

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЧАСТИЧНО ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

В. Н. МАРГАРЯН

Российско-армянский государственный университет

Аннотация. Для одного класса регулярных, частично гипоеллиптических, относительно плоскости $x_1 = 0$ уравнений, рассматриваемых в достаточно широкой полосе, выделено множество гладких решений.

MSC2010 number: 12E10.

Ключевые слова: частично гипоеллиптический оператор; регулярный оператор; весовые пространства Соболева; теоремы вложения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Будем пользоваться следующими обозначениями: N - множество натуральных чисел $N_0 = N \cup \{0\}$, N_0^n - множество n - мерных мультииндексов, E^n , R^n - n -мерные вещественные евклидовы пространства точек

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv (x_1, x^1), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \equiv (\xi_1, \xi^1) \quad \text{и}$$

$$R_+^n = \{\xi \in R^n, \xi_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}.$$

Для $\xi \in R^n$, $\nu \in R_+^n$ и $\alpha \in N_0^n$ обозначим

$$|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}, |\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_n, \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n},$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, \quad \text{где} \quad D_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \quad \text{либо} \quad D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (j = 1, \dots, n, i^2 = -1).$$

Пусть $A \subset N_0^n$ конечный набор мультииндексов. Многогранником Ньютона набора A называется минимальный выпуклый многогранник $\mathfrak{R}(A) \subset R_+^n$ содержащий множество $A \cup \{0\}$. Многогранник $\mathfrak{R} \subset R_+^n$ с вершинами из N_0^n называется полным (см. [1]), если $\mathfrak{R}$ имеет вершину в начале координат и отличные от начала координат вершину на каждой оси координат N_0^n . Полный многогранник $\mathfrak{R}$ называется правильным (вполне правильным) (см. [2] и [3]), если координаты внешних (относительно $\mathfrak{R}$) нормалей не координатных граней $\mathfrak{R}$ неотрицательны (положительны).

Пусть

$$P(D) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} D^{\alpha}$$

- линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами а

$$P(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$$

его полный символ, где сумма распространяется по конечному набору $(P) = \{\alpha \in N_0^n : \gamma_{\alpha} \neq 0\}$. Многогранник Ньютона набора (P) называется характеристическим многогранником оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$).

Определение 1. (см. [4], определение 11.1.2). Оператор $P(D)$ называется гипоеллиптическим, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий

- (1) Любое обобщенное решение уравнения $P(D)u = 0$ в Ω ($\Omega \subset E^n$ область) является бесконечно дифференцируемой функцией.
- (2) $P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi) \equiv D^{\alpha}P(\xi)/P(\xi) \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Определение 2. (см. [5] или [4], определение 11.2.4). Оператор $P(D) = P(D_1, \dots, D_n)$ называется частично гипоеллиптическим относительно ξ_1 (плоскости $x_1 = 0$), если выполняется одно из следующих эквивалентных условий

- (1) $P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi_1 \rightarrow \infty$, когда $|\xi^1|$ остается ограниченным,
- (2) если представить многочлен $P(\xi)$ в виде

$$P(\xi) = \sum_{\alpha^1 \in N_0^{n-1}} (\xi^1)^{\alpha^1} P_{\alpha^1}(\xi_1), \quad \text{где} \quad (P_{\alpha^1}(\xi_1) = (D^{\alpha^1} P)(\xi_1, 0^1)/\alpha^1!),$$

то $P_{\alpha^1}(\xi_1)/P_0(\xi_1) \rightarrow 0$ при $\xi_1 \rightarrow \infty$, $\alpha^1 \neq 0$, (поскольку любой ненулевой многочлен от одного переменного гипоеллиптичен).

Очевидно условие 2 равносильно условию $\text{ord} P_{\alpha^1} < \text{ord} P_0$ при $|\alpha^1| \neq 0$.

Определение 3. (см. [6]). Оператор $P(D)$ называется почти гипоеллиптическим, если существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$\sum_{\alpha} |P^{(\alpha)}(\xi)| \leq c(1 + |P(\xi)|) \quad \forall \xi \in R^n.$$

Известно, что многогранник Ньютона гипоеллиптического оператора вполне правильный (см. например [2] или [3]), а многогранник Ньютона почти гипоеллиптического оператора - правильный (см. [6] или [7]).

В работе [5] доказана бесконечная дифференцируемость решений частично гипоеллиптических уравнений, если априори предполагать их бесконечную дифференцируемость по определенным переменным.

В течение всей работы будем считать, что натуральные четные числа m_1, m_2 и рациональное число $a > 0$ выбраны так, чтобы $m_1 - am_2$ - четное натуральное число. Обозначим через

$$(1.1) \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(m_1, m_2, a) = \{\nu, \nu \in R_+^n, |\nu^1| \leq m_2, \nu_1 + a|\nu^1| \leq m_1\}.$$

Для многогранника $\mathfrak{R}$ с вершинами из N_0^n через $\mathfrak{R}^1$ обозначим множество тех мультииндексов $\alpha \in \mathfrak{R} \cap N_0^n$ для которых существует мультииндекс $\beta^1 \in N_0^{n-1}$, $|\beta^1| = 1$ такое, что $\alpha + (0, \beta^1) \notin \mathfrak{R}$. Не трудно заметить, что тогда выпуклая оболочка множества $\mathfrak{R}^1 \cup \{0\}$ совпадает с $\mathfrak{R}$.

Пусть для $b \in R^1$, $[b]$ - целая часть числа b , $[b]' = [b] = b$, если b целое и $[b]' = [b] + 1$ в противном случае.

Для $\nu \in N_0^n$ обозначим

$$(1.2) \quad d(\nu) = |\nu^1| + \max \left\{ \left[\frac{\nu_1 - (m_1 - am_2)}{a} \right]', 0 \right\}.$$

В дальнейшем запись $\alpha \in \mathfrak{R}$ будет означать, что $\alpha \in \mathfrak{R} \cap N_0^n$.

Пусть линейный дифференциальный оператор $P(D)$ с постоянными коэффициентами, характеристический многогранник которого имеет вид (1.1), регулярен, т.е. с некоторой постоянной $c > 0$

$$(1.3) \quad \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} |\xi^\alpha| \leq c(1 + |P(\xi)|) \quad \forall \xi \in R^n.$$

Тогда не трудно заметить, что $\text{ord}_{\xi_1} P \equiv \max\{\alpha_1, \alpha \in \mathfrak{R}\} = m_1$,

$\text{ord}_{\xi_j} P = m_2 \quad j = 2, \dots, n$ и с некоторой постоянной $c_1 > 0$

$$(1.4) \quad |D_1^k P(\xi)| \leq c_1 \left(\sum_{(\alpha_1+k, \alpha^1) \in \mathfrak{R}} |\xi^\alpha| + 1 \right), \quad \forall \xi \in R^n, k = 0, 1, \dots$$

Из теоремы 11.2.3 работы [4] следует, что оператор $P(D)$ удовлетворяющий оценкам (1.3) и (1.4) является частично гипоеллиптическим относительно плоскости $x_1 = 0$, а из теоремы 3 работы [6] следует, что $P(D)$ почти гипоеллиптический оператор.

