Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 5, 2010, стр. 19-32.

ОЦЕНКА ВЫСШИХ ПРОИЗВОДНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЕ

С. Р. АЙРАПЕТЯН, В. Н. МАРГАРЯН

Российско-армянский государственный университет
E-mail: *sofia31337@mail.ru*

Аннотация. В работе рассматриваются регулярные, почти гипоэллиптические уравнения в бесконечной полосе. Доказывается, что все решения почти гипоэллиптического уравнения из определенного пространства принадлежат классу Жевре.

MSC2010 number: 12E10.

Ключевые слова: почти гипоэллиптический; частично гипоэллиптический; гипоэллиптический по группе переменных; регулярный оператор (многочлен); весовые пространства Соболева.

Введение и постановка задачи

Один из первых результатов о бесконечной дифференцируемости и аналитичности решений эллиптических дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка получено С.Н.Бернштейном в работе [1]. В работе [2] Г. Вейлом доказана, что обобщенные решения эллиптического уравнения второго порядка являются аналитическими функциями. В работе [3] И.Г.Петровский доказал, что все классические решения эллиптического уравнения и систем эллиптических уравнений любого порядка являются аналитическими функциями.

В работе [4] (см. также [5]) Л. Хермандером получены алгебраические критерии для того, чтобы все обобщенные решения дифференцального уравнения $P(D)u = 0$ с постоянными коэффициентами были бесконечно дифференцируемыми функциями. Такие уравнения называются гипоэллиптическими. Там же он показал, что для любого гипоэллиптического оператора $P(D)$ существует вектор $\lambda = \lambda(P) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ $(\lambda_j \geq 1,\ j = 1, \ldots, n)$ такой, что все обобщенные решения данного однородного уравнения принадлежат классу Жевре Γ^{λ}, при этом в таких классах полученный результат является не улучшаемым.

В работе [6] введено понятие веса гипоэллиптичности для дифференциальных операторов с частными производными и на основе этого понятия в работах [7]-[8] введены мультианизотропные классы Жевре и доказано, что в общем случае решения гипоэллиптических уравнений принадлежат таким классам.

В работе [9] В. И. Буренковым рассмотрен класс дифференциальных уравнений $P(D)u = 0$ в бесконечной полосе и получены условия для того, чтобы все решения уравнения, которые определенным образом стремятся к нулю в бесконечности были бы бесконечно дифференцируемыми функциями. Такие операторы мы будем называть гипоэллиптическими по Буренкову.

В работе [10] доказано, что решения (из определенного пространства Соболева) гипоэллиптических по Буренкову уравнений $P(D)u = 0$ принадлежат классическим классам Жевре.

В работе [11] улучшен этот результат. Именно там показано, что эти решения принадлежат мультианизотропным классам Жевре.

В работах [12],[13] исследованы свойства мультианизотропных классов Жевре и для одного общего класса слабо гиперболических систем доказано, что решение задачи Коши для такой системы принадлежит мультианизотропным классам Жевре.

Наша цель в настоящей заметке получить аналогичный работе [11] результат для другого подкласса решений гипоэллиптических по Буренкову уравнений, являющихся одновременно почти гипоэллиптическими.

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: N – множество натуральных чисел $N_0 = N \cup \{0\}$, $N_0^2 = N_0 \times N_0$ – множество двумерных мультииндексов, E^2 и R^2 – двумерные вещественные эвклидовы пространства точек $x = (x_1, x_2)$ и $\xi = (\xi_1, \xi_2)$. Далее

$$C^2 = R^2 \times iR^2 \quad (i^2 = -1),$$

$$R_+^2 = \{\xi \in R^2; \xi_j \geq 0, j = 1, 2\}, \quad R_0^2 = \{\xi \in R^2, \xi_1 \cdot \xi_2 \neq 0\}.$$

Для $\xi, \eta \in R^2$, $x \in E^2$, $\alpha \in N_0^2$ и $\nu \in R_+^2$ обозначим

$$|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}, \quad (\xi, \eta) = \xi_1 \cdot \eta_1 + \xi_2 \cdot \eta_2, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdot \xi_2^{\alpha_2}, \quad |\xi|^\nu = |\xi_1|^{\nu_1} \cdot |\xi_2|^{\nu_2}, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2},$$

где $D_j = \partial/\partial\xi_j$ либо $D_j = i^{-1} \cdot \partial/\partial x_j$, $j = 1, 2$.

