(x) > t\}$ есть открытое множество в $[\alpha, \beta]$. Так как функции $h(x)$ и $f(x)$ равны единице соответственно на множествах A и $[0, \alpha]$, причем $|A| = \alpha$, то из (2.20) получаем

$$|\{x \in B : h(x) > t\}| = |\{x \in [0, \beta] : f(x) > t\}|.$$

Остается проверить условие (2.17). Возьмем произвольную точку $x \in B = G_\beta$. В случае

$$x \in \bigcap_{r>\alpha} G_r,$$

имеем $x \in G_r$ для любого фиксированного $r > \alpha$. Из определения τ следует $\tau(t) < r$ при $t \in G_r$. Отсюда, учитывая (2.19), получаем, что числа 1 и $h(t)$ при $t \in G_r$ заключены между величинами

$$(2.21) \quad \inf_{t \in [0, r]} f(t), \quad \text{и} \quad \sup_{t \in [0, r]} f(t).$$

Из непрерывности $f(t)$ следует, что величины (2.21) стремятся к 1 при $r \rightarrow \alpha+$. Отсюда вытекает, что

$$\lim_{|J| \rightarrow 0, x \in J} \frac{1}{|J|} \int_J h(u) du = 1 = h(x),$$

так как $h(u) = 1$ на множестве $A = G_\alpha$. Если же

$$x \in G_\beta \setminus \left(\bigcap_{r > \alpha} G_r \right),$$

то имеем $x \in G_{r+\delta} \setminus G_r$ при некотором r и при этом $r - \delta > \alpha$.

Из соотношений $\lambda(G_{r-\delta}) \subset G_r$ и $x \notin G_r$ следует

$$(2.22) \quad \lim_{|J| \rightarrow 0, x \in J} \frac{|J \cap G_{r-\delta}|}{|J|} = 0.$$

Так как $G_{r+\delta}$ открыто и $x \in G_{r+\delta}$ имеем

$$\lim_{|J| \rightarrow 0, x \in J} \frac{|J \cap (G_\beta \setminus G_{r+\delta})|}{|J|} = 0.$$

Отсюда и из (2.22) получаем

$$(2.23) \quad \lim_{|J| \rightarrow 0, x \in J} \frac{|J \cap (G_{r+\delta} \setminus G_{r-\delta})|}{|J|} = 1.$$

С другой стороны

$$\inf_{t \in [r-\delta, r+\delta]} f(t) \leq h(u) \leq \sup_{t \in [r-\delta, r+\delta]} f(t), \quad u \in G_{r+\delta} \setminus G_{r-\delta}.$$

Отсюда, учитывая (2.23) и ограниченность функции $h(x)$, получим

$$\begin{aligned} \overline{D}h(x) &= \limsup_{|J| \rightarrow 0, x \in J} \frac{1}{|J|} \int_J h(u) du = \limsup_{|J| \rightarrow 0, x \in J} \frac{1}{|J|} \int_J h(u) \cdot \mathbb{I}_{G_{r+\delta} \setminus G_{r-\delta}}(u) du \leq \\ &\leq \sup_{t \in G_{r+\delta} \setminus G_{r-\delta}} h(t) \leq \sup_{t \in [r-\delta, r+\delta]} f(t), \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} \underline{D}h(x) &= \liminf_{|J| \rightarrow 0, x \in J} \frac{1}{|J|} \int_J h(u) du = \liminf_{|J| \rightarrow 0, x \in J} \frac{1}{|J|} \int_J h(u) \cdot \mathbb{I}_{G_{r+\delta} \setminus G_{r-\delta}}(u) du \geq \\ &\geq \inf_{t \in G_{r+\delta} \setminus G_{r-\delta}} h(t) \liminf_{|J| \rightarrow 0, x \in J} \frac{|J \cap (G_{r+\delta} \setminus G_{r-\delta})|}{|J|} = \\ &= \inf_{t \in G_{r+\delta} \setminus G_{r-\delta}} h(t) \geq \inf_{t \in [r-\delta, r+\delta]} f(t). \end{aligned}$$

