

О β -РАВНОМЕРНЫХ АЛГЕБРАХ ДИРИХЛЕ

С. А. ГРИГОРЯН, М. И. КАРАХАНИЯН, Т. А. ХОРЬКОВА

Казанский государственный энергетический университет

E-mail: *gsuren@inbox.ru*

Ереванский государственный университет

E-mail: *karakhanyan@yahoo.com*

Аннотация. Данная работа посвящена исследованию свойств β -равномерных алгебр Дирихле и максимальных β -равномерных алгебр. Приводится метод, позволяющий по равномерной алгебре Дирихле (соответственно по максимальной равномерной алгебре) построить β -равномерную алгебру Дирихле (соответственно максимальную β -равномерную алгебру). Как следствие получен соответствующий аналог теоремы Бишоп-Шилова об антисимметричном разбиении.

MSC2010 number: 46J45; 46H35

Ключевые слова: β - равномерные алгебры; максимальные алгебры; алгебры Дирихле.

Пусть Ω – локально компактное пространство, допускающее компактное исчерпание $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, где $K_n \subset K_{n+1}$ и каждое K_n есть компакт. Обозначим через $C_{\infty}(\Omega)$ алгебру всех ограниченных непрерывных комплекснозначных функций на Ω . Если в алгебре $C_{\infty}(\Omega)$ ввести топологию при помощи нормы

$$\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\},$$

то получим коммутативную банахову алгебру $C_b(\Omega)$ у которой пространство максимальных идеалов $M_{C_b(\Omega)} = \beta\Omega$, где $\beta\Omega$ есть Стоун-Чеховская компактификация для Ω (см. [1], [2]). Напомним, что если $\varphi \in M_{C_b(\Omega)}$, то φ – мультипликативный функционал с единичной нормой. Каждая точка $x \in \Omega$ порождает мультипликативный функционал δ_x , полагая $\delta_x(f) = f(x)$, для всех $f \in C_b(\Omega)$.

Преобразованием Гельфанда $f \in C_b(\Omega)$ называется функция $\hat{f}$ на $\beta\Omega$, где $\hat{f}(\varphi) = \varphi(f)$. Из определения $*$ -слабой топологии следует, что $\hat{f} \in C(\beta\Omega)$, поэтому преобразование Гельфанда порождает гомоморфизм между алгебрами $C_b(\Omega)$ и $C(\beta\Omega)$, где $C(\beta\Omega)$ – алгебра всех непрерывных комплекснозначных функций на компакте $\beta\Omega$. Отметим, что "нарос" $\beta\Omega \setminus \Omega$ имеет достаточно сложную структуру, хотя бы потому, что в каждой точке "нароста" не выполняется первая аксиома счетности (см. [3]).

Пусть $C_{00}(\Omega)$ есть подалгебра из $C_b(\Omega)$, состоящая из функций с компактными носителями, а $C_0(\Omega)$ – подалгебра $C_b(\Omega)$, содержащая все функции, которые обращаются в нуль в "бесконечности". Так как Ω является σ -компактным множеством (что предлагается везде ниже), то $C_{00}(\Omega) \subsetneq C_0(\Omega)$. Отметим, что $C_0(\Omega)$ есть замкнутый в равномерной норме идеал в банаховой алгебре $C_b(\Omega)$, а $C_{00}(\Omega)$ в этой норме плотна в $C_0(\Omega)$. Кроме того алгебра $C_b(\Omega)$ является $C_0(\Omega)$ -модулем.

Так как $C_\infty(\Omega)$ есть $C_0(\Omega)$ -модуль, то на $C_\infty(\Omega)$ определим семейство полунорм $\{P_g\}_{g \in C_0(\Omega)}$, полагая

$$P_g(f) = \|T_g f\|_\infty,$$

где $T_g : C_b(\Omega) \rightarrow C_b(\Omega)$ – мультипликативный оператор $T_g f = fg$.

Определим топологию на $C_\infty(\Omega)$ при помощи этого семейства полунорм, где в качестве базиса окрестностей нулевой функции 0 рассматриваются множества вида

$$U(P_1, \dots, P_n; \varepsilon) = \{f \in C_\infty(\Omega) : P_i(f) < \varepsilon, (i = 1, \dots, n)\},$$

где $\varepsilon > 0$, а $\{P_1, \dots, P_n\}$ – произвольное конечное семейство полунорм из $\{P_g\}_{g \in C_0(\Omega)}$. Определенная таким образом топология будет называться β -топологией на $C_\infty(\Omega)$ и в дальнейшем алгебра $C_\infty(\Omega)$ наделенная β -топологией будет обозначаться через $C_\beta(\Omega)$. Отметим, что β -топология является *локально выпуклой топологией*.