Пусть

$$P(D)=P(D_1,D_2)=\sum_{\alpha}\gamma_\alpha D^\alpha$$

есть линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а

$$P(\xi)=\sum_{\alpha}\gamma_\alpha \xi^\alpha$$

его полный символ, где сумма распространяется по некоторому конечному набору $(P)\equiv\{\alpha;\ \alpha\in N_0^2,\gamma_\alpha\neq 0\}$.

Характеристическим многоугольником или многоугольником Ньютона оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$, набора (P)) называется минимальный выпуклый многоугольник $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}(P)\subset R_+^2$ содержащий множество $(P)\cup\{0\}$. Многоугольник $\mathfrak{N}$ называется правильным (вполне правильным), если компоненты внешних (относительно $\mathfrak{N}$) нормалей одномерных некоординатных граней $\mathfrak{N}$ не отрицательны (положительны).

Определение 1. *(см. [9]). Оператор $P(D)=P(D_1,D_2)$ (многочлен $P(\xi)=P(\xi_1,\xi_2)$) назовем гипоэллиптическим по Буренкову относительно первой компоненты (относительно ξ_1), если при $|\xi|\to\infty$ ($\xi\in R^2$).*

$$P^{(\alpha_1,0)}(\xi)/P(\xi)\equiv D_1^{\alpha_1}P(\xi)/P(\xi)\longrightarrow 0\qquad \forall\alpha_1\in N.$$

Определение 2. *(см. [14]). Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется почти гипоэллиптическим, если с некоторой постоянной $c>0$*

$$\sum_{\alpha\in N_0^2}\left|P^{(\alpha)}(\xi)\right|\le c\,(|P(\xi)|+1)\qquad \forall\xi\in R^2.$$

Для многочлена $P(\xi)=P(\xi_1,\xi_2)$ будем обозначать

$$\mathcal{D}(P)=\{\zeta\in C^2,\ P(\zeta)=0\},\qquad d_P(\xi)=\inf_{\zeta\in\mathcal{D}(P)}|\xi-\zeta|.$$

Известно (см., например, [4]), что для любого многочлена P существует постоянная $c=c(P)>0$, для которой при всех $\xi\in R^2$ таких, что $P(\xi)\neq 0$

$$c^{-1}\le d_P(\xi)\cdot\sum_{0\neq\alpha\in N_0^2}\left|P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi)\right|^{1/|\alpha|}\le c.$$

Нетрудно доказать, что если с некоторыми постоянными $\varepsilon>0$, $M>0$

$$|P(\xi)|\ge\varepsilon\quad \text{при}\quad \xi\in R^2,\ \ |\xi|\ge M, \tag{1.1}$$

то многочлен P почти гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда

$$\rho_P:=\varliminf_{t\to\infty}\ \min_{|\xi|=t}d_P(\xi)>0. \tag{1.2}$$

В дальнейшем не оговаривая это каждый раз мы будем считать, что для многочлена P выполняется соотношение (1.1).

Определение 3. *Весовым множеством гипоэллиптичесности относительно первой компоненты (относительно ξ_1) оператора $P(D) = P(D_1, D_2)$ (многочлена $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2)$) назовем множество*

$$\mathfrak{M}(P) = \left\{ \nu \in R^2_+, \sup_{|\xi| \geq M} |\xi|^\nu \cdot \sum_{\alpha_1 \in N} \left| P^{(\alpha_1, 0)}(\xi)/P(\xi) \right|^{1/\alpha_1} < \infty \right\}.$$