В итоге получаем

$$\inf_{t \in [r-\delta, r+\delta]} |f(t)| \leq \overline{D}h(x), \underline{D}h(x), h(x) \leq \sup_{t \in [r-\delta, r+\delta]} |f(t)|.$$

В силу непрерывности $f(x)$ разность между правой и левой частями можно сделать сколь угодно малой выбором δ , а это значит $Dh(x) = h(x)$. $\square$

Пусть $g(x)$ есть некоторая функция, определенная на $[a, b]$. Скажем, что значение $Dg(x)$ существует на $[a, b]$, если оно существует в обычном смысле при $x \in (a, b)$, а в точках a и b определяется равенствами

$$D^+g(a) = \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{1}{u} \int_a^{a+u} g(t)dt, \quad D^-g(b) = \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{1}{u} \int_{b-u}^b g(t)dt.$$

Лемма 5. Если $A \subset \mathbb{R}$ есть открытое множество и $|A \cap [a, b]| < (b-a)/10$ для некоторого отрезка $[a, b]$, то существует функция $g(x)$, $x \in [a, b]$, такая, что

$$(2.24) \quad g(x) = 1, \quad x \in A \cap [a, b],$$

$$(2.25) \quad |g(x)| \leq 1, \quad x \in [a, b],$$

$$(2.26) \quad \int_a^b g(x)dx = 0,$$

$$(2.27) \quad Dg(x) = g(x) \text{ внутри } [a, b].$$

Доказательство. Обозначим

$$I = (a, b), \quad B = \frac{11}{10} \cdot I, \quad A' = A \cap \left(\frac{21}{20} \cdot I \right), \quad \alpha = |A'|, \quad \beta = |B|.$$

Имеем

$$\alpha \leq \frac{b-a}{20} + |A \cap [a, b]| < \frac{b-a}{20} + \frac{b-a}{10} = \frac{3(b-a)}{20}, \quad \text{и} \quad \beta = \frac{11(b-a)}{10}.$$

Исходя из этих неравенств, легко усмотреть, что существует функция $f \in C[0, \beta]$, для которой имеем

$$(2.28) \quad \begin{aligned} f(x) &= 1, \quad x \in [0, \alpha], \\ \frac{1}{2} &\leq f(x) \leq 1, \quad x \in [0, \beta], \end{aligned}$$

$$(2.29) \quad \int_0^\beta f(x)dx = 0.$$

Так как $\lambda(A') \subset B$, то применив лемму 4, найдем функцию $h(x)$, $x \in B$, которая удовлетворяет условиям (2.15)-(2.17). Из (2.16) следует, что $h(x)$ обладает свойствами аналогичными (2.28) и (2.29), т.е. имеем

$$(2.30) \quad -\frac{1}{2} \leq h(x) \leq 1, \quad x \in B,$$

$$(2.31) \quad \int_B h(x) dx = 0.$$

Определим

$$(2.32) \quad g(x) = \frac{h(x) + \gamma}{1 + \gamma}, \quad \text{где} \quad \gamma = \frac{1}{b-a} \int_{B \setminus [a,b]} h(t) dt.$$

Отметим, что из (2.15) следует формула (2.24), а из (2.17) следует (2.27). Из неравенства

$$|\gamma| \leq \frac{|B \setminus [a,b]|}{b-a} = 1/10$$

и (2.30) вытекают неравенства

$$g(x) \leq 1 \quad \text{и} \quad g(x) \geq \frac{-1/2 - 1/10}{1 - 1/10} > -1,$$

из которых следует (2.25). Далее, из (2.31) и (2.32) получаем

$$\int_a^b g(x) dx = \frac{1}{1 + \gamma} \left(\int_a^b h(t) dt + \gamma(b-a) \right) = \frac{1}{1 + \gamma} \int_B h(t) dt = 0,$$

