

О БЕЗУСЛОВНОЙ БАЗИСНОСТИ СИСТЕМ СИНУСОВ И КОСИНУСОВ

С. С. КАЗАРЯН

Институт математики НАН Армении

Аннотация. Доказывается, что системы функций $\{\sin(n - \beta)x\}_{n=1}^{\infty}$ и система функций $\{\cos(n - \beta)x\}_{n=0}^{\infty}$ не являются безусловными базисами ни в одном из пространств $L^p(0, \pi)$, $p \neq 2$.

MSC2010 number: 42A10, 42A15, 42A20

Ключевые слова: Тригонометрические системы; коэффициенты Фурье; негармонические ряды.

Следующая теорема была доказана Е. И. Моисеевым [1].

Теорема. Пусть $1 < p < \infty$. Система функций $\left\{\sin\left(n - \frac{\beta}{2}\right)x\right\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом в $L^p(0, \pi)$ тогда и только тогда, когда $\beta \in \left(-\frac{1}{p}, 2 - \frac{1}{p}\right)$. Система функций $\left\{\cos\left(n - \frac{\beta}{2}\right)x\right\}_{n=0}^{\infty}$ является базисом в $L^p(0, \pi)$ тогда и только тогда, когда $\beta \in \left(-1 - \frac{1}{p}, 1 - \frac{1}{p}\right)$.

Отметим, что системы $\{\sin(n - \beta)x\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\cos(n - \beta)x\}_{n=0}^{\infty}$ не являются базисами в $L^1(0, \pi)$ для $\beta \in \mathbb{R}$, так как равномерно ограниченная нормированная система не может быть базисом в $L^1(0, \pi)$ (см. [2], [3], [12]).

Легко проверить, что если для некоторого числа $\beta \in \mathbb{R}$ системы $\{\sin(n - \beta)x\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\cos(n - \beta)x\}_{n=0}^{\infty}$ являются базисами в пространстве $L^p(0, \pi)$, то система $\{e^{i(n - \beta \operatorname{sign} n)x}\}$ является базисом в $L^p(-\pi, \pi)$. С результатами теории негармонических рядов можно познакомиться в [4] – [6]. Условия для безусловной базисности систем синусов и косинусов были изучены в [7]. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $\beta \in \mathbb{R}$. Тогда система функций $\{\sin(n - \beta)x\}_{n=1}^{\infty}$ и система функций $\{\cos(n - \beta)x\}_{n=0}^{\infty}$ не являются безусловными базисами ни в одном из пространств $L^p(0, \pi)$, $p \neq 2$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай системы $\{\sin(n - \beta)x\}_{n=1}^{\infty}$. Предположим, что $1 < p < 2$. Согласно теореме Моисеева, $\left\{\sin\left(n - \frac{\beta}{2}\right)x\right\}_{n=1}^{\infty}$ может быть безусловным базисом в $L^p(0, \pi)$ только если $\beta \in \left(-\frac{1}{p}, 2 - \frac{1}{p}\right)$. Возьмем 2π -периодическую нечетную функцию f такую, что $f \in L^p(-\pi, \pi)$. Для коэффициентов Фурье функции f по тригонометрической системе имеем, что

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad n = 0, 1, \dots;$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Равенство Парсеваля в этом случае имеет следующий вид

$$\frac{a_0^2(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^2(f) + b_n^2(f)] = \pi^{-1} \|f\|_{L^2(-\pi, \pi)}^2.$$

Используя формулу $\sin(n - \beta)x = \sin(nx) \cos(\beta x) - \cos(nx) \sin(\beta x)$, легко получаем, что для любой последовательности $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$ и для всех $m \in N$

$$(1) \quad \left\| \sum_{n=1}^m c_n \sin[(n - \beta)x] \right\|_{L^2(0, \pi)}^2 \leq \sigma \|\{c_n\}\|_{l^2}^2.$$

Если бы система $\{\sin(n - \beta)x\}_{n=1}^{\infty}$ была бы безусловным базисом в $L^p(0, \pi)$, $1 < p < 2$, то по теореме Орлича [9] получили бы, что для любой функции $f \in L^p(-\pi, \pi)$, $1 < p < 2$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) \sin[(n - \beta)x] \quad \text{в } L^p(0, \pi)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|^2 \|\sin[(n - \beta)x]\|_{L^p(0, \pi)}^2 < \infty.$$

Из последнего условия следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|^2 < \infty$$

для всех $f \in L^p(0, \pi)$, что противоречит условию (1), так как можем выбрать $f \in L^p(0, \pi)$ такую, что $f \notin L^2(0, \pi)$. Перед тем как перейти к доказательству теоремы 1 для случая $2 < p < \infty$ рассмотрим функции

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1/2} \sin[kx],$$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1/2} \cos[kx],$$