Известно (см., например, [11]), что если многочлен P гипоэллиптичен по Буренкову относительно ξ_1, то множество $\mathfrak{M}(P)$ является вполне правильным множеством, т.е. для любой точки $\nu \in \mathfrak{M}(P)$, $\nu_1 \cdot \nu_2 \neq 0$ существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $(\beta_1, 0), (0, \beta_2) \in \mathfrak{M}(P)$ при $|\beta_1 - \nu_1| < \varepsilon, |\beta_2 - \nu_2| < \varepsilon$.
Для любого набора $\{\nu^j\}_1^k \subset \mathfrak{M}(P)$, $k \in N$ функция $h(\xi) = \sum\limits_{j=1}^k |\xi|^{\nu^j}$ называется весом гипоэллиптичности по ξ_1 многочлена P. Если для многочлена P $\mathfrak{M}(P)$ многоугольник с вершинами $\{\nu^j\}_1^k$, то функцию $h_p(\xi) = \sum\limits_{j=1}^k |\xi|^{\nu^j}$ назовем точным весом гипоэллиптичности по ξ_1 многочлена P.

Определение 4. *(см.* [15] *или* [16]*). Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется регулярным, если существует постоянная $c > 0$ такая, что для любого $\nu \in \mathfrak{N}(P)$*

$$|\xi|^\nu \leq c(|P(\xi)| + 1) \qquad \forall \xi \in R^2. \tag{1.3}$$

Будем рассматривать регулярные операторы $P(D) = P(D_1, D_2)$ характеристические многоугольники которых имеют вид

$$\begin{array}{l} \mathfrak{N}(P) = \{\nu \in R^2_+, (\nu, \lambda^j) \leq d_j, \, j = 1, \ldots, k \quad (k \geq 2), \, \lambda^j = (1, \lambda^j_2), \\ 0 = \lambda^1_2 < \cdots < \lambda^k_2, 0 < d_1 < \cdots < d_k, \\ \exists \nu^0 \in R^2_0 \bigcap R^2_+, (\nu^0, \lambda^j) < d_j, j = 0, \ldots, k-1, (\nu^0, \lambda^k) = d_k. \end{array} \tag{1.4}$$

Многоугольники вида (1.4) являются правильными, но не являются вполне правильными, так как $\lambda^1_2 = 0$.
Известно (см., например, [17]), что регулярный оператор $P(D_1, D_2)$ характеристический многоугольник которого имеет вид (1.4) является почти гипоэллиптическим и гипоэллиптическим по Буренкову относительно ξ_1.

Лемма 1. *Если характеристический многоугольник регулярного оператора $P(D) = \sum\limits_\alpha \gamma_\alpha D^\alpha$ имеет вид* (1.4)*, то функция $h_p(\xi) = 1 + |\xi_1| + |\xi_2|^{1/\lambda^k_2}$ является точным весом гипоэллиптичности P относительно ξ_1.*

Доказательство. Очевидно достаточно показать, что

$$\mathfrak{M}(P) = \left\{\nu,\, \nu \in R_+^2,\, (\nu, \lambda^k) \leq 1\right\}.$$

Из выпуклости $\mathfrak{M}(P)$ в силу вышесказанного (P – почти гипоэллиптичен, $0 \in \mathfrak{M}(P)$) достаточно показать, что $(1,0)$, $\left(0, 1/\lambda_2^k\right) \in \mathfrak{M}(P)$ и если $\nu \in R_+^2$, $(\nu, \lambda^k) > 1$, то $\nu \notin \mathfrak{M}(P)$.