Будем говорить, что последовательность $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset \Omega$, сходится к "бесконечности" если для любого n найдется такое k , что $x_\ell \notin K_n$, для всех $\ell > k$.

Напомним, что сеть функций $\{f_i\}_{i \in I}$ является β -сетью Коши, если

$$\lim_{i,j \in I} \|f_i g - f_j g\|_\infty = 0,$$

для любого $g \in C_0(\Omega)$. Из σ -компактности Ω , следует что каждая β -сеть Коши, является сетью Коши в равномерной топологии на каждом K_n . Поэтому всякая β -сеть Коши сходится к некоторой непрерывной функции на Ω .

Отметим, что верны следующие утверждения

- (а) $C_\beta(\Omega)$ есть β -полная локально выпуклая алгебра.
- (б) $C_0(\Omega)$ всюду плотна в $C_\beta(\Omega)$.
- (в) $C_\beta(\Omega)^* = M(\Omega)$, где $M(\Omega)$ есть пространство всех регулярных конечных борелевских мер на локально компактном пространстве Ω (см. [4]-[9]).

Заметим, что если $C_k(\Omega)$ есть пополнение $C_\infty(\Omega)$ в топологии, порожденной семейством полунорм $\{P_g\}_{g \in C_{00}(\Omega)}$, тогда $C_k(\Omega)$ – *топологическая алгебра, а пространство всех непрерывных линейных функционалов на $C_k(\Omega)$ совпадает с пространством всех конечных мер из $M(\Omega)$ у которых компактный носитель*.

Хорошо известно, что каждый линейный мультипликативный функционал на банаховой алгебре непрерывен. С другой стороны из утверждения (в) следует:

Предложение 1. *Существует линейный мультипликативный функционал $\varphi : C_\beta(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$, который в β -топологии не является непрерывным.*

Доказательство. Отметим, что если Ω -компакт, то пространство всех мультипликативных функционалов совпадает с Ω так как $M_{C(\Omega)} = \Omega$, т.е. каждый мультипликативный функционал φ есть функционал Дирака δ_{x_0} , где $x_0 \in \Omega$. Заметим, что φ имеет единственную представляющую меру на Ω , которая совпадает с атомарной мерой Дирака, сосредоточенной в точке x_0 . С другой стороны если Ω – локально компактное пространство, тогда $C_\beta(\Omega)$ изоморфно $C(\beta\Omega)$.

Пусть $x_0 \in \beta\Omega \setminus \Omega$, тогда мультипликативный функционал $\varphi : C(\beta\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$, такой, что $\varphi(f) = \hat{f}(x_0)$, является также мультипликативным функционалом на $C_\beta(\Omega)$. Так как у функционала φ существует единственная представляющая мера, сосредоточенная в точке x_0 , то в силу утверждения (в), функционал φ не является непрерывным. $\square$

Отметим, что предложение 1 можно также доказать, используя утверждение (б). Отсюда получаем, что множество всех разрывных мультипликативных функционалов на алгебре $C_\beta(\Omega)$ совпадает с “наростом” $\beta\Omega \setminus \Omega$.

Напомним, что замкнутая подалгебра $\mathcal{A}$ алгебры $C_\beta(\Omega)$ называется β -равномерной, если она содержит константы и разделяет точки множества Ω (т.е. для любых $x_1, x_2 \in \Omega$, $x_1 \neq x_2$, существует функция $f \in \mathcal{A}$, такая, что $f(x_1) \neq f(x_2)$).

Поскольку равномерная топология сильнее β -топологии, β -равномерная алгебра является замкнутой подалгеброй алгебры $C_b(\Omega)$ в $\sup$ -норме. В дальнейшем алгебру $\mathcal{A}$ наделенную равномерной топологией будем обозначать через $\mathcal{A}_\infty$, а ее пространство максимальных идеалов через $M_{\mathcal{A}_\infty}$.

Каждый мультипликативный функционал на $\mathcal{A}_\infty$ непрерывен в равномерной норме и $M_{\mathcal{A}_\infty}$ есть компактное в $*$ -слабой топологии подмножество единичного шара в $\mathcal{A}_\infty^*$ -пространстве, сопряженным к $\mathcal{A}_\infty$.

Так как $C_\beta(\Omega) = C_\beta(\Omega)_\mathbb{R} + iC_\beta(\Omega)_\mathbb{R}$, то будем говорить, что $\mathcal{A}$ есть β -равномерная алгебра Дирихле, если пространство

$$Re(\mathcal{A}) = \{Re(f) \in C_\beta(\Omega)_\mathbb{R} : f \in \mathcal{A}\}$$

всюду плотно в $C_\beta(\Omega)_\mathbb{R}$.