Цель настоящей работы доказать, что при достаточно больших χ

$$N(P, \chi) \equiv \{u, \sum_{j=0}^{m_1} \|D_1^j u\|_{L_2(\Omega_\chi)} < \infty, P(D)u = 0\} \subset C^\infty(\Omega_\chi),$$

где $\Omega_\chi = \{x = (x_1, x^1) \in E^n, |x^1| < \chi, x_1 \in E^1\}$.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{R}$ многогранник вида (1.1). Тогда функция $d(\cdot)$ определенная по формуле (1.2) удовлетворяет следующим условиям:

- (1) $d(\alpha \pm (0, \beta^1)) = d(\alpha) \pm |\beta^1| \quad \forall \alpha \in \mathfrak{R}$,
- (2) $d(\alpha) \leq m_2 \quad \forall \alpha \in \mathfrak{R}$,
- (3) для любых $\alpha \in \mathfrak{R}$ и $\beta^1 \leq \alpha^1 \quad d(\alpha - (0, \beta^1)) \leq m_2 - |\beta^1|$,
- (4) для любых $\alpha \in \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{R}^1$ и $j : 2 \leq j \leq n$ существует $\beta_j = \beta_j(\alpha) \in N$ такое, что

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_j + \beta_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n) \in \mathfrak{R}^1,$$

где $\mathfrak{R}^1$ по $\mathfrak{R}$ определяется также как на предыдущей странице.

- (5) $d(\alpha) = m_2$ при всех $\alpha \in \mathfrak{R}^1$.

Доказательство. первого пункта непосредственно следует из определения $d(\alpha)$. Докажем пункт 2). При $\alpha_1 \leq m_1 - am_2$ утверждение пункта 2) непосредственно следует из определений многогранника $\mathfrak{R}$ и числа $d(\alpha)$. Пусть поэтому $\alpha \in \mathfrak{R}$ $\alpha_1 > m_1 - am_2$. Если $(\alpha_1 - m_1 + am_2)/a$ - целое, то $\alpha_1 + a|\alpha^1| \leq m_1$ (по определению $\mathfrak{R}$), и следовательно

$$d(\alpha) = |\alpha^1| + \frac{\alpha_1 - m_1}{a} + m_2 \leq m_2.$$

Если при $\alpha \in \mathfrak{R}$, $\alpha_1 > m_1 - am_2$ и $(\alpha_1 - m_1 + am_2)/a$ - не целое тогда, т.к. при любых $m \in N_0$ и $0 < b \notin N_0 \quad [b]' = m - [m - b]$, то

$$\begin{aligned} d(\alpha) &= |\alpha^1| + m_2 - |\alpha^1| - [m_2 - |\alpha^1| - \frac{\alpha_1 - m_1 + am_2}{a}] = \\ &= m_2 - \left[\frac{m_1 - a|\alpha^1| - \alpha_1}{a} \right] \leq m_2. \end{aligned}$$

Этим утверждение пункта 2) доказано. Утверждение пункта 3) непосредственно следует из предыдущих пунктов. Докажем пункт 4). Мы будем доказывать более сильное утверждение, а именно, что для любых $\alpha \in \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{R}^1$ и $\beta^1 \in N_0^{n-1}$, $|\beta^1| = l(\alpha)$ имеем $\alpha + (0, \beta^1) \in \mathfrak{R}^1$, где

$$l(\alpha) = \begin{cases} m_2 - |\alpha^1| & \text{при } \alpha_1 \leq m_1 - am_2 \\ \left[\frac{m_1 - \alpha_1 - a|\alpha^1|}{a} \right] & \text{при } \alpha_1 > m_1 - am_2. \end{cases}$$

Пусть $\alpha \in \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{R}^1$. Если $\alpha_1 \leq m_1 - am_2$, то из определений $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}^1$ имеем, что $m_2 - |\alpha^1| > 0$. Следовательно $l(\alpha) \in N$ и для любого $\beta^1 \in N_0^{n-1}$, $|\beta^1| = l(\alpha) (\leq m_2)$

$$|\alpha^1| + |\beta^1| = m_2$$

$$\alpha_1 + a(|\alpha^1| + |\beta^1|) \leq m_1 - am_2 + am_2 = m_1,$$

т.е. $\alpha + (0, \beta^1) \in \mathfrak{R}$. Т.к., очевидно, для любого $\nu^1 \in N_0^{n-1}$, $|\nu^1| > l(\alpha)$ $|\alpha^1| + |\nu^1| > m_2$, то это означает, что $\alpha + (0, \beta^1) \in \mathfrak{R}^1$ для любого $\beta^1 \in N_0^{n-1}$, $|\beta^1| = l(\alpha)$.

Пусть теперь $\alpha \in \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{R}^1$ и $\alpha_1 > m_1 - am_2$. Тогда, очевидно, в силу определения $\mathfrak{R}$ $|\alpha^1| < m_2$ и $\alpha_1 + a(|\alpha^1| + 1) \leq m_1$ ($\alpha \in \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{R}^1$). Следовательно $l(\alpha) \in N$. Покажем, что для любого $\beta^1 \in N_0^{n-1}$ длины $l(\alpha)$ $\alpha + (0, \beta^1) \in \mathfrak{R}^1$. На самом деле, т.к.

$$\begin{aligned} |\alpha^1| + |\beta^1| &= |\alpha^1| + \left\lceil \frac{m_1 - \alpha_1 - a|\alpha^1|}{a} \right\rceil \leq \\ &\leq |\alpha^1| + \left\lceil \frac{m_1 - (m_1 - am_2) - a|\alpha^1|}{a} \right\rceil = m_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + a(|\alpha^1| + |\beta^1|) &= \alpha_1 + a(|\alpha^1| + \left\lceil \frac{m_1 - \alpha_1 - a|\alpha^1|}{a} \right\rceil) = \\ &= \alpha_1 + a(|\alpha^1| + \left\lceil \frac{m_1 - \alpha_1}{a} \right\rceil - |\alpha^1|) \leq \alpha_1 + a \frac{m_1 - \alpha_1}{a} = m_1, \end{aligned}$$

то $\alpha + (0, \beta^1) \in \mathfrak{R}$ для любого $\beta^1 \in N_0^{n-1}$, $|\beta^1| = l(\alpha)$. С другой стороны, т.к. для любого $\nu^1 \in N_0^{n-1}$ $|\nu^1| = l(\alpha) + 1$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + a(|\alpha^1| + |\nu^1|) &= \alpha_1 + a(|\alpha^1| + \left\lceil \frac{m_1 - \alpha_1 - a|\alpha^1|}{a} \right\rceil + 1) = \\ &= \alpha_1 + a(|\alpha^1| + \left\lceil \frac{m_1 - \alpha_1}{a} \right\rceil - |\alpha^1| + 1) > \alpha_1 + a \frac{m_1 - \alpha_1}{a} = m_1, \end{aligned}$$

т.е. при любом $\nu^1 \in N_0^{n-1}$, $|\nu^1| = l(\alpha) + 1$ $\alpha + (0, \nu^1) \notin \mathfrak{R}$, то это означает, что $\alpha + (0, \beta^1) \in \mathfrak{R}^1$ для любого $\beta^1 \in N_0^{n-1}$, $|\beta^1| = l(\alpha)$. Этим утверждение пункта 4) доказано.