Для некоторого постоянного $c_1 = c_1(P) > 0$ имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha_1 \in N_0} \left(|\xi_1|^{\alpha_1} + |\xi_2|^{\alpha_1/\lambda_2^k}\right) \left|P^{(\alpha_1,0)}(\xi)\right| = \\
&\sum_{\alpha_1 \in N_0} \left(|\xi_1|^{\alpha_1} + |\xi_2|^{\alpha_1/\lambda_2^k}\right) \left| \sum_{\substack{\beta \in (P) \\ \beta_1 \geq \alpha_1}} \gamma_\beta \cdot \tfrac{\beta_1!}{(\beta_1-\alpha_1)!}\, \xi_1^{\beta_1-\alpha_1}\, \xi_2^{\beta_2} \right| \leq \\
&\leq c_1 \cdot \sum_{\alpha_1 \in N_0} \sum_{\substack{\beta \in (P) \\ \beta_1 \geq \alpha_1}} \left(|\xi|^\beta + |\xi_1|^{\beta_1-\alpha_1} \cdot |\xi_2|^{\beta_2+\alpha_1/\lambda_2^k}\right)
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Так как $\beta_1 \geq \alpha_1$ и

$$\left(\left(\beta_1 - \alpha_1, \beta_2 + \alpha_1/\lambda_2^k\right), \lambda^j\right) = (\beta, \lambda^j) - \alpha_1 + \alpha_1 \cdot \lambda_2^j/\lambda_2^k \leq (\beta, \lambda^j) \leq d_j, \quad 1 \leq j \leq k,$$

то $((\beta_1 - \alpha_1), (\beta_2 + \alpha_1/\lambda_2^k)) \in \mathfrak{N}(P)$ и в силу регулярности оператора $P(D)$ (см. (1.3)) с некоторой постоянной $c_2 = c_2(P) > 0$ из (1.5) получаем

$$\sum_{\alpha_1 \in N_0} \left(|\xi_1|^{\alpha_1} + |\xi_2|^{\alpha_1/\lambda_2^k}\right) \left|P^{(\alpha_1,0)}(\xi)\right| \leq c_2(|P(\xi)| + 1) \quad \forall \xi \in R^2.$$

Для регулярного многочлена P с характеристическим многоугольником вида (1.4) $P(\xi) \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$ и, очевидно, с некоторой постоянной $c_3 > 0$

$$\sum_{\alpha_1 \in N} \left(|\xi_1| + |\xi_2|^{1/\lambda_2^k}\right)^{\alpha_1} \cdot \left|P^{(\alpha_1,0)}(\xi)\right| \leq c_3 \cdot \sum_{\alpha_1 \in N} \left(|\xi_1|^{\alpha_1} + |\xi_2|^{\alpha_1/\lambda_2^k}\right) \cdot \left|P^{(\alpha_1,0)}(\xi)\right|.$$

Следовательно, при $|\alpha_1| \neq 0$ с некоторой постоянной $c_4 > 0$

$$\sum_{\alpha_1 \in N_0} \left(|\xi_1| + |\xi_2|^{1/\lambda_2^k}\right) \left|P^{(\alpha_1,0)}(\xi)/P(\xi)\right|^{1/|\alpha_1|} \leq c_4 \quad \forall \xi \in R^2, |P(\xi)| \geq 1.$$

Это означает, что $(1,0) \quad (0, 1/\lambda_2^k) \in \mathfrak{M}(P)$.

Пусть теперь $\nu \in R_+^2$, $(\nu, \lambda^k) > 1$. Покажем, что $\nu \notin \mathfrak{M}(P)$. Для этого достаточно доказать, что при всех $M > 0$

$$\sup_{|\xi| \geq M} |\xi|^\nu \cdot \sum_{\alpha_1 \in N} \left|P^{(\alpha_1,0)}(\xi)/P(\xi)\right|^{1/\alpha_1} = \infty. \tag{1.6}$$

Обозначим

$$P_k(\xi) \equiv \sum_{(\beta, \lambda^k) = d_k} \gamma_\beta \xi^\beta.$$

Пусть $a \in R^2$, $a_1 \cdot a_2 \neq 0$ такая точка, что $P_k^{(1,0)}(a) \neq 0$. Существование такой точки непосредственно следует из вида $\mathfrak{N}(P)$ и определения P_k, так как, тогда $P_k^{(1,0)}(\xi) \not\equiv 0$.