$\mathcal{A}$ -компактификацией Стоуна-Чеха для Ω называется замыкание в $*$ -слабой топологии пространства Ω в пространстве максимальных идеалов $M_{\mathcal{A}_\infty}$. Через $M_{\mathcal{A}}$ обозначим множество всех β -непрерывных линейных мультипликативных функционалов β -равномерной алгебры $\mathcal{A}$. Ясно, что $M_{\mathcal{A}} \subset M_{\mathcal{A}_\infty}$. Границу Шилова алгебры $\mathcal{A}_\infty$, обозначим через $\partial\mathcal{A}_\infty$, а множество $\partial\mathcal{A}_\infty \cap \Omega$ будет называться

β -границей Шилова алгебры $\mathcal{A}$ и обозначим через $\partial\mathcal{A}$, которое может быть и пустым, соответствующий пример приведен ниже.

Предложение 2. Пусть $\partial\mathcal{A}_\infty = \partial\mathcal{A}$, тогда $M_{\mathcal{A}} = M_{\mathcal{A}_\infty}$.

Доказательство. Для $\varphi \in M_{\mathcal{A}_\infty}$ существует представляющая мера μ , сосредоточенная на $\partial\mathcal{A}_\infty$. Из условия $\partial\mathcal{A}_\infty = \partial\mathcal{A} \subseteq \Omega$ следует, что мера $\mu \in M(\Omega)$, поэтому φ есть β -непрерывный функционал и поэтому, в силу утверждения (в), получаем, что $\varphi \in M_{\mathcal{A}}$.

Рассмотрим нетривиальный пример β -равномерной алгебры. Пусть $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и $H^\infty(\Delta)$ -алгебра всех ограниченных аналитических функций на Δ . Пусть сеть $\{f_i\}_{i \in I} \subset H^\infty(\Delta)$ является β -сетью Коши, тогда она сходится в β -топологии к непрерывной ограниченной на Δ функции f . Покажем, что $f \in H^\infty(\Delta)$. Для $z_0 \in \Delta$ пусть U – такая окрестность z_0 , что $\bar{U} \subset \Delta$, где $\bar{U}$ – замыкание U в $\mathbb{C}$. Тогда существует функция $g \in C_0(\Delta)$, которая равна единице на U . Из определения β -топологии имеем, что сеть $\{gf_i\}_{i \in I}$ равномерно на Δ сходится к f . Отсюда имеем, что сеть аналитических функций $\{f_i\}_{i \in I}$ равномерно на U сходится к функции gf . Но тогда f – аналитическая функция на U , а в силу произвольности точки z_0 , функция f аналитическая, ограниченная на Δ , т.е. $f \in H^\infty(\Delta)$. $\square$

В связи с проблемой короны, отметим, что β -равномерная алгебра $H^\infty(\Delta)$ не имеет короны, так как пространство β -непрерывных мультипликативных линейных функционалов данной алгебры есть Δ . Одновременно отметим, что ее β -граница Шилова $\partial H^\infty(\Delta) = \emptyset$.

Пусть $\mathcal{A}^\perp$ – пространство всех мер из $M(\Omega)$, которые ортогональны к алгебре $\mathcal{A}$. По теореме о биполяре (см. [10], стр. 160) $\mathcal{A}^{\perp\perp} = \mathcal{A}$, так как $\mathcal{A}$ замкнуто в β -топологии. Как и в [11] обозначим через M_φ множество всех представляющих мер для $\varphi \in M_{\mathcal{A}}$, то есть, множество всех вероятностных мер μ на Ω таких, что $\varphi(f) = \int_\Omega f d\mu$. Ясно, что M_φ – замкнутое, выпуклое подмножество в $M(\Omega)$.

Замкнутое подмножество E локально компактного пространства Ω будет называться *множеством пика для алгебры $\mathcal{A}$* , если существует функция $f \in \mathcal{A}$, такая, что $f(x) = 1$ для всех $x \in E$ и $|f(x)| < 1$, если $x \in \Omega \setminus E$. Множество E будет называться *p -множеством*, если оно есть пересечение множеств пика. В дальнейшем μ_E будет обозначать сужение меры $\mu \in M(\Omega)$ на множество E . Если $\mu \in \mathcal{A}^\perp$, а E – произвольное замкнутое множество в Ω , то мера μ_E не обязана принадлежать $\mathcal{A}^\perp$.