Докажем утверждение пункта 5). Сначала заметим, что

$$\mathfrak{R}^1 = \{\alpha \in \mathfrak{R}, |\alpha^1| = m_2, 0 \leq \alpha_1 \leq m_1 - am_2\} \cup$$

$$\cup \{\alpha \in \mathfrak{R}, \alpha_1 > m_1 - am_2, \alpha_1 + a|\alpha^1| \leq m_1 < \alpha_1 + a(|\alpha^1| + 1)\} \equiv \mathfrak{R}_1^1 \cup \mathfrak{R}_2^1.$$

Так как утверждение пункта 5) для $\alpha \in \mathfrak{R}_1^1$ очевидно, то утверждения пункта 5) докажем для $\alpha \in \mathfrak{R}_2^1$. При $\alpha \in \mathfrak{R}_2^1$ (очевидно) $[(m_1 - \alpha_1 - a|\alpha^1|)/a] = 0$ и по этому

$$\begin{aligned} d(\alpha) &= |\alpha^1| + \max\left\{\left\lceil \frac{\alpha_1 - (m_1 - am_2)}{a} \right\rceil', 0\right\} = |\alpha^1| + \left\lceil \frac{\alpha_1 - (m_1 - am_2)}{a} \right\rceil' = \\ &= |\alpha^1| + m_2 - |\alpha^1| - \left\lceil m_2 - |\alpha^1| - \frac{\alpha_1 - m_1 + am_2}{a} \right\rceil = \\ &= m_2 - \left\lceil \frac{m_1 - \alpha_1 - a|\alpha^1|}{a} \right\rceil = m_2. \end{aligned}$$

Этим утверждение пункта 5) и тем самым леммы 1 доказано. $\square$

Замечание 1. Из пункта 4) леммы 1 следует, что для любых $\alpha \in \mathfrak{R}$ и $j \in N, 2 \leq j \leq n$ существует $\beta_j = \beta_j(\alpha) \in N_0$ для которого

$$\beta(\alpha, j) \equiv (\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \beta_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n) \in \mathfrak{R}^1.$$

Пусть для $\chi > 0$

$$g_\chi(x^1) = g\left(\frac{x^1}{\chi}\right) = g\left(\frac{x_2}{\chi}, \dots, \frac{x_n}{\chi}\right),$$

где $g(x^1) = 1 - |x^1|^2$ при $|x^1| \leq 1$ и $g(x^1) = 0$ при $|x^1| > 1$.

Лемма 2. Для любых $\alpha \in \mathfrak{R}$ и $j \in N, 2 \leq j \leq n$ существуют число $\chi_0 > 0$ и постоянная $c = c(\chi_0, \mathfrak{R}) > 0$ такая, что при $\chi > \chi_0$

$$(2.1) \quad \begin{aligned} & \| (D^\alpha \varphi) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \leq c \{ \| (D^{\alpha^{(j)}} \varphi) g_\chi^{d(\alpha^{(j)})} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \\ & + \| (D^{\beta(\alpha, j)} \varphi) g_\chi^{m_2} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi), \end{aligned}$$

где $\alpha^{(j)} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, 0, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n)$.

Доказательство. Так как оценка (2.1), очевидна, при $\alpha = \alpha^{(j)}$ и $\alpha = \beta(\alpha, j)$ (тогда оценка (2.1) верна при всех $\chi > 0$ с постоянной $c \geq 1$), то пусть $1 \leq \alpha_j < \beta_j(\alpha)$. Тогда интегрированием по частям, для любого $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi)$ получим ($d(\alpha) \geq 1$)

$$\begin{aligned} & \| (D^\alpha \varphi) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)}^2 = \int_{\Omega_\chi} D^\alpha \varphi \overline{D^\alpha \varphi} g_\chi^{2d(\alpha)} dx \leq \\ & \leq \left| \int_{\Omega_\chi} D^{\alpha - e^{(j)}} \varphi \overline{D^{\alpha + e^{(j)}} \varphi} g_\chi^{2d(\alpha)} dx \right| + \left| \int_{\Omega_\chi} D^{\alpha - e^{(j)}} \varphi \overline{D^\alpha \varphi} 2d(\alpha) g_\chi^{2d(\alpha)-1} D_j g_\chi dx \right|, \end{aligned}$$

где $e^{(j)}$ – орт соответствующий j -той оси. Отсюда в силу пунктов 1), 2) леммы 2.1, определения функции g_χ и арифметического неравенства $|ab| \leq \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2)$ имеем, что

$$(2.2) \quad \begin{aligned} & \| (D^\alpha \varphi) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)}^2 \leq \frac{1}{2} \{ \| (D^{\alpha + e^{(j)}} \varphi) g_\chi^{d(\alpha + e^{(j)})} \|_{L_2(\Omega_\chi)}^2 + \\ & + \| (D^{\alpha - e^{(j)}} \varphi) g_\chi^{d(\alpha - e^{(j)})} \|_{L_2(\Omega_\chi)}^2 \} + \frac{2m_2}{\chi} \{ \| (D^\alpha \varphi) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)}^2 + \\ & + \| (D^{\alpha - e^{(j)}} \varphi) g_\chi^{d(\alpha - e^{(j)})} \|_{L_2(\Omega_\chi)}^2 \} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi). \end{aligned}$$

Из оценки (2.2), в силу леммы 2.1 работы [8] и пункта 5) леммы 1 настоящей заметки, следует, что существуют число $\chi_0 > 0$ и постоянная $c = c(\chi_0, m_2) > 0$

для которого при $\chi > \chi_0$ выполняется оценка (2.1). Для этого достаточно в лемме 2.1 работы [8] в качестве функций $a_l(t)$ взять функций

$$a_l(t) \equiv \| (D^{\alpha^{(j)} + l e^{(j)}} \varphi) g_{1/t}^{d(\alpha^{(j)} + l e^{(j)})} \|_{L_2(\Omega_{1/t})}^2 \quad l = 0, \dots, \beta_j(\alpha).$$

□

Следствие 1. Для любого $\alpha \in \mathfrak{R}$ существуют число $\chi_1 > 0$ и постоянная $c = c(\chi_1, m_2) > 0$ такая, что при $\chi > \chi_1$

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \| (D^\alpha \varphi) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} &\leq c (\| (D_1^{\alpha_1} \varphi) g_\chi^{d(\alpha_1, 0^1)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \\ &+ \sum_{\beta \in \mathfrak{R}^1(\alpha_1)} \| (D^\beta \varphi) g_\chi^{m_2} \|_{L_2(\Omega_\chi)}) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi), \end{aligned}$$

где $\mathfrak{R}^1(\alpha_1) = \{\beta, \beta \in \mathfrak{R}^1, \beta_1 = \alpha_1\}$.