Пусть $\xi^s = \left(a_1 s, a_2 s^{\lambda_2^k}\right)$, $s = 1, 2, \dots$ Так как для любого $\beta \in (P - P_k) = \{\beta \in (P) : (\beta, \lambda^k) < d_k\}$, и $\beta_1 \geq 1 \quad \beta_1 - 1 + \beta_2 \cdot \lambda_2^k < d_k - 1$, то при $s \to \infty$ имеем

$$\frac{|\xi^s|^\nu \left|P^{(1,0)}(\xi^s)\right|}{1 + |P(\xi^s)|} = \frac{|a|^\nu s^{(\nu,\lambda^k)} \left|P_k^{(1,0)}(\xi^s) + (P - P_k)^{(1,0)}(\xi^s)\right|}{1 + |P_k(\xi^s) + (P - P_k)(\xi^s)|} =$$

$$= \frac{|a|^\nu s^{(\nu,\lambda^k)} \left| s^{d_k - 1} P_k^{(1,0)}(a) + \sum\limits_{\substack{\beta \in (P - P_k) \\ \beta_1 \geq 1}} \gamma_\beta \cdot \beta_1 \cdot (\xi_1^s)^{\beta_1 - 1} (\xi_2^s)^{\beta_2} \right|}{1 + \left| s^{d_k} P_k(a) + \sum\limits_{\beta \in (P - P_k)} \gamma_\beta \cdot (\xi_1^s)^{\beta_1} (\xi_2^s)^{\beta_2} \right|} =$$

$$= \frac{|a|^\nu s^{(\nu,\lambda^k)} s^{d_k - 1} \left|P_k^{(1,0)}(a) + o(1)\right|}{1 + |s^{d_k} P_k(a) + o(s^{d_k})|}$$

Отсюда в силу условий $a_1 \cdot a_2 \neq 0$, $(\nu, \lambda^k) > 1$ и $P_k^{(1,0)}(a) \neq 0$ получаем соотношение (1.6). Лемма 1 доказана. □

Предложение 1. *Пусть* $\mathfrak{N}$ *многоугольник вида* (1.4), $\mathfrak{M} = \left\{\nu \in R_+^2,\ (\nu, \lambda^k) \leq 1\right\}$, *а*

$$\mathfrak{M}^j = \left\{\nu \in R_+^2,\ \nu/j \in \mathfrak{M}\right\} = \left\{\nu \in R_+^2,\ (\nu, \lambda^k) \leq j\right\} \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Тогда для любого $j \in N$,

$$\begin{aligned} &\mathfrak{N} \oplus \mathfrak{M}^j := \left\{\nu \in R_+^2,\ \nu = \beta + \mu,\ \beta \in \mathfrak{N},\ \mu \in \mathfrak{M}^j\right\} \subset \\ &\subset \mathcal{A}_j := \left\{\nu \in R_+^2, (\nu, \lambda^\ell) \leq d_\ell + j \ \ \ell = 1, \dots, k\right\}. \end{aligned}$$

Доказательство. следует из того, что для любых $\ell : 1 \leq \ell \leq k$ и $\nu \in \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{M}^j$ $(j = 1, 2, \dots)$

$$(\nu, \lambda^\ell) = (\beta + \mu, \lambda^\ell) = (\beta, \lambda^\ell) + (\mu, \lambda^\ell) \leq (\beta, \lambda^\ell) + (\mu, \lambda^k) \leq d_\ell + j.$$

□

Лемма 2. *Пусть* $\mathfrak{N}$ *многоугольник вида* (1.4) *с вершинами из* N_0^2, *а* $\mathfrak{M} = \{\nu \in R_+^2,\ (\nu, \lambda^k) \leq 1\}$. *Тогда для любого* $j \in N$

$$\mathcal{A}_j \cap N_0^2 = \left(\mathfrak{N} \oplus \mathfrak{M}^j\right) \cap N_0^2.$$

Доказательство. В силу предложения 1 достаточно показать, что для любых $j \in N$ и $\alpha \in (\mathcal{A}_j \setminus \mathcal{A}_{j-1}) \cap N_0^2$ $(\mathcal{A}_0 := \{0\})$ существуют мультииндексы $\beta \in \mathfrak{N}$ и $\gamma \in \mathfrak{M}^j$ такие, что $\alpha = \beta + \gamma$.