Теорема 1. Пусть E – замкнутое множество в локально компактном пространстве Ω , и E есть r -множество для β -равномерной алгебры $\mathcal{A}$ на Ω . Тогда для любой меры $\mu \in \mathcal{A}^\perp$, мера $\mu_E \in \mathcal{A}^\perp$.

Доказательство. Не нарушая общности, можно предположить, что E – множество пика для алгебры $\mathcal{A}$. Если функция f пикует на E , то $\|f\|_\infty = 1$.

Определим множество $\mathcal{E} = \{\varphi \in M_{\mathcal{A}_\infty} : \varphi(f) = 1\}$. Если отождествить точки $x \in \Omega$ с мультипликативным функционалом Дирака δ_x , $\delta_x(f) = f(x)$, то можно считать что $\Omega \subset M_{\mathcal{A}_\infty}$ и значит $E \subset \mathcal{E}$.

Рассмотрим функцию $h = \frac{1+f}{2}$, тогда $\varphi(h) = 1$ для всех $\varphi \in \mathcal{E}$, и $|\varphi(h)| < 1$ для $\varphi \in M_{\mathcal{A}_\infty} \setminus \mathcal{E}$. Поэтому преобразование Гельфанда $\hat{h}$ функции h имеет пик на множество $\mathcal{E}$. В силу теоремы Гликсберга о множествах пика (см. [11]) мера $\mu_\varepsilon \in \mathcal{A}_\infty^\perp$, для любой меры $\mu \in \mathcal{A}_\infty^\perp$. Ввиду того, что

$$\mathcal{A}^\perp = \{\mu \in \mathcal{A}_\infty^\perp : \text{supp}(\mu) = \Omega\}$$

и $\mathcal{E} \cap \Omega = E$, то для любой меры $\mu \in \mathcal{A}^\perp$ имеем, что $\mu_E \in \mathcal{A}^\perp$. $\square$

Заметим, что если E есть r -множество, то сужение $\mathcal{A}$ на E замкнуто в равномерной норме. Из теоремы 1 следует, что если $E_1, \dots, E_n$ есть конечное семейство r -множеств для алгебры $\mathcal{A}$, то $E = \bigcup_{k=1}^n E_k$ также будет r -множеством для алгебры $\mathcal{A}$.

Теорема 2. Следующие условия эквивалентны

- (а) $\mathcal{A}$ -алгебра Дирихле.
- (б) Единственная вещественная конечная борелевская мера на Ω , ортогональная к β -равномерной алгебре $\mathcal{A}$, есть нулевая мера.

Доказательство. (а) $\Rightarrow$ (б). Допустим противное. Пусть μ есть вещественная мера, ортогональная к $\text{Re}(\mathcal{A})$. Тогда $\text{Re}(\mathcal{A})$ содержится в пространстве $C_\mu(\Omega) = \{f \in C_\beta(\Omega)_\mathbb{R} : f \perp \mu\}$. Так как $C_\mu(\Omega)^\perp = \mathbb{C}\mu$ и $(\mathbb{C}\mu)^\perp = C_\mu(\Omega)$, то $C_\mu(\Omega)$ есть β -замкнутое подпространство в $C_\mathbb{R}(\Omega)$, содержащее $\text{Re}(\mathcal{A})$, что есть противоречие. (б) $\Rightarrow$ (а). Пусть $\mathcal{A}$ не есть алгебра Дирихле. Тогда β -замыкание $\text{Re}(\mathcal{A})$ есть замкнутое подпространство в $C_\beta(\Omega)_\mathbb{R}$. Поэтому найдется ненулевая конечная борелевская вещественная мера μ на Ω , ортогональная к $\text{Re}(\mathcal{A})$. Так как $\mathcal{A}$ есть подпространство в $\text{Re}(\mathcal{A}) + i\text{Re}(\mathcal{A})$ и эта мера ортогональна к $\text{Re}(\mathcal{A}) + i\text{Re}(\mathcal{A})$, то она ортогональна к $\mathcal{A}$, а это есть противоречие. $\square$

Напомним, что если $\mathcal{A}_\infty$ – равномерная алгебра на компакте Ω , то она называется максимальной ($\mathcal{A}_\infty \neq C(\Omega)$), если из того, что $\mathcal{B}$ – равномерная алгебра и $\mathcal{A}_\infty \subset \mathcal{B} \subsetneq C(\Omega)$ следует, что $\mathcal{A}_\infty = \mathcal{B}$.

Аналогично β -равномерная алгебра $\mathcal{A}$ на локально компактном пространстве Ω будет называться *максимальной*, если $\mathcal{A} \neq C_\beta(\Omega)$ и не существует β -равномерной алгебры, заключенной строго между $\mathcal{A}$ и $C_\beta(\Omega)$.