которое дает (2.26). Лемма 5 доказана. $\square$

Скажем, что семейство попарно непересекающихся двоичных полуоткрытых интервалов $\Omega = \{\omega_k = [\alpha_k, \beta_k)\}$ является двоичным разбиением открытого множества $G \subset \mathbb{R}$, если

$$G = \bigcup_{\omega \in \Omega} \omega \quad \text{и} \quad \text{dist}(\omega, G^c) > 0, \quad \omega \in \Omega.$$

Если Ω такое, что

$$1 \geq \frac{|\omega|}{\text{dist}(G^c, \omega)} \rightarrow 0, \quad \text{при} \quad \text{dist}(G^c, \omega) \rightarrow 0,$$

то скажем, что оно является регулярным разбиением. Легко усмотреть, что любое открытое множество обладает регулярным двоичным разбиением. Пусть Ω' и Ω'' являются двоичными разбиениями открытых множеств G' и G'' , с $G' \subset G''$. Обозначим $\Omega' < \Omega''$, если любой интервал $\omega'' \in \Omega''$, а также его два смежных интервала той же длины, не входят целиком ни в один из интервалов $\omega' \in \Omega'$.

Лемма 6. Пусть B есть открытое множество в $\mathbb{R}$, а $\Omega = \{\omega_k\}$ его регулярное разбиение на двоичные интервалы. Тогда, если открытое множество $A \subset B$ таково, что $\lambda(A) \subset B$ и

$$|A \cap \omega| < \frac{|\omega|}{10}, \quad \omega \in \Omega,$$

то существует измеримая функция $g(x)$, $x \in [0, 1]$, такая, что

$$(2.33) \quad \text{supp } g \in B \cap [0, 1], \quad g(x) = 1, \quad x \in A \cap [0, 1],$$

$$(2.34) \quad |g(x)| \leq 1, \quad x \in [0, 1],$$

$$(2.35) \quad \int_{\omega_k} g(x) dx = 0, \quad \text{если } \omega_k \subset [0, 1],$$

$$(2.36) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x, g) = g(x) \quad \text{в каждой точке } x \in [0, 1].$$

Доказательство. Предположим $\omega_k = [a_k, b_k]$. Обозначим $A_k = A \cap \omega_k$. Применив лемму 5 определим функции $g_k(x)$, $x \in \omega_k$, со свойствами

$$(2.37) \quad g_k(x) = 1, \quad x \in A_k,$$

$$(2.38) \quad |g_k(x)| \leq 1, \quad x \in \omega_k,$$

$$(2.39) \quad \int_{\omega_k} g_k(x) dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$(2.40) \quad Dg_k(x) = g_k(x) \quad \text{внутри } [a_k, b_k].$$

Определим $g(x) = g_k(x)$, при $x \in \omega_k = (a_k, b_k) \subset (0, 1)$, а если x является концом одного из интервалов ω_k , то предположим, что

$$g(x) = (D^+g(x) + D^-g(x))/2$$

при $x \neq 0, 1$, и $D^+g(x)$ или $D^-g(x)$, когда соответственно x равно 0 или 1. В точках $x \in [0, 1] \setminus B$ определяется $g(x) = 0$. Этим $g(x)$ будет корректно определена на $[0, 1]$ и очевидно она удовлетворяет условиям (2.33)-(2.35). Проверке нуждается лишь свойство (2.36). Если $x \in B \cap [0, 1]$ то либо имеем $x \in (a_k, b_k) \subset (0, 1)$ либо x равно одному из a_k или b_k . В первом случае (2.36) немедленно следует из (2.40), а при $x = a_k, b_k$ надо также учитывать следующее свойство системы Хаара:

$$S_n(x, g) \rightarrow (D^+g(x) + D^-g(x))/2, \quad \text{если } D^+g(x) \text{ и } D^-g(x) \text{ существуют.}$$

Пусть теперь $x \in [0, 1] \setminus B$, а $J \ni x$ некоторый интервал. Для любого интервала ω_k , кроме быть может $\omega_{k'}$ и $\omega_{k''}$, имеем либо $\omega_k \subset J$ либо $\omega_k \cap J = \emptyset$. Тогда из (2.38), (2.39) и регулярности разбиения Ω следует

$$\begin{aligned} \frac{1}{|J|} \left| \int_J g(t) dt \right| &= \frac{1}{|J|} \left| \int_{J \cap \omega_{k'}} g_{k'}(t) dt + \int_{J \cap \omega_{k''}} g_{k''}(t) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{|\omega_{k'}|}{\text{dist}(B^c, \omega_{k'})} + \frac{|\omega_{k''}|}{\text{dist}(B^c, \omega_{k''})} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