Пусть $j \in N$, $\alpha \in (\mathcal{A}_j \setminus \mathcal{A}_{j-1}) \cap N_0^2$ и $\left(0, \beta_2^{k+1}\right)$ вершина многоугольника $\mathfrak{N}$ лежащая на оси ординат, т.е. $\beta_2^{k+1}\lambda_2^k = d_k$. Если $\alpha_2 \geq \beta_2^{k+1}$, то $\alpha - (0, \beta_2^{k+1}) \in N_0^2$ (в силу условия леммы на многоугольник $\mathfrak{N}$) и

$$\left(\alpha - (0, \beta_2^{k+1}), \lambda^k\right) = (\alpha, \lambda^k) - \beta_2^{k+2}\lambda_2^k \leq d_k + j - d_k = j,$$

т.е. $\gamma \equiv \alpha - (0, \beta_2^{k+1}) \in \mathfrak{M}^j$.
Пусть $\alpha_2 \leq \beta_2^{k+1} - 1$, покажем, что тогда $\alpha_1 \geq j$. Предположим обратное, что $\alpha_1 < j$ $\alpha_1 \leq j - 1$. Тогда для любого $\ell : 1 \leq \ell \leq k$

$$(\alpha, \lambda^\ell) \leq j - 1 + \alpha_2 \cdot \lambda_2^\ell \leq j - 1 + \left(\beta_2^{k+2} - 1\right)\lambda_2^\ell \leq j + d_\ell - 1 - \lambda_2^\ell < d_\ell + j - 1.$$

Это противоречит условию $\alpha \in (\mathcal{A}_j \setminus \mathcal{A}_{j-1}) \cap N_0^2$ и показывает, что при $\alpha_2 \leq \beta_2^{k+1} - 1$ $\alpha_1 \geq j$. Тогда $\beta := \alpha - (j, 0) \in N_0^2$ и для любого $\ell : 1 \leq \ell \leq k$, $(\beta, \lambda^\ell) = (\alpha, \lambda^\ell) - j \leq d_\ell + j - j = d_\ell$, т.е. $\beta \in \mathfrak{N}$. Этим утверждение леммы доказано. □

Предложение 2. *Пусть $\mathfrak{N}$ – многоугольник вида (1.4) с вершинами из N_0^2, а $\mathfrak{M} = \left\{\nu \in R_+^2 : (\nu, \lambda^k) \leq 1\right\}$. Тогда для любого $j \in N$, $\mathfrak{M}^j \subset \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{M}^{j-1}$.*

Доказательство. Так как в силу условия предложения вершины $\mathfrak{N}$ лежат в N_0^2, то $(0,0)$, $(1,0)$ и $\left(0, 1/\lambda_2^k\right) \in \mathfrak{N}$, следовательно $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$. Поэтому

$$\mathfrak{M}^j = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}^{j-1} \subset \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{M}^{j-1}.$$

□

Для произвольной области $\Omega \subset E^2$ и регулярного оператора $P(D)$ с характеристическим многоугольником вида (1.4) обозначим через $\dot{H}^P(\Omega)$ пополнение множества $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|P(D)\cdot\|_{L_2(\Omega)} + \|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$.

Лемма 3. *Пусть $\Omega \subset E^2$ область, а $P(D) = P(D_1, D_2)$ регулярный оператор с харакеристическим многоугольником вида* (1.4). *Тогда существует постоянная $c = c(P) > 0$ такая, что*

$$\sum_{\alpha \subset \mathfrak{N} \cap N_0^2} \|D^\alpha \varphi\|_{L_2(\Omega)} \leq c\left(\|P(D)\varphi\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}\right) \quad \forall \varphi \in \dot{H}^P(\Omega).$$

Доказательство. получается непосредственно применением преобразовния Фурье, равенства Парсеваля и оценки (1.3). □