которые принадлежат пространству $L^p(0, \pi)$ для всех $1 \leq p < 2$ (см. [10], стр. 298). Посчитаем коэффициенты $b_n^*(\varphi)$, $b_n^*(\psi)$, где

$$b_n^*(f) = \int_0^\pi f(t) \sin[(n - \beta)t] dt.$$

Для этого воспользуемся равенствами

$$\int_0^\pi \sin[kx] \sin[(n - \beta)x] dx = \begin{cases} \frac{\sin[\beta\pi]}{k^2 - (n - \beta)^2} \cdot k, & \text{когда } k + n = 2l, l \in N \\ -\frac{\sin[\beta\pi]}{k^2 - (n - \beta)^2} \cdot k, & \text{когда } k + n = 2l - 1, l \in N \end{cases}$$

$$\int_0^\pi \cos[kx] \sin[(n - \beta)x] dx = \begin{cases} \frac{1 - \cos[\beta\pi]}{k^2 - (n - \beta)^2} \cdot k, & \text{когда } k + n = 2l, l \in N \\ \frac{1 + \cos[\beta\pi]}{k^2 - (n - \beta)^2} \cdot k, & \text{когда } k + n = 2l - 1, l \in N \end{cases}$$

Из полученных формул сразу получаем, что для любого $\nu \in N$

$$b_{2\nu-1}^*(\varphi) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^{1/2} \sin[\beta\pi]}{(2k)^2 - (2\nu - 1 - \beta)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)^{1/2} \sin[\beta\pi]}{(2k+1)^2 - (2\nu - 1 - \beta)^2},$$

$$b_{2\nu}^*(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^{1/2} \sin[\beta\pi]}{(2k)^2 - (2\nu - \beta)^2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)^{1/2} \sin[\beta\pi]}{(2k+1)^2 - (2\nu - \beta)^2},$$

$$b_{2\nu-1}^*(\psi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^{1/2} (1 + \cos[\beta\pi])}{(2k)^2 - (2\nu - 1 - \beta)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)^{1/2} (1 - \cos[\beta\pi])}{(2k+1)^2 - (2\nu - 1 - \beta)^2},$$

$$b_{2\nu}^*(\psi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^{1/2} (1 - \cos[\beta\pi])}{(2k)^2 - (2\nu - \beta)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)^{1/2} (1 + \cos[\beta\pi])}{(2k+1)^2 - (2\nu - \beta)^2}.$$

Рассмотрим функцию

$$f_\beta^{(1)}(x) = \frac{\varphi(x)}{\sin(\beta\pi)} + \frac{\psi(x)}{1 + \cos(\beta\pi)}.$$

Для этой функции имеем, что

$$b_{2\nu-1}^*(f_\beta^{(1)}) = \lambda_\beta^{(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)^{1/2}}{(2k+1)^2 - (2\nu - 1 - \beta)^2},$$

$$b_{2\nu}^*(f_\beta^{(1)}) = \lambda_\beta^{(1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^{1/2}}{(2k)^2 - (2\nu - \beta)^2},$$

где

$$\lambda_\beta^{(1)} = 1 + \frac{1 - \cos(\beta\pi)}{1 + \cos(\beta\pi)} = \frac{2}{1 + \cos(\beta\pi)}.$$

Для функции

$$f_\beta^{(2)}(x) = -\frac{\varphi(x)}{\sin[\beta\pi]} + \frac{\psi}{1 - \cos(\beta\pi)}$$

будем иметь

$$b_{2\nu-1}^*(f_\beta^{(2)}) = \lambda_\beta^{(2)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^{1/2}}{(2k)^2 - (2\nu-1-\beta)^2},$$

$$b_{2\nu}^*(f_\beta^{(2)}) = \lambda_\beta^{(2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)^{1/2}}{(2k+1)^2 - (2\nu-\beta)^2},$$

где

$$\lambda_\beta^{(2)} = \frac{2}{1 - \cos(\beta\pi)}.$$

Когда $0 < \beta < 1$ мы имеем, что для любого $\nu = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_\beta^{(1)}} b_{2\nu-1}^*(f_\beta^{(1)}) &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(2l-1)^{1/2}}{(2l-1)^2 - (2\nu-1-\beta)^2} \geq \int_1^{2\nu-3} \frac{t^{1/2}}{t^2 - (2\nu-1-\beta)^2} dt + \\ &+ \int_{2\nu-1}^{\infty} \frac{t^{1/2}}{t^2 - (2\nu-1-\beta)^2} dt + \frac{(2\nu-3)^{1/2}}{(2\nu-3)^2 - (2\nu-1-\beta)^2}. \end{aligned}$$

Так как

$$\int_0^1 \frac{t^{1/2}}{t^2 - (2\nu-1-\beta)^2} dt < 0 \quad \text{и} \quad \int_{2\nu-3}^{2\nu-1} \frac{t^{1/2}}{t^2 - (2\nu-1-\beta)^2} dt < 0,$$

то мы приходим к следующему неравенству

$$\frac{1}{\lambda_\beta^{(1)}} b_{2\nu-1}^*(f_\beta^{(1)}) \geq \int_0^{\infty} \frac{t^{1/2}}{t^2 - (2\nu-1-\beta)^2} dt - \frac{(2\nu-3)^{1/2}}{(2-\beta)(2\nu-\beta-4)}.$$