когда $|J| \rightarrow 0$. Отсюда следует, что (2.36) выполняется при всех $x \in [0, 1]$. $\square$

Лемма 7. Если $E \subset [0, 1]$ есть множество типа G_δ в $[0, 1]$, имеющее меру нуль, то существуют конечное или счетное число открытых множеств $G_k \subset \mathbb{R}$, с регулярными двоичными разбиениями Ω_k , такие, что

$$(2.41) \quad E = [0, 1] \cap \left(\bigcap_k G_k \right),$$

$$(2.42) \quad \Omega_{k+1} < \Omega_k, \quad \lambda(G_{k+1}) \subset G_k,$$

$$(2.43) \quad |G_{k+1} \cap \omega| < \frac{|\omega|}{10}, \quad \omega \in \Omega_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Доказательство. Имеем

$$E = [0, 1] \cap \left(\bigcap_k E_k \right),$$

где $E_k \subset \mathbb{R}$ -открытые множества. Множества G_k будут определены по индукции. Возьмем $G_1 = E_1$ и пусть Ω_1 есть произвольное регулярное двоичное разбиение множества G_1 . Предположим, что уже выбраны множества G_k , с соответствующими двоичными разбиениями Ω_k , для $k = 1, 2, \dots, p$, при этом они удовлетворяют условиям (2.42), (2.43) и дополнительно имеем $G_k \subset E_k$ при $k \leq p$.

Так как $|E| = 0$, имеем $\lambda(E) = E$. Применив лемму 2 для множеств $B = G_p$ и $A = E$, найдем множество G' такое, что $E \subset G'$ и $\lambda(G') \subset G_p$. Существует также множество $G'' \supset E$ такое, что

$$|G'' \cap \omega| < \frac{|\omega|}{10}, \quad \omega \in \Omega_p.$$

Возьмем $G_{p+1} = G' \cap G'' \cap E_{p+1}$. Очевидно имеем

$$\lambda(G_{p+1}) \subset \lambda(G') \subset G_p, \quad G_{p+1} \subset E_{p+1}$$

$$|G_{p+1} \cap \omega| \leq |G'' \cap \omega| < \frac{|\omega|}{10}, \quad \omega \in \Omega_p.$$

В силу $G_{p+1} \subset G_p$ существует регулярное двоичное разбиение Ω_{p+1} множества G_{p+1} такое, что $\Omega_{p+1} < \Omega_p$. Итак полученная таким образом последовательность

G_k в месте с разбиениями Ω_k удовлетворяют условиям (2.42), (2.43) и $E \subset G_k \subset E_k$, из которого следует (2.41). Лемма доказана. $\square$

Лемма 8. Для любого множества $E \subset [0, 1]$ меры нуль, имеющее тип G_δ в $[0, 1]$, существует функция $g(x)$, удовлетворяющая условиям

- a) $|g(x)| \leq 2$,
- b) $S_n(x, g) \rightarrow g(x)$ в каждой точке $x \in [0, 1] \setminus E$,
- c) для любой точки $x \in E$ имеем

$$\delta(x, g) = \limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(x, g) - \liminf_{n \rightarrow \infty} S_n(x, g) \geq 1.$$