Доказательство. В силу леммы 2.2 существуют число $\chi_1 > 0$ и постоянная $c_1 = c_1(\chi_1, m_2) > 0$ такая, что оценка (2.1) при $\chi > \chi_1$ верна для всех $\alpha \in \mathfrak{R}$.

Пусть $\alpha \in \mathfrak{R}$ и $\chi > \chi_1$. Тогда из оценки (2.1) при $j = 2$ имеем, что

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \| (D^\alpha \varphi) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} &\leq c_1 (\| (D^{\alpha^{(2)}} \varphi) g_\chi^{d(\alpha^{(2)})} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \\ &\| (D^{\beta(\alpha, 2)} \varphi) g_\chi^{m_2} \|_{L_2(\Omega_\chi)}) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi), \end{aligned}$$

Еще раз применив оценку (2.1) для первого слагаемого правой части оценки (2.4), при $\chi > \chi_1$ получим

$$\begin{aligned} \| (D^\alpha \varphi) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} &\leq c_1^2 (\| (D^{\alpha^{(2,3)}} \varphi) g_\chi^{d(\alpha^{(2,3)})} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \\ &+ \| (D^{\beta(\alpha^{(2), 3)}} \varphi) g_\chi^{m_2} \|_{L_2(\Omega_\chi)}) + c_1 \| (D^{\beta(\alpha, 2)} \varphi) g_\chi^{m_2} \|_{L_2(\Omega_\chi)}, \end{aligned}$$

где $\alpha^{(2,3)} = (\alpha_1, 0, 0, \alpha_4, \dots, \alpha_n)$.

Продолжая аналогичным образом оценивать первые слагаемые правых частей полученных оценок, получим оценку (2.3) т.к. $\beta(\alpha, 2), \beta(\alpha^{(2)}, 3), \dots \in \mathfrak{R}^1(\alpha_1)$. □

Следствие 2. При $\chi > \chi_1$ с некоторой постоянной $c = c(\chi_1, \mathfrak{R}) > 0$

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \| (D^\alpha \varphi) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} &\leq c \left(\sum_{\alpha_1=0}^r \| (D_1^{\alpha_1} \varphi) g_\chi^{d(\alpha_1, 0^1)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \right. \\ &\left. + \sum_{\beta \in \mathfrak{R}^1} \| (D^\beta \varphi) g_\chi^{m_2} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \right) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi), \end{aligned}$$

где $r = m_1 - [a]'$.

Доказательство непосредственно получается из оценки (2.3), если заметить, что при $\alpha_1 = m_1 - [a]', \dots, m_1$ $(\alpha_1, 0^1) \in \mathfrak{R}^1$.

Лемма 3. Пусть P – регулярный оператор с характеристическим многогранником $\mathfrak{R}$ вида (1.1). Тогда существуют число $\chi_2 > 0$ и постоянная $c = c(\chi_2, \mathfrak{R})$ такая, что при $\chi > \chi_2$

$$(2.6) \quad \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \| (D^\alpha \varphi) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \leq c (\| (P(D)\varphi) g_\chi^{m_2} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \\ + \sum_{\alpha=0}^r \| (D_1^{\alpha_1} \varphi) g_\chi^{d(\alpha_1, 0^1)} \|_{L_2(\Omega_\chi)}) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi),$$

где r число из следствия 2.

Доказательство. В силу формулы Лейбница, оценки (1.3), определения функции g_χ и пункта 3) леммы 1 с некоторыми постоянными $c_1 = c_1(P)$, $c_2 = c_2(\chi) > 0$ при $\chi > 0$ имеем

$$(2.7) \quad \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}^1} \| (D^\alpha \varphi) g_\chi^{m_2} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \leq \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}^1} \| D^\alpha (\varphi g_\chi^{m_2}) \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \\ + \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}^1, \alpha^1 \neq 0} \sum_{0 \neq \beta^1 \leq \alpha^1} c_{\alpha^1}^{\beta^1} \| (D^{\alpha - (0, \beta^1)} \varphi) D^{\beta^1} g_\chi^{m_2} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \leq \\ \leq c_1 (\| P(D)(\varphi g_\chi^{m_2}) \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \| \varphi g_\chi^{m_2} \|_{L_2(\Omega_\chi)}) + \\ + c_2 \sum_{\gamma \in \mathfrak{R}} \| (D^\gamma \varphi) g_\chi^{d(\gamma)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \cdot \sum_{0 \neq \beta^1, (0, \beta^1) \in \mathfrak{R}} \left(\frac{2}{\chi}\right)^{|\beta^1|} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi),$$

где $c_{\alpha^1}^{\beta^1} = c_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots c_{\alpha_n}^{\beta_n}$ – биномиальные коэффициенты.

Для первого слагаемого правой части оценки (2.7) в силу формулы Лейбница, определения функции g_χ и пункта 3) леммы 1 с некоторыми постоянными $c_3 = c_3(P)$, $c_4 = c_4(P) > 0$ при всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi)$ имеем

$$(2.8) \quad \| P(D)(\varphi g_\chi^{m_2}) \|_{L_2(\Omega_\chi)} \leq \| (P(D)\varphi) g_\chi^{m_2} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \\ + c_3 \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}^1, \alpha^1 \neq 0} \sum_{0 \neq \beta^1 \leq \alpha^1} c_{\alpha^1}^{\beta^1} \| (D^{\alpha - (0, \beta^1)} \varphi) D^{\beta^1} g_\chi^{m_2} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \leq \\ \leq \| (P(D)\varphi) g_\chi^{m_2} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + c_4 \sum_{\gamma \in \mathfrak{R}} \| (D^\gamma \varphi) g_\chi^{d(\gamma)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \sum_{0 \neq \beta^1, (0, \beta^1) \in \mathfrak{R}} \left(\frac{2}{\chi}\right)^{|\beta^1|}.$$

Из оценки (2.5) в силу (2.7) и (2.8) при $\chi > \chi_1$ с некоторыми постоянными $c_5 = c_5(P)$, $c_6 = c_6(P) > 0$ при всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi)$ имеем, что

$$(1 - c_5 \sum_{0 \neq \beta^1, (0, \beta^1) \in \mathfrak{R}} \left(\frac{2}{\chi}\right)^{|\beta^1|}) \cdot \sum_{\gamma \in \mathfrak{R}} \| (D^\gamma \varphi) g_\chi^{d(\gamma)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \leq \\ \leq c_6 (\| (P(D)\varphi) g_\chi^{m_2} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \sum_{\alpha_1=0}^r \| (D_1^{\alpha_1} \varphi) g_\chi^{d(\alpha_1, 0^1)} \|_{L_2(\Omega_\chi)}).$$