Заметим, что из максимальности β -равномерной алгебры $\mathcal{A}$ не следует, что соответствующая равномерная алгебра $\mathcal{A}_\infty$ максимальна в $C_b(\Omega)$.

Отметим, что если F – замкнутое подмножество в Ω , то F и $Y = \Omega \setminus F$ являются локально компактными множествами в индуцированной топологии Ω .

Обозначим через $\mathcal{A}_Y$ (соответственно $\mathcal{A}_F$) замыкание в $C_\beta(Y)$ (соответственно в $C_\beta(F)$) сужения β -равномерной алгебры $\mathcal{A}$ на Y (соответственно F). Ясно, что $\mathcal{A}_Y$ и $\mathcal{A}_F$ есть β -равномерные алгебры на Y и F соответственно.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{A}$ есть β -равномерная алгебра Дирихле, $\mathcal{A} \neq C_\beta(\Omega)$, где Ω – локально компактное пространство, а F есть r -множество для $\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A}_Y$, $\mathcal{A}_F$ являются алгебрами Дирихле соответственно на Y и F . Если при этом $\mathcal{A}_F = C_\beta(F)$, то $\mathcal{A}_Y$ есть собственная подалгебра алгебры $C_\beta(Y)$.

Доказательство. Пусть μ есть вещественная конечная борелевская мера, ортогональная к $\mathcal{A}_Y$ ($\mathcal{A}_F$), тогда она ортогональна и к алгебре $\mathcal{A}$, а поэтому, $\mu = 0$ и значит алгебры $\mathcal{A}_Y$ и $\mathcal{A}_F$ есть алгебры Дирихле.

Пусть $\mathcal{A}_F = C_\beta(F)$, тогда $\mu_F = 0$ для любой меры $\mu \in \mathcal{A}^\perp$. Откуда для любого $f \in \mathcal{A}$ имеем

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_Y f d\mu = 0,$$

т.е. $\mu \in \mathcal{A}_Y^\perp$. Так как $\mathcal{A} \neq C_\beta(\Omega)$, то множество $\mathcal{A}^\perp$ нетривиально и следовательно $\mathcal{A}_Y^\perp$ не тривиальное подпространство в $M(Y)$ и поэтому $\mathcal{A}_Y \neq C_\beta(Y)$. $\square$

Заметим, что для β -равномерных алгебр Дирихле $\mathcal{A}$ могут выполняться сразу два условия $\mathcal{A}_F \neq C_\beta(F)$ и $\mathcal{A}_Y \neq C_\beta(Y)$. Однако для максимальных алгебр ситуация несколько иная.

Теорема 4. Пусть $\mathcal{A}$ – максимальная β -равномерная алгебра на локально компактном пространстве Ω , а F есть r -множество. Тогда либо $\mathcal{A}_Y$ есть максимальная β -равномерная алгебра на Y , и $\mathcal{A}_F = C_\beta(F)$ ($Y = \Omega \setminus F$), либо $\mathcal{A}_F$ есть максимальная β -равномерная алгебра на F , и $\mathcal{A}_Y = C_\beta(Y)$.

Доказательство. Не ограничивая общности будем считать, что F – множество пика для алгебры $\mathcal{A}$. Пусть h есть пикующая на множестве F функция из алгебры $\mathcal{A}$. Тогда последовательность $\{e_n = 1 - h^n; n = 1, 2, \dots\}$ есть аппроксимативная единица в идеале $J_F = \{f \in \mathcal{A} : f|_F = 0\}$. Предположим, что $\mathcal{A}_F = C_\beta(F)$. В таком случае, для любой меры $\mathcal{A}^\perp$, имеем, что $\mu_F = 0$, т.е. для любой функции

$f \in C_\beta(\Omega)$, выполняется равенство

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_Y f d\mu.$$

Пусть $\mathcal{A}_Y$ не является максимальной β -равномерной алгеброй на Y . Тогда существует β -равномерная алгебра $\mathcal{B}$ на Y такая, что

$$\mathcal{A}_Y \subsetneq \mathcal{B} \subsetneq C_\beta(Y).$$

Отсюда имеем, что

$$\{0\} \neq \mathcal{B}^\perp \subsetneq \mathcal{A}_Y^\perp \subsetneq M(Y).$$

Так как $\mathcal{B}$ – алгебра, то имеем, что для любой функции $f \in \mathcal{B}$ и меры $\mu \in \mathcal{B}^\perp$, произведение $f\mu \in \mathcal{B}^\perp$. Для любого $f \in \mathcal{B}$, функции fe_n непрерывны на Ω и, следовательно, принадлежат алгебре $C_\beta(\Omega)$. Пусть μ – нетривиальная мера из $\mathcal{B}^\perp$, тогда

$$\int_{\Omega} fe_n d\mu = \int_Y fe_n d\mu = 0,$$

для любого $f \in \mathcal{B}$.