Доказательство. Применив лемму 7, множество E можно представить в виде

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k,$$

где $G_k \subset [0, 1]$ -открытые множества, которые в месте с некоторыми регулярными двоичными разбиениями Ω_k удовлетворяют условиям

$$\lambda(G_{k+1}) \subset G_k,$$

$$|G_{k+1} \cap \omega| < \frac{|\omega|}{10}, \quad \omega \in \Omega_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для пары множеств $B = G_k$ и $A = G_{k+1}$ можно применить лемму 6. В итоге получим последовательность функций $g_k(x)$, $x \in [0, 1]$, с условиями

$$(2.44) \quad \text{supp } g_k \in G_k \cap [0, 1], \quad g_k(x) = 1, \quad x \in G_{k+1} \cap [0, 1],$$

$$|g_k(x)| \leq 1, \quad x \in [0, 1],$$

$$(2.45) \quad \int_{\omega} g_k(x) dx = 0, \quad \omega \in \Omega_k, \quad \omega \subset [0, 1],$$

$$(2.46) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x, g_k) = g_k(x), \quad \text{в каждой точке } x \in [0, 1].$$

Будем предполагать $G_0 = [0, 1]$. Во первых заметим, что при условии

$$(2.47) \quad x \in (G_k \setminus G_{k+1}) \cap [0, 1], \quad k = 0, 1, \dots,$$

из (2.44) вытекает

$$(2.48) \quad g_i(x) = 1, \quad i < k, \quad g_i(x) = 0, \quad i > k,$$

$$(2.49) \quad S_n(x, g_i) = 0, \quad i > k.$$

Соотношения (2.48) сразу же следуют из (2.44). Докажем (2.49). Из (2.47) следует, что если $I \subset [0, 1]$ -некоторый двоичный интервал, с $x \in \bar{I}$, то для любого

двоичного интервала $\omega \subset G_{k+1}$, в частности для интервалов $\omega \in \Omega_i$, $i > k$, либо $\omega \cap I = \emptyset$ либо $\omega \subset I$. Отсюда, с учетом (2.45), получаем равенство

$$\int_I g_i(t) dt = 0, \quad i > k,$$

из которого следует (2.49). Если $x \in [0, 1] \setminus E$, то имеем (2.47) для некоторого $k = 0, 1, \dots$. Отсюда функция

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} g_k(x)$$

определена при $x \in [0, 1] \setminus E$, т.е. почти всюду. Определим $g(x) = 0$ при $x \in E$. Если $x \in [0, 1] \setminus E$, то имеем (2.47) при некотором $k = 0, 1, \dots$ и следовательно (2.48). Отсюда следует

$$|g(x)| = \left| \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} g_i(x) + (-1)^{k+1} g_k(x) \right| \leq \left| \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \right| + |g_k(x)| \leq 2,$$

и получаем $|g(x)| \leq 2$, $x \in (0, 1)$, что дает а). Далее вновь предположим $x \in [0, 1] \setminus E$. Тогда имеем (2.47). Отсюда, с учетом (2.48) и (2.49), получаем

$$g(x) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} g_i(x), \quad \text{и} \quad S_n(x, g) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} S_n(x, g_i),$$

которые вместе с (2.46) дает б). Теперь пусть $x \in E$. Тогда имеем $x \in \bar{\omega}_k$ для некоторой последовательности $\omega_k \in \Omega_k$, $\omega_k \subset [0, 1]$, $k = 1, 2, \dots$. Из (2.45), регулярности разбиений Ω_i и соотношения $\Omega_i < \Omega_k$, $i > k$, следует

$$\begin{aligned} \int_{\omega_k} g_i(t) dt &= \int_{\omega_k^+} g_i(t) dt = \int_{\omega_k^-} g_i(t) dt = 0, \quad i \geq k, \\ g_i(x) &= 1, \quad x \in \omega_k \cup \omega_k^+ \cup \omega_k^-, \quad i < k. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} S_{|\omega_k|^{-1}}(x, g_i) &= 0, \quad i \geq k, \\ S_{|\omega_k|^{-1}}(x, g_i) &= 1, \quad i < k. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$S_{|\omega_k|^{-1}}(x, g) = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} S_{|\omega_k|^{-1}}(x, g_i) = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1},$$

а это значит, что

$$\delta(x, g) \geq 1, \quad x \in E.$$

Итак функция $g(x)$ удовлетворяет условиям а), б) и с) и лемма 8 доказана. $\square$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Необходимость. Для данной функции $f \in L^1[0, 1]$ рассмотрим множества

$$A_{n,m}(f) = \bigcup_{i,j>n} \left\{ x \in [0, 1] : |S_i(x, f) - S_j(x, f)| > \frac{1}{m} \right\}.$$