Откуда непосредственно получаем утверждение леммы. $\square$

Для многогранника $\mathfrak{R}$ вида (1.1) и любого $j \in N_0$ через $\mathfrak{R}_j$ обозначим множество тех мультииндексов $\alpha \in N_0^n$ для которых существуют $l \in N_0, l \leq j$ и мультииндекс $\beta^1 \in N_0^{n-1}, |\beta^1| = l$ такие, что $\alpha - (0, \beta^1) \in \mathfrak{R}$. Не трудно заметить, что $\mathfrak{R}_j \setminus \mathfrak{R}_{j-1} = \{\alpha, \alpha = \beta + (0, \gamma^1), \beta \in \mathfrak{R}, |\gamma^1| = j\} \quad j = 1, 2, \dots$

Лемма 4. Пусть $P(D)$ – регулярный оператор с характеристическим многогранником вида (1.1). Тогда для любого $j \in N_0$ существуют постоянные $A_{l,j} > 0 \quad l = 0, \dots, j, B_j > 0$ такие, что при всех $\chi > \chi_2$ ($\chi_2 > 0$ число из леммы 3)

$$(2.9) \quad \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}_j} \| (D^\alpha \varphi) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \leq \sum_{l=0}^j A_{l,j} \sum_{|\beta^1|=l} \| (D^{\beta^1} P(D) \varphi) g_\chi^{m_2+l} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \\ + B_j \sum_{\alpha_1=0}^r \| (D_1^{\alpha_1} \varphi) g_\chi^{d(\alpha_1, 0^1)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi).$$

Доказательство. будем проводить по индукции по j . Для $j = 0$ оценка (2.9) доказана в лемме 3. Пусть оценка (2.9) верна при $j \leq k$. Докажем его для $j = k + 1$. В силу предположения индукции и пункта 1) леммы 1 имеем

$$(2.10) \quad \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}_{k+1}} \| (D^\alpha \varphi) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}_k} \| (D^\alpha \varphi) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \\ + \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}_{k+1} \setminus \mathfrak{R}_k} \| (D^\alpha \varphi) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \leq \\ \leq \left(\sum_{l=0}^j A_{l,j} \sum_{|\beta^1|=l} \| (D^{\beta^1} P(D) \varphi) g_\chi^{m_2+l} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \right. \\ \left. + B_k \sum_{\alpha_1=0}^r \| (D_1^{\alpha_1} \varphi) g_\chi^{d(\alpha_1, 0^1)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \right) + \\ + \sum_{\nu \in \mathfrak{R}} \sum_{|\gamma^1|=k+1} \| (D^{\nu+(0, \gamma^1)} \varphi) g_\chi^{d(\nu)+k+1} \|_{L_2(\Omega_\chi)}$$

для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi)$.

Оценим последнее слагаемое правой части оценки (2.10). В силу формулы Лейбница, леммы 3, определения функции g_χ и предположения индукции (т.к. $\nu - (0, \mu^1) + (0, \gamma^1) \in \mathfrak{R}_k$ при всех $\nu \in \mathfrak{R}, |\gamma^1| = k + 1, 0 \neq \mu^1 \leq \gamma^1$) с некоторыми постоянными $c_1 = c_1(P), c_2 = c_2(P) > 0$ имеем

$$\sum_{|\gamma^1|=k+1} \sum_{\nu \in \mathfrak{R}} \| (D^{\nu+(0, \gamma^1)} \varphi) g_\chi^{d(\nu)+k+1} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \leq$$

$$\begin{aligned}
& \leq \sum_{|\gamma^1|=k+1} \sum_{\nu \in \mathfrak{R}} \| D^\nu ((D^{\gamma^1} \varphi) g_\chi^{k+1}) g_\chi^{d(\nu)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \\
& + \sum_{|\gamma^1|=k+1} \sum_{\nu \in \mathfrak{R}, \nu^1 \neq 0} \sum_{0 \neq \mu^1 \leq \nu^1} c_{\nu^1}^{\mu^1} \| (D^{\nu-(0, \mu^1) \# (0, \gamma^1)} \varphi) g_\chi^{d(\nu)} D^{\mu^1} g_\chi^{k+1} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \leq \\
& \leq c_1 \left[\sum_{|\gamma^1|=k+1} \| P(D) ((D^{\gamma^1} \varphi) g_\chi^{k+1}) g_\chi^{m_2} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{|\gamma^1|=k+1} \| (D^{\gamma^1} \varphi) g_\chi^{m_2+k+1} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \right] + \\
& + c_2 \left[\sum_{l=0}^k A_{l,j} \sum_{|\beta^1|=l} \| (D^{\beta^1} P(D) \varphi) g_\chi^{m_2+l} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \right. \\
& \quad \left. + B_k \sum_{\alpha_1=0}^r \| (D_1^{\alpha_1} \varphi) g_\chi^{d(\alpha_1, 0^1)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \right]
\end{aligned} \tag{2.11}$$

для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi)$.

Рассмотрим первое слагаемое первой части оценки (2.11). В силу формулы Лейбница, определения функции g_χ предположения индукции с некоторыми постоянными $c_3 = c_3(P)$, $c_4 = c_4(P, k) > 0$ имеем

$$\begin{aligned}
& \sum_{|\gamma^1|=k+1} \| P(D) ((D^{\gamma^1} \varphi) g_\chi^{k+1}) g_\chi^{m-2} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \leq \\
& \leq \sum_{|\gamma^1|=k+1} \| (P(D) D^{\gamma^1} \varphi) g_\chi^{m_2+k+1} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \\
& + c_3 \sum_{|\gamma^1|=k+1} \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}, \alpha^1 \neq 0} \sum_{0 \neq \mu^1 \leq \alpha^1} \| (D^{\alpha-(0, \mu^1)+(0, \gamma^1)} \varphi) (D^{\mu^1} g_\chi^{k+1}) g_\chi^{m_2} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \leq \\
& \leq \sum_{|\gamma^1|=k+1} \| (D^{\gamma^1} P(D) \varphi) g_\chi^{m_2+k+1} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \\
& + c_4 \left(\sum_{l=0}^k A_{l,j} \sum_{|\beta^1|=l} \| (D^{\beta^1} P(D) \varphi) g_\chi^{m_2+|\beta^1|} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \right. \\
& \quad \left. + B_k \sum_{\alpha_1=0}^r \| (D_1^{\alpha_1} \varphi) g_\chi^{d(\alpha_1, 0^1)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \right) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi). \tag{2.12}
\end{aligned}$$

Откуда, т.к. при $\beta^1 \in N_0^{n-1}$, $|\beta^1| = k+1$, $(0, \beta^1) \in \mathfrak{R}_k$ и $g_\chi \leq 1$, то в силу предположения индукции получаем оценку (2.9) для $j = k+1$. Этим утверждение леммы 4 доказано. $\square$

3. ВЕСОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Пусть функция g , область Ω_χ и множества $\mathfrak{R}_j$ ($j = 0, 1, \dots$) определены как выше. Для $j \in N_0$ обозначим через

$$H_j \equiv H(\mathfrak{R}_j, g, \Omega_\chi) = \left\{ u, \|u\|_{H_j} \equiv \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}_j} \| (D^\alpha u) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} < \infty \right\},$$

где по данному мультииндексу α число $d(\alpha)$ определяется по формуле (1.2).