Рассмотрим β -равномерную алгебру $\check{\mathcal{B}}$, порожденную функциями из $\mathcal{A}$ и функциями вида fe_n , где $f \in \mathcal{B}$ ($n \in \mathbb{N}$). Из вышесказанного следует, что $\check{\mathcal{B}} \subsetneq C_\beta(\Omega)$. Из максимальной $\mathcal{A}$ следует, что $\mathcal{A} = \check{\mathcal{B}}$, откуда имеем, что $fe_n \in \mathcal{A}$ для любого $f \in \mathcal{B}$ и $n \in \mathbb{N}$. При $n \rightarrow \infty$ последовательность $\{fe_n\}_{n=1}^\infty$ сходится в $C_\beta(Y)$ к функции f . Отсюда следует, что $f \in \mathcal{A}_Y$, т.е. $\mathcal{B} = \mathcal{A}_Y$. Полученное противоречие показывает, что $\mathcal{A}_Y$ -максимальная алгебра.

Пусть $\mathcal{A}_F \neq C_\beta(F)$. Тогда $\mathcal{A}_F^\perp = (J_F + \mathcal{A})^\perp \neq \{0\}$, где $J_F = \{f \in C_\beta(\Omega) : f|_F = 0\}$.

Так как $J_F + \mathcal{A}$ – алгебра и существует нетривиальная мера на F , ортогональная к алгебре $J_F + \mathcal{A}$, то замыкание $J_F + \mathcal{A}$ в алгебре $C_\beta(\Omega)$ будет β -равномерной алгеброй, строго содержащейся в $C_\beta(\Omega)$. Из максимальной $\mathcal{A}$ следует, что замыкание $J_F + \mathcal{A}$ совпадает с $\mathcal{A}$. Так как $\mathcal{A} = \mathcal{A} + J_F$, то J_F есть подалгебра алгебры $\mathcal{A}$. Отметим, что J_F плотно в $C_\beta(Y)$, поэтому $\mathcal{A}_Y = C_\beta(Y)$. Теперь убедимся в том, что $\mathcal{A}_F$ есть β -равномерная максимальная подалгебра в алгебре $C_\beta(F)$. Пусть это не так, т.е. существует β -равномерная алгебра $\mathcal{B}$ на F такая, что, что

$$\mathcal{A}_F \subsetneq \mathcal{B} \subsetneq C_\beta(F).$$

Продолжим каждую функцию $f \in \mathcal{B}$ до непрерывной функции $\check{f}$ на Ω . Множество таких продолжений обозначим через $\check{\mathcal{B}}$, тогда $J_F + \check{\mathcal{B}}$ есть алгебра, содержащая алгебру $\mathcal{A}$. Из условия $\mathcal{A}_F \subsetneq \mathcal{B} \subsetneq C_\beta(F)$ следует, что $\mathcal{A} \subsetneq J_F + \check{\mathcal{B}} \subsetneq C_\beta(\Omega)$. Так как $(J_F + \check{\mathcal{B}})^\perp = \mathcal{B}_F^\perp$, то замыкание $J_F + \check{\mathcal{B}}$ в алгебре $C_\beta(\Omega)$ не совпадает с

$C_\beta(\Omega)$. Поскольку $\mathcal{A}$ есть максимальная β -равномерная алгебра, то $\mathcal{A} = J_F + \check{\mathcal{B}}$ и значит $\mathcal{A}_F = \mathcal{B}$. Получили противоречие. Теорема 4 доказана. $\square$

Ниже предлагается метод построения максимальной β -равномерной алгебры (теорема 5) с помощью максимальной равномерной алгебры.

Напомним, что если $\mathcal{A}$ -равномерная алгебра на метризуемом компакте X , то множество пика E в X , для которого сужение $\mathcal{A}|_E = C(E)$, называется *интерполяционным множеством пика для алгебры $\mathcal{A}$* . Так как E – интерполяционное множество пика для алгебры $\mathcal{A}$, то в силу теоремы 2 $\mu_E = 0$ для всех $\mu \in \mathcal{A}^\perp$.