Докажем, что множество

$$A(f) = \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq 1} A_{n,m}(f)$$

в точности состоит из точек расходимости ряда Фурье-Хаара функции f . Для этого проверим эквивалентность следующих соотношений:

- (i) $x \in A(f)$;
- (ii) существует число $m_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $x \in A_{n,m_0}(f)$ при любом $n = 1, 2, \dots$;
- (iii) существует число $m_0 \in \mathbb{N}$ и последовательности $p_k, q_k \subset \mathbb{N}$ такие, что $p_k, q_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$ и

$$|S_{p_k}(x, f) - S_{q_k}(x, f)| > \frac{1}{m_0};$$

- (iv) $S_n(x, f)$ расходится.

Отметим, что множества

$$\left\{ x \in [0, 1] : |S_i(x, f) - S_j(x, f)| > \frac{1}{m} \right\}$$

можно представить в виде объединения конечного числа двоичных отрезков разного типа (открытых, замкнутых или полуоткрытых). Из этого следует, что

$$A_{n,m}(f) = G_{n,m} \cup d_{n,m}$$

где $G_{n,m}$ -открытое множество, а $d_{n,m}$ конечно. Отсюда легко вытекает, что

$$A(f) \supset \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq 1} G_{n,m},$$

а разность

$$A(f) \setminus \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq 1} G_{n,m}$$

есть не более чем счетное множество. Так как любое счетное или конечное множество имеет тип $G_{\delta\sigma}$, то получим, что $A(f)$ тоже является множеством типа $G_{\delta\sigma}$. То, что оно имеет меру нуль, следует из сходимости почти всюду рядов Фурье-Хаара. $\square$

Достаточность. Предположим, что E есть множество типа $G_{\delta\sigma}$ в $[0, 1]$, имеющее меру нуль, и представим его в виде $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, где $E_k \subset [0, 1]$ -множества типа G_{δ} меры нуль. Очевидно можно предполагать, что $E_k \subset E_{k+1}$. В противном

случае могли бы рассматривать множества $E'_k = \bigcup_{j=1}^k E_j$, которые тоже являются множествами типа G_δ и их объединение равно E . Применив лемму 3, каждому множеству E_k сопоставим функцию $f_k(x)$, такую, что

а*) $|f_k(x)| \leq 2$,

б*) ряд Фурье-Хаара функции f_k сходится в каждой точке $x \in [0, 1] \setminus E_k$,

с*) для любой точки $x \in E_k$ имеем $\delta(x, f_k) \geq 1$.

Докажем, что

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(x)}{10^k}$$

является искомой функцией. Ее ограниченность следует из свойства а*). Возьмем любую точку $x \in E$. Для некоторого k имеем $x \in E_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i \right)$. Отсюда вытекает, что существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \left(x, \sum_{i=1}^{k-1} 10^{-i} f_i \right),$$

а также

$$\delta(x, f_k) \geq 1, \quad \delta(x, f_i) \leq 2 \sup_n |S_n(x, f_i)| \leq 2 \|f_i\|_\infty \leq 4, \quad i = 1, 2, \dots$$

Далее имеем

$$\delta(x, f) \geq \frac{\delta(x, f_k)}{10^k} - \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\delta(x, f_i)}{10^i} \geq \frac{1}{2 \cdot 10^k} - \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{4}{10^i} = \frac{1}{18 \cdot 10^k} > 0.$$

Это значит, что ряд Фурье-Хаара расходится в любой точке $x \in E$. Теперь возьмем точку $x \notin E$. При любом фиксированном $i \in \mathbb{N}$ имеем сходимость частичных сумм $S_n(x, f_i)$. Отсюда получим

$$\delta(x, f) = \delta \left(x, \sum_{i=k+1}^{\infty} 10^{-i} f_i \right) \leq 2 \sup_n \left| S_n \left(x, \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{f_i}{10^i} \right) \right| \leq 4 \sum_{i=k+1}^{\infty} 10^{-i} < \frac{1}{2 \cdot 10^k}.$$

Так как последнее имеет место при любом k , то получим $\delta(x, f) = 0$. Теорема доказана. $\square$

Автор выражает благодарность К. Навасардяну за полезные замечания по поводу оформления статьи.