Лемма 5. Для произвольных чисел $j \in N_0$ и $\chi > 0$ множество $C_0^\infty(\Omega_\chi)$ плотно в H_j .

Доказательство. Пусть $j \in N_0$, $\chi > 0$ и $u \in H_j$ фиксированы. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют число $\delta \in (0, \chi)$ и $M \geq 1$ такие, что

$$(3.1) \quad \|u\|_{H(\mathfrak{R}_j, g, \Omega_\chi \setminus \Omega_{\chi-\delta, M})} \equiv \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}_j} \| (D^\alpha u) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi \setminus \Omega_{\chi-\delta, M})} < \varepsilon,$$

где $\Omega_{\chi-\delta, M} \equiv \{x \in E^n, |x^1| < \chi - \delta, |x_1| < M\}$.

Пусть φ_1 и φ_2 неотрицательные бесконечно дифференцируемые, соответственно в E^1 и E^{n-1} , функции такие, что

- 1) $\varphi_1(x_1) = 1$ при $|x_1| < M$, $\varphi_1(x_1) = 0$ при $|x_1| > M + 1$,
- 2) $\varphi_2(x^1) = 1$ при $|x^1| < \chi - \delta$, $\varphi_2(x^1) = 0$ при $|x^1| > \chi - \delta/2$,
- 3) с некоторой постоянной $b = b(j) > 0$

$$|\varphi_1^{(k)}(x_1)| \leq b \quad (k = 0, 1, \dots, m_1), |\varphi_2^{(\alpha^1)}(x^1)| \leq b \cdot \delta^{-|\alpha^1|} \quad (|\alpha^1| \leq m_2 + j).$$

Положим

$$v(x) = \begin{cases} u(x_1, x^1) \cdot \varphi_1(x_1) \cdot \varphi_2(x^1) & x \in \Omega_\chi \\ 0, & x \notin \Omega_\chi. \end{cases}$$

Очевидно, так как $u \in H_j$ и $\text{supp } v \subset \Omega_{\chi-\delta/2, M+1}$, то

$$\sum_{\alpha \in \mathfrak{R}_j} \|D^\alpha v\|_{L_2(E^n)} < \infty$$

Продолженные нулем вне Ω_χ функций $D^\alpha u$ $\alpha \in \mathfrak{R}_j$ обозначим через $v^{(\alpha)}$.

Так как $v(x) = u(x)$ при $x \in \Omega_{\chi-\delta, M}$ и $D^\alpha v \in L_2(E^n)$ для любого $\alpha \in \mathfrak{R}_j$, то в силу (3) имеем

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}_j} \| (D^\alpha v - v^{(\alpha)}) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(E^n)} &= \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}_j} \| (D^\alpha v - v^{(\alpha)}) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} = \\ &= \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}_j} \| (D^\alpha v - D^\alpha u) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}_j} \| (D^\alpha v - D^\alpha u) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi \setminus \Omega_{\chi-\delta, M})} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{\alpha \in \mathbb{R}_j} \| (D^\alpha v) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_{\chi-\frac{\delta}{2}, M+1} \setminus \Omega_{\chi-\delta, M})} + \| (D^\alpha u) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi \setminus \Omega_{\chi-\delta, M})} \leq \\ &\leq \sum_{\alpha \in \mathbb{R}_j} \| (D^\alpha v) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_{\chi-\frac{\delta}{2}, M+1} \setminus \Omega_{\chi-\delta, M})} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Так как $g_\chi(x^1) \leq \frac{2\delta}{\chi}$ при $x \in \Omega_{\chi-\frac{\delta}{2}, M+1} \setminus \Omega_{\chi-\delta, M}$, то применяя формулу Лейбница, пункт 1) леммы 1, свойства 1)-3) функций φ_1, φ_2 и неравенство (3.1) для суммы правой части оценки (3.2) с некоторой постоянной $c_1 = c_1(\chi, j) > 0$ получим

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha \in \mathbb{R}_j} \| (D^\alpha (u\varphi_1\varphi_2)) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_{\chi-\frac{\delta}{2}, M+1} \setminus \Omega_{\chi-\delta, M})} \leq \\ &\leq \sum_{\alpha \in \mathbb{R}_j} \sum_{\beta \leq \alpha} c_\alpha^\beta \| D^\beta u \cdot D_1^{\alpha_1 - \beta_1} \varphi_1 \cdot D^{\alpha_1 - \beta_1} \varphi_2 \cdot g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_{\chi-\frac{\delta}{2}, M+1} \setminus \Omega_{\chi-\delta, M})} \leq \\ &\leq \sum_{\alpha \in \mathbb{R}_j} \sum_{\beta \leq \alpha} c_\alpha^\beta b^{|\alpha - \beta|} \delta^{-(|\alpha^1| - |\beta^1|)} \left(\frac{2\delta}{\chi}\right)^{|\alpha^1| - |\beta^1|} \| (D^\beta u) \cdot g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_{\chi-\frac{\delta}{2}, M+1} \setminus \Omega_{\chi-\delta, M})} \leq \\ &\leq c_1 \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда и из оценки (3.2) получаем, что

$$(3.3) \quad \sum_{\alpha \in \mathbb{R}_j} \| (D^\alpha v - v^{(\alpha)}) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(E^n)} \leq (c_1 + 1) \varepsilon.$$

Для $h > 0$ пусть

$$S_h = \{x \in E^n, |x| < h\}, \psi \in C_0^\infty(S_1).$$

Положим $\int \psi(x) dx = 1$, $\psi_h(x) \equiv h^{-n} \psi(x/h)$ и $v_h \equiv v * \psi_h$.

Очевидно, для любого $h > 0$ $v_h \in C^\infty(E^n)$. При этом $v_h(x) = 0$ когда $x \notin \text{supp} v + \bar{S}_h$ ($\bar{S}_h$ - замыкание множества S_h). С другой стороны, так как $\text{supp} v + \bar{S}_h \subset \Omega_\chi$ при $h \in (0, \delta/4)$, то $v_h \in C_0^\infty(\Omega_\chi)$ когда $h \in (0, \delta/4)$. Так как $0 \leq g_\chi(x^1) \leq 1$, $D^\alpha v \in L_2(E^n)$ $\alpha \in \mathbb{R}_j$, $D^\alpha v_h = (D^\alpha v)_h$ (см. например [9], 6.3, (2)), то в силу неравенства Юнга и непрерывности в среднем функций из L_2 имеем при $h \rightarrow +0$

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha \in \mathbb{R}_j} \| D^\alpha (v_h - v) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(E^n)} \leq \sum_{\alpha \in \mathbb{R}_j} \| D^\alpha (v_h - v) \|_{L_2(E^n)} = \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{R}_j} \| (D^\alpha v)_h - (D^\alpha v) \|_{L_2(E^n)} \leq \\ &\leq \sum_{\alpha \in \mathbb{R}_j} \sup_{|y| < h} \| D^\alpha v(x - y) - D^\alpha v(x) \|_{L_2(E^n)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, отсюда и из (3.3) получаем утверждение леммы.