Пусть $\Omega = X \setminus E$ и $\mathcal{A}_0$ есть замыкание сужения $\mathcal{A}|_\Omega$ в $C_\beta(\Omega)$. Так как для любой меры $\mu \in \mathcal{A}^\perp$ имеем, что $\mu_E = 0$, то можно считать, что $\mathcal{A}^\perp$ есть подпространство в $M(\Omega)$. Так как $\mathcal{A}|_\Omega \subset \mathcal{A}_0$, то $\mathcal{A}_0^\perp \subset (\mathcal{A}|_\Omega)^\perp = \mathcal{A}^\perp$. С другой стороны, если $\mu \in \mathcal{A}^\perp$ и сеть функций $\{f_j\}_{j \in J}$ из $\mathcal{A}|_\Omega$ β -сходится к f_0 , то из равенства $P_g(f_j - f_0) = P_g(\bar{f}_j - \bar{f}_0)$ следует, что

$$\lim_J \int_\Omega (g(f_j - \bar{f}_0)) g^{-1} d\mu = 0,$$

где g – такая функция из $C_0(\Omega)$, что $g^{-1}\mu \in M(\Omega)$. Отсюда $\int_\Omega \bar{f}_0 d\mu = 0$, т.е.

$\mathcal{A}^\perp \subset (\mathcal{A}|_\Omega)^\perp$ и значит $\mathcal{A}_0^\perp = \mathcal{A}^\perp$.

Теорема 5. *Если $\mathcal{A}$ – равномерная максимальная алгебра на X , то алгебра $\mathcal{A}_0$ есть β -равномерная максимальная алгебра на Ω .*

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ есть β -равномерная алгебра на Ω , содержащая алгебру $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{B} \neq C_\beta(\Omega)$.

Рассмотрим семейство функций $\{e_n\}_{n=1}^\infty$, где $e_n(x) = 1 - h(x)^n \in \mathcal{A}$, порождена функцией $h \in \mathcal{A}$, которая имеет пик на E , т.е. $h(x) \equiv 1$ на E и $|h(x)| < 1$, если $x \in \Omega \setminus E$. Это семейство является ограниченной аппроксимативной единицей для алгебры $C_0(\Omega)$. Поэтому семейство $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ есть аппроксимативная единица (в β -топологии) и для алгебры $\mathcal{A}_0$. В самом деле, для любой функции $g \in C_0(\Omega)$ и $f \in \mathcal{A}_0$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_g(e_n f - f) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_g(h^n f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_\Omega |gh^n f| = 0.$$

Отсюда, $e_n f \rightarrow f$ в β -топологии. Так как $\mathcal{A}_0^\perp = \mathcal{A}^\perp$ и $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \neq C_\beta(\Omega)$, то пространство мер $\mathcal{B}^\perp$ есть нетривиальное подпространство в $\mathcal{A}^\perp$. Пусть μ есть нетривиальная мера из $\mathcal{B}^\perp$. Убедимся в том, что $e_n f \in \mathcal{A}$ для любого f . Так как e_n – непрерывная функция на X , равная нулю на E , а f – непрерывная и ограниченная функция на $\Omega \setminus E$, то $e_n f$ – непрерывные функции на X . Ввиду того, что $\mathcal{A}_0 \mathcal{B} \subset \mathcal{B}$, то нетривиальная мера μ ортогональна к равномерной алгебре на X ,

порожденной функциями из $\mathcal{A}$ и функциями $e_n f$. Из максимальной алгебры $\mathcal{A}$ следует, что $e_n f \in \mathcal{A}$. Отсюда получаем, что $e_n f \in \mathcal{A}_0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Используя тот факт, что в β -топологии $e_n f \rightarrow f$, получим $f \in \mathcal{A}$. Отсюда следует, что $\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}$. Теорема доказана. $\square$

Можно, аналогично убедиться в том, что если $\mathcal{A}$ равномерная алгебра Дирихле, то $\mathcal{A}_0$ есть β -равномерная алгебра Дирихле.

Теперь исходя из вышеуказанных результатов, обсудим известную теорему Бишоп-Шилова об антисимметричном разбиении для β -равномерных алгебр, которая ранее была доказана И. Гликсбергом в работе [12].

Пусть $\mathcal{A}$ есть β -равномерная алгебра на локально компактном пространстве Ω . Замкнутое подмножество E множества Ω называется *множеством антисимметрии для β -равномерной алгебры $\mathcal{A}$* , если алгебра $\mathcal{A}|_E$ не содержит вещественных функций отличных от постоянной. Множество антисимметрии алгебры $\mathcal{A}$ можно упорядочить по вложению, образуя частично упорядоченное множество. Максимальные элементы это множества называются максимальными множествами антисимметрии алгебры $\mathcal{A}$. Поэтому, каждое множество антисимметрии алгебры $\mathcal{A}$ содержится в некотором максимальном множестве антисимметрии.