Имеем, что

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{1/2}}{t^2 - (2\nu-1-\beta)^2} dt = \frac{1}{(2\nu-1-\beta)^{1/2}} \int_0^{\infty} \frac{x^{1/2}}{x^2 - 1} dx = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(2\nu-1-\beta)^{1/2}},$$

где последний интеграл является значением преобразования Меллина функции $(x^2 - 1)^{-1}$ в точке $3/2$ (см. [11], стр. 337). Откуда следует, что для некоторого числа N_0

$$\frac{1}{\lambda_\beta^{(1)}} b_{2\nu-1}^*(f_\beta^{(1)}) \geq \frac{\pi-1}{2} \frac{1}{(2\nu-1-\beta)^{1/2}}$$

для всех $\nu \geq N_0$.

Отсюда сразу следует, что

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k^*(f_\beta^{(1)})|^2 = \infty.$$

Когда $-1/4 < \beta < 0$ аналогичным образом получаем, что

$$\frac{1}{\lambda_\beta^{(2)}} b_{2\nu}^*(f_\beta^{(2)}) \geq \frac{\pi-2}{2} \frac{1}{(2\nu-\beta)^{1/2}}$$

для всех $\nu \geq N_1$, где N_1 — некоторое число. Откуда следует, что

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k^*(f_\beta^{(2)})|^2 = \infty.$$

Условия (2) и (3) нам дают возможность завершить доказательство теоремы 1 для системы $\{\sin[(n - \beta)x]\}_{n=1}^{\infty}$.

Действительно, предположим, что система $\{\sin[(n - \beta)x]\}_{n=1}^{\infty}$ для некоторого $2 < p < \infty$ является безусловным базисом в $L^p(0, \pi)$. Тогда сопряженная система $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ будет безусловным базисом в $L^{p'}(0, \pi)$.

Заметим, что (см. [1])

$$0 < \inf_n \|h_n\|_{L^{p'}(0, \pi)} \leq \sup_n \|h_n\|_{L^{p'}(0, \pi)} < \infty.$$

Отсюда, применяя теоремы Орлича, приходим к противоречию с условиями (2) и (3). Таким образом, теорема 1 полностью доказана для системы $\{\sin[(n - \beta)x]\}_{n=1}^{\infty}$.

Доказательство теоремы 1 для случая системы $\{\cos[(n - \beta)x]\}_{n=1}^{\infty}$ аналогично, поэтому мы не будем приводить детали. $\square$

Из теоремы 1 сразу следует

Следствие. Система функций $\{e^{i(n - \beta \operatorname{sign} n)x}\}$ не является безусловным базисом ни в одном из пространств $L^p(-\pi, \pi)$, $p \neq 2$.

Abstract. We prove that systems of functions $\{\sin(n - \beta)x\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\cos(n - \beta)x\}_{n=1}^{\infty}$ are not unconditional bases in not any space $L^p(0, \pi)$, $p \neq 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. И. Моисеев, “О базисности систем синусов и косинусов”, ДАН СССР, **275**, 794 – 798 (1984).
- [2] К. С. Казарян, “Логарифмический рост средних арифметических от сумм функций Лебега ограниченных биортогональных систем”, Докл. АН Арм.ССР, **64**, 140 – 145 (1979).
- [3] S. Kwapień, S. Szarek, “An estimation of the Lebesgue functions of biorthogonal systems with an application to the nonexistence of some bases in C and L^p ”, Studia Math., **66**, 185 – 200 (1979).
- [4] R. M. Young, An Introduction to Nonharmonic Fourier Series, Academic Press, New York (1980).
- [5] А. М. Седлецкий, “Биортогональные разложения функций в ряды экспонент на интервалах вещественной оси”, УМН, **37**, 51– 95 (1982).
- [6] А. М. Седлецкий, Негармонический Анализ, Итоги Науки и Техники, **96** (2001).
- [7] X. He, H. Volkmer, “Riesz bases of solutions of Sturm-Liouville equations”, Journ. of Fourier Anal. and Appl., **7**, 297 – 307 (2001).
- [8] Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, Гос. Изд. Физ.-Мат., Лит. (1961).

- [9] W. Orlicz, “Über unbedingte Konvergenz in Funktionen Raumen Γ ”, *Studia Math.*, **4**, 33 – 37 (1933).
- [10] А. Зигмунд, *Тригонометрические Ряды*, **1**, М., Мир (1965).
- [11] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы Интегралов, Сумм, Рядов и Произведений*, Гос. Изд. Физ.-Мат., Лит., Москва (1963).
- [12] А. М. Олевский, “Ряды Фурье непрерывных функций по ограниченным ортонормированным системам”, *Изв. АН СССР, сер. Математика*, **30** (3), 387 – 432 (1966).

Поступила 7 сентября 2009