Лемма 5 доказана. $\square$

Следствие 3. При условиях леммы 4

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathbb{R}_j} \| (D^\alpha u) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} &\leq \sum_{l=0}^j A_{l,j} \sum_{|\beta^1|=l} \| (D^{\beta^1} P(D)u) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \\ &+ B_j \sum_{\alpha_1}^r \| (D_1^{\alpha_1} u) g_\chi^{d(\alpha_1, 0^1)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \quad \forall u \in H_j, j = 0, 1, \dots, \chi > \chi_2. \end{aligned}$$

Доказательство. непосредственно следует из лемм 4 и 5. $\square$

Пусть $P(D)$ – регулярный оператор характеристический многогранник которого имеет вид (1.1). Через $N(P, \chi)$ обозначим

$$N(P, \chi) \equiv \{u, D_1^j u \in L_2(\Omega_\chi) \quad j = 0, \dots, m_1, P(D)u = 0 \text{ в } \Omega_\chi\}.$$

Лемма 6. Пусть $u \in N(P, \chi)$. Тогда при $h \rightarrow +0$

$$(3.4) \quad \| (D^{\alpha^1} P(D)v_h) g_\chi^{m_2+|\alpha^1|} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \rightarrow 0 \quad \forall \alpha^1 \in N_0^{n-1},$$

где

$$\begin{aligned} v_h(x) &= \int v(x_1, x^1 - y^1) \varphi_h(y^1) dy^1, \quad v(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \Omega_\chi \\ 0 & x \notin \Omega_\chi, \end{cases} \\ \varphi_h(x^1) &= h^{-(n-1)} \varphi(x^1/h), \quad \varphi(x^1) \in C_0^\infty(E^{n-1}) \\ \text{supp } \varphi &\subset \{x^1 \in E^{n-1}, |x^1| < 1\} \quad u \quad \int \varphi(x^1) dx^1 = 1. \end{aligned}$$

Доказательство. Так как при $x \in \Omega_{\chi-h}$

$$v_h(x) = \int u(x_1, x^1 - y^1) \varphi_h(y^1) dy^1.$$

то при $x \in \Omega_{\chi-h}$

$$D^{\alpha^1} P(D)v_h(x) = (D^{\alpha^1} P(D)v)_h(x) = (D^{\alpha^1} P(D)u)_h(x) = 0.$$

По этому для доказательства соотношения (3.4) достаточно показать, что при $h \rightarrow +0$

$$(3.5) \quad \| (D^{\alpha^1} P(D)v_h) g_\chi^{m_2+|\alpha^1|} \|_{L_2(\Omega_\chi \setminus \Omega_{\chi-h})} \rightarrow 0 \quad \forall \alpha^1 \in N_0^{n-1}.$$

Так как $0 \leq g_\chi(x^1) \leq \frac{2h}{\chi}$ при $x \in \Omega_\chi \setminus \Omega_{\chi-h}$ и (см. например [9] теорему 4.5.2) $D_1^{\beta_1} v(x) = D_1^{\beta_1} u(x)$ при $x \in \Omega_\chi$, $D_1^{\beta_1} v(x) = 0$ при $x \notin \Omega_\chi$, то используя неравенство Юнга с некоторыми постоянными $c_1 = c_1(P)$, $c_2 = c_2(\alpha^1, \varphi, P) > 0$ имеем

$$\begin{aligned} (3.6) \quad &\| (D^{\alpha^1} P(D)v_h) g_\chi^{m_2+|\alpha^1|} \|_{L_2(\Omega_\chi \setminus \Omega_{\chi-h})} \leq \\ &\leq \left(\frac{2h}{\chi}\right)^{m_2+|\alpha^1|} \| D^{\alpha^1} P(D)v_h \|_{L_2(\Omega_\chi \setminus \Omega_{\chi-h})} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c_1 \left(\frac{2h}{\chi}\right)^{m_2+|\alpha^1|} \sum_{\beta \in \mathbb{R}} \left\| \int D_1^{\beta_1} v(x_1, x^1 - y^1) D^{\alpha^1+\beta^1} \varphi_h(y^1) dy^1 \right\|_{L_2(\Omega_\chi \setminus \Omega_{\chi-h})} \leq \\
&\leq c_1 \left(\frac{2h}{\chi}\right)^{m_2+|\alpha^1|} \left(\frac{1}{h}\right)^{m_2+|\alpha^1|} \cdot \sum_{|\beta^1| \leq m_2} \| D^{\alpha^1+\beta^1} \varphi \|_{L_1(E^{n-1})} \cdot \\
&\cdot \sum_{l=0}^{m_1} \sup_{|y^1| < h} \| D_1^{\beta_1} v(x_1, x^1 - y^1) \|_{L_2(\Omega_\chi \setminus \Omega_{\chi-h})} \leq \\
&\leq c_2 \left(\frac{2}{\chi}\right)^{m_2+|\alpha^1|} \cdot \sum_{l=0}^{m_2} \sup_{|y^1| < h} \| D_1^l u(x_1, x^1 - y^1) \|_{L_2(\Omega_\chi \setminus \Omega_{\chi-h})}
\end{aligned}$$

Так как при $u \in N(P, \chi)$, то по теореме Фубини

$$\omega_l(x^1) = \int |D_1^l u(x_1, x^1)|^2 dx_1 \in L_1(E^{n-1}) \quad l = 0, 1, \dots, m_1,$$

то в силу непрерывности интеграла Лебега относительно меры имеем, что при $h \rightarrow +0$

$$\sup_{|y^1| < h} \| D_1^l u(x_1, x^1 - y^1) \|_{L_2(\Omega_\chi \setminus \Omega_{\chi-h})} = \sup_{|y^1| < h} \| \omega_l(x^1 - y^1) \|_{L_1(\chi-h < |x^1| < \chi)}^{1/2} \rightarrow 0.$$

Это вместе с оценкой (3.6) доказывает соотношение (3.5). Лемма 6 доказана. $\square$

Лемма 7. Для каждого $j \in N_0$ норма

$$(3.7) \quad \| u \|_{H(\mathbb{R}_j, g, \Omega_\chi)}^1 \equiv \sum_{\alpha \in \mathbb{R}_j} \| D^\alpha (u g_\chi^{d(\alpha)}) \|_{L_2(\Omega_\chi)}$$

эквивалентна исходной норме пространства H_j .