Теорема 6 (И. Гликсберг). *Пусть $\mathcal{A}$ есть β -равномерная алгебра на локально компактном пространстве Ω . Тогда*

- а) *каждое максимальное множество антисимметрии является p -множеством для алгебры $\mathcal{A}$;*
- б) *все максимальные множества антисимметрии попарно не пересекаются, и их объединение есть Ω .*

Доказательство. Пусть Ω_0 есть $\mathcal{A}$ -компактификация Стоуна-Чеха. Тогда множество Ω всюду плотно в компакте Ω_0 и каждая функция из $\mathcal{A}$ однозначно расширяется до функции на Ω_0 . Это расширение порождает такую алгебру $\mathcal{A}_0$ на Ω_0 , что сужение $\mathcal{A}_0$ на Ω совпадает с $\mathcal{A}$. По теореме Бишоп-Шилова об антисимметричном разбиении для равномерных алгебр, множество Ω_0 представляются в виде объединения $\Omega_0 = \bigcup_{i \in I} F_i$, где $\{F_i\}_{i \in I}$ есть попарно непересекающиеся максимальные множества антисимметрии для алгебры $\mathcal{A}_0$, которые есть p -множества. Тогда множества $E_i = F_i \cap \Omega$, попарно не пересекаются, их объединение есть Ω , и они являются максимальными и p -множествами для β -равномерной алгебры $\mathcal{A}$. Теорема доказана. $\square$

Отсюда как следствие имеет место

Теорема 7. Пусть $\{E_i\}_{i \in I}$ – разбиение локально компактного пространства Ω на максимальные множества антисимметрии для β -равномерной алгебры $\mathcal{A}$. Пусть функция $f \in C_\beta(\Omega)$ такая, что ее сужение на каждое множество E_i принадлежит $\mathcal{A}|_{E_i}$. Тогда $f \in \mathcal{A}$.

Замечание. Отметим, что исследования проведенные в данной работе и в работах [8], [9] можно продолжить в направлении замены условия локальной компактности в Ω условием вполне регулярности, где вместо идеала $C_0(\Omega)$ естественно рассмотреть идеал $B_0(\Omega)$ всех ограниченных комплекснозначных функций на Ω , которые обращаются в нуль на “бесконечности”, поскольку в этом случае запас полунорм порожденных идеалом $C_0(\Omega)$ может оказаться тривиальным.

Abstract. The paper studies the properties of β -uniform Dirichlet algebras and maximal β -uniform algebras. A method is given for construction of a β -uniform Dirichlet algebra and a maximal β -uniform algebra by means of a uniform Dirichlet algebra and a maximal uniform algebra respectively. As a consequence, an analog of the Bishop-Shilov theorem on antisymmetric partition is obtained.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шиллов, Коммутативные Нормированные Кольца, Госуд. изд. физ.-мат. лит., Москва (1960).
- [2] М. А. Наймарк, Нормированные Кольца, Наука, Москва (1968).
- [3] А. В. Архангельский, В. И. Пономарев, Основы Общей Топологии в Задачах и Упражнениях, Наука (1974).
- [4] R. C. Buck, “Bounded continuous functions on a locally compact space”, Michigan, Math. J., **5**, 95 – 104 (1958).
- [5] R. Giles, “A generalization of the strict topology”, Trans. of the Amer. Math. Soc., **161**, 467 – 474 (1971).
- [6] F. D. Sentiiles, “Bounded continuous functions on a completely regular space”, Trans. of the Amer. Math. Soc., **168**, 311 – 336 (1972).
- [7] J. B. Conway, “The strict topology and compactness in the space of measures”, Bull. Amer. Math. Soc., **72**, 75 – 78 (1966).
- [8] M. I. Karakhanyan, T. A. Khor’kova, “A characterization of the algebra $C_\beta(\Omega)$ ”, Functional Anal. and its Applic., **13** (1), 69 – 71 (2009).
- [9] M. I. Karakhanyan, T. A. Khor’kova, “A characteristic property of the algebra $C(\Omega)_\beta$ ”, Siberian Math. J., **50** (1), 77 – 85 (2009).
- [10] Х. Шефер, Топологические Векторные Пространства, Мир, Москва (1971).
- [11] T. W. Gamelin, Uniform Algebras, PRENTICE-HALL, INC, Englewood Cliffs, N.J. (1969).
- [12] I. Glikhsberg, “Bishops generalized Stone-Weierstrass theorem for the strict topology”, Proc. Amer. Math. Soc., **14**, 329 – 333 (1963).

Поступила 21 апреля 2010