Abstract. The paper proves that $E \subset [0, 1]$ is a set of divergence points of Fourier-Haar series of a function $f \in L^\infty[0, 1]$ if and only if E is a $G_{\delta\sigma}$ type set of zero measure.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. М. Бугадзе, “О расходимости рядов Фурье-Уолша ограниченных функций на множествах меры нуль”, Мат. сборник, **185** (7), 119 – 127 (1994).
- [2] В. М. Бугадзе, “О расходимости рядов Фурье-Хаара ограниченных функций на множествах меры нуль”, Мат. заметки, **51** (5), 20 – 26 (1992).
- [3] В. В. Буздалин, “О неограниченно расходящихся тригонометрических рядах Фурье от непрерывных функций”, Мат. заметки, **7** (1), 7 – 18 (1970).
- [4] В. В. Буздалин, “Тригонометрические ряды Фурье непрерывных функций, расходящиеся на заданном множестве”, Математический сборник, **95(137)**, 1(9), 84 – 107 (1974).
- [5] U. Goginava, “On divergence of Walsh-Fejer means of bounded functions on sets of measure zero”, Acta Math. Hungarica, **121** (3), 359 – 369 (2008).
- [6] A. Haar, “Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme”, Math. Ann., **69**, 331 – 371 (1910).
- [7] H. Hahn, “Ueber die Menge der Konvergenzpunkte einer Funktionenfolge”, Arch. d. Math. u. Phys., **28**, 34 – 45 (1919).
- [8] J-P. Kahane, Y. Katznelson, “Sur les ensembles de divergence des series trigonometriques”, Studia math., **XXVI**, 305 – 306 (1966).
- [9] G. A. Karagulyan, “Divergence of general operators on the sets of measure zero”, Colloq. Math., **121** (1), 113 – 119 (2010).
- [10] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные ряды, Москва, Наука (1999).
- [11] A. N. Kolmogoroff, “Une serie de Fourier-Lebesgue divergente presque partout”, Fund. Math., **4**, 324 – 328 (1923).
- [12] М. А. Лунина, “О множестве точек неограниченной расходимости рядов по системе Хаара”, Вестн. Моск. ун-та. Серия 1, Мат. мех., **4**, 13 – 20 (1976).
- [13] В. И. Прохоренко, “О расходящихся рядах по системе Хаара”, Изв. вузов. Мат., **1**, 62 – 68 (1971).
- [14] W. Sierpinski, “Sur Tensemble des points de convergence d’une suite de fonctions continues”, Fund. Math., **2**, 41 – 49 (1921).
- [15] Б. С. Стечкин, “О сходимости и расходимости тригонометрических рядов”, Успехи матем. наук, VI, **42** (2), 148 – 149 (1951).
- [16] Л. В. Тайков, “О расходимости рядов Фурье по переставленной тригонометрической системе”, Успехи матем. наук, XVIII, **113** (5), 191 – 198 (1963).
- [17] П. Л. Ульянов, “А. А. Колмогоров и расходящиеся ряды Фурье”, Успехи мат. наук, **38** (4), 57 – 100 (1983).
- [18] Ш. В. Хеладзе, “О расходимости всюду рядов Фурье по ограниченным системам Виленикина”, Труды Тбилисского матем. института АН Груз. ССР, **58**, 225 – 242 (1978).
- [19] Ш. В. Хеладзе, “О расходимости всюду рядов Фурье-Уолша”, Сообщ. АН Груз. ССР, **77** (2), 305 – 307 (1975).
- [20] K. Zeller, “Ueber Konvergenzmengen von Fourierreihen”, Arch. Math., **6**, 335 – 340 (1955).

Поступила 11 февраля 2010