Доказательство. получается применением формулы Лейбница с использованием леммы 1 настоящей заметки и леммы 2.1 работы [8]. $\square$

Лемма 8. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi)$. Тогда для любого $j \in N_0$ существует постоянная $c = c(j, \varphi, g) > 0$ такая, что

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{R}_j} \| D^\alpha (u \varphi) \|_{L_2(\Omega_\chi)} \leq c \| u \|_{H_j} \quad \forall u \in H_j \quad j = 0, 1, \dots$$

Доказательство. непосредственно получается применением формулы Лейбница и леммы 7, если заметить, что для любого $\alpha \in \mathbb{R}_j$ функция $\psi_\alpha(x)$ $\psi_\alpha(x) = \varphi(x) g_\chi^{d(\alpha)}$ при $x \in \text{supp} \varphi$ и $\psi_\alpha(x) = 0$ при $x \notin \text{supp} \varphi$ принадлежит $C_0^\infty(\Omega_\chi)$. $\square$

Теорема 1. Пусть $P(D)$ – регулярный оператор характеристический многогранник которого имеет вид (1.1). Тогда при достаточно больших χ ($\chi > \chi_2$, χ_2 – число из леммы 4) $N(P, \chi) \subset H(\mathbb{R}_j, g, \Omega_\chi)$ $j = 0, 1, \dots$.

Доказательство. Пусть $j \in N_0, u \in N(P, \chi), \chi > \chi_2$ а $v(x) = u(x)$ при $x \in \Omega_\chi$ и $v(x) = 0$ при $x \notin \Omega_\chi$.

Для любого $h > 0$ через v_h обозначим

$$v_h(x) = v * \varphi_h = \frac{1}{h^{n-1}} \int_{E^{n-1}} v(x_1, x^1 - y^1) \varphi(y^1/h) dy^1,$$

где φ функция из леммы 6.

Не трудно заметить, что для любых $h > 0$ и $j \in N_0$

$$\sum_{\alpha \in \mathfrak{R}_j} \| D^\alpha v_h \|_{L_2(E^n)} < \infty$$

и тем более $v_h \in H_j$.

В силу следствия 3 для любых $h_1, h_2 > 0$

$$(3.8) \quad \begin{aligned} & \sum_{\beta \in \mathfrak{R}_j} \| D^\beta (v_{h_1} - v_{h_2}) g_\chi^{d(\beta)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \leq \\ & \leq \sum_{k=0}^j A_{k,j} \sum_{|\alpha^1|=k} \| D^{\alpha^1} P(D) (v_{h_1} - v_{h_2}) g_\chi^{m_2+k} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \\ & + B_j \sum_{l=0}^r \| D_1^l (v_{h_1} - v_{h_2}) g_\chi^{d(l, 0^1)} \|_{L_2(\Omega_\chi)}. \end{aligned}$$

Так как при $h \rightarrow +0$ для любого $l : l = 0, 1, \dots, m_1$ ($r \leq m_1$)

$$\| D_1^l v_h - D_1^l u \|_{L_2(\Omega_\chi)} = \| (D_1^l v)_h - D_1^l u \|_{L_2(\Omega_\chi)} \rightarrow 0,$$

то в силу леммы 5 из оценки (3.8) получаем, что при $h_1, h_2 \rightarrow +0$

$$\sum_{\beta \in \mathfrak{R}_j} \| D^\beta (v_{h_1} - v_{h_2}) g_\chi^{d(\beta)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \rightarrow 0.$$

Так как при $h \rightarrow +0$ $\| v_h - u \|_{L_2(\Omega_\chi)} \rightarrow 0$, то в силу леммы 7, замкнутости оператора обобщенного дифференцирования имеем, что $u \in H_j$, при этом

$$\| u \|_{H_j} \leq B_j \sum_{l=0}^r \| (D_1^l u) g_\chi^{d(l, 0^1)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \quad j = 0, 1, \dots$$

Теорема 1 доказана. □

Теорема 2. При условиях теоремы 1 $N(P, \chi) \subset C^\infty(\Omega_\chi)$.

Доказательство. Пусть $R_0(\xi) = 1 + |P(\xi)|$, $R_j(\xi) = R_0(\xi)(1 + |\xi^1|)^j$ $j = 1, 2, \dots$. Из условия теоремы на оператор $P(D)$ имеем, что оператор $P(D)$ частично гипоеллиптичен относительно плоскости $x_1 = 0$ (см. определение 2 пункт 2)) а $R_0(\xi)$ медленно растущая весовая функция (см. [4] определение 10.1.1).

Поэтому для доказательства теоремы, достаточно в силу теоремы Гординга - Малгранжа (см. например [5] или [4] теорема 11.2.5), показать, что при $\chi > \chi_2$

$$N(P, \chi) \subset B_{2, R_j}^{loc}(\Omega_\chi) \quad j = 0, 1, \dots,$$

где $B_{2, R_j}^{loc}(\Omega_\chi)$ - пространство Л. Хермандера (см. [4], определение 10.1.6).

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi)$. В силу равенства Парсеваля и леммы 8 с некоторыми постоянными $c_1 = c_1(\mathfrak{R}_j)$, $c_2 = c_2(\mathfrak{R}_j, \varphi) > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \|u\varphi\|_{B_{2, R_j}(\Omega_\chi)} &= \|(1 + |P(\xi)|)(1 + |\xi^1|)^j F(u\varphi)\|_{L_2(E^n)} \leq \\ &\leq c_1 \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}_j} \|u\varphi\|_{L_2(\Omega_\chi)} \leq c_2 \|u\|_{H_j}^1, \end{aligned}$$

где F преобразование Фурье.

Отсюда, в силу леммы 8, имеем, что $u\varphi \in B_{2, R_j}(\Omega_\chi)$ для любых $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi)$ и $j = 0, 1, \dots$, т.е. $u \in B_{2, R_j}^{loc}(\Omega_\chi)$ при $\chi > \chi_2$, $j = 0, 1, \dots$. Теорема 2 доказана. $\square$

Abstract. The set of smooth solutions of a class of regular, partially hypoelliptic with respect to the plane $x_1 = 0$ equations in a rather wide strip is extracted.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, **91**, 59 – 81 (1967).
- [2] L. R. Volewich, S. G. Gindikin, The Method of Newtons Polyhedron in the Theory of PDE. Kluwer (1992).
- [3] Г. Г. Казарян, "Сравнение мощности многочленов и их гипоеллиптичность", Труды МИАН СССР, **150**, 143 – 159 (1979).
- [4] L. Hormander, The Analysis of linear Partial Differential Operators, **2**, Springer - Verlag (1983).
- [5] L. Gording, B. Malgrange, "Operateurs differentials partillement hypoelliptiques", Math. Scand, **9**, 5 – 21 (1961).
- [6] Г. Г. Казарян, "О почти гипоеллиптических многочленах", Докл. Росс. Акад. Наук, **398**, (6), 701 – 703 (2004).
- [7] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Об одном классе почти гипоеллиптических операторов", Известия НАН Армении, серия Математика, **41** (6), 39 – 56 (2006).
- [8] В. Н. Маргарян, Г. Г. Казарян, "О гладкости решений одного класса почти гипоеллиптических уравнений", Известия НАН Армении, серия Математика, **43** (3), 40 – 66 (2008).
- [9] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные Представления функций и Теоремы Вложения, Москва, Наука (1996).

Поступила 4 марта 2009