Предложение 3. *Для любых σ и $\delta > 0$ существуют функция $\psi(t) \in C_0^\infty(E^1)$ и постоянные $c_j > 0$, $j = 0, 1, \ldots$ не зависящие от σ и $\delta > 0$ такие, что $\psi(t) = 1$ при $|t| \le \sigma$, $\psi(t) = 0$ при $|t| \ge \sigma + \delta$ и*

$$\left|D^j \psi(t)\right| \le c_j \delta^{-j} \qquad j = 0, 1, \ldots, \; \forall t \in E^1.$$

Доказательство. Пусть

$$\varphi \in C_0^\infty(-1,1), \quad \varphi > 0, \quad \int \varphi(t) dt = 1,$$

а $\chi(t)$ характеристическая функция множества $\{t \, : \, |t| \le \sigma + \frac{\delta}{2}\}$. Обозначим $\psi(t) = \frac{2}{\delta} \int \chi(t-\tau) \varphi\left(\frac{2}{\delta} \cdot \tau\right) d\tau$. Прямыми вычислениями можно убедиться, что функция ψ удовлетворяет всем условиям предложения, при этом

$$c_j \le 2^j \int \left|D^j \varphi(t)\right| dt, \qquad j = 0, 1, \ldots.$$

□

2. Основной результат

Пусть $\kappa > 0$, $\Omega_\kappa = \left\{x \in E^2, \, |x_1| < \kappa, x_2 \in E^1\right\}$. Для любого $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_j > 0$, $j = 1, 2$ и вполне правильного многоугольника $\mathfrak{N}$ через $\Gamma^\lambda(\Omega_\kappa)$, $\tilde{\Gamma}^\lambda(\Omega_\kappa)$, $\Gamma^{\mathfrak{N}}(\Omega_\kappa)$ и $\tilde{\Gamma}^{\mathfrak{N}}(\Omega_\kappa)$ обозначим следующие классы Жевре

$$\Gamma^\lambda(\Omega_\kappa) = \Big\{f \in C^\infty(\Omega_\kappa), \text{для любого компакта } K \subset \Omega_\kappa, \text{существует } c = c(K,f) > 0, \text{ такая, что } \sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| \le c^{|\alpha|+1} \cdot \alpha_1^{\lambda_1 \cdot \alpha_1} \cdot \alpha_2^{\lambda_2 \cdot \alpha_2}, \text{ для любого } \alpha \in N_0^2\Big\}$$

$$\tilde{\Gamma}^\lambda(\Omega_\kappa) = \left\{f \in C^\infty(\Omega_\kappa), \text{для любого } \kappa_1 \in (0,\kappa), \text{ существует } c = c(\kappa_1, f) > 0, \text{ такая, что } \left(\int\limits_{\Omega_{\kappa_1}} |D^\alpha f(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} \le c^{|\alpha|+1} \cdot \alpha_1^{\lambda_1 \cdot \alpha_1} \cdot \alpha_2^{\lambda_2 \cdot \alpha_2}, \text{ для любого } \alpha \in N_0^2\right\}$$

$$\Gamma^{\mathfrak{N}}(\Omega_\kappa) = \Big\{f \in C^\infty(\Omega_\kappa), \text{ для любого компакта } K \subset \Omega_\kappa, \text{ существует } c = c(K,f) > 0, \text{ такая, что } \sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| \le c^{j+1} \cdot j^j, \text{ для любого } \alpha \in \mathfrak{N}^j \cap N_0^2, \, j \in N_0\Big\}$$

$$\tilde{\Gamma}^{\mathfrak{N}}(\Omega_\kappa) = \left\{f \in C^\infty(\Omega_\kappa), \text{ для любого } \kappa_1 \in (0,\kappa), \text{ существует } c = c(\kappa_1, f) > 0, \text{ такая, что } \left(\int\limits_{\Omega_{\kappa_1}} |D^\alpha f(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} \le c^{j+1} \cdot j^j \text{ для любого } \alpha \in \mathfrak{N}^j \cap N_0^2, j \in N_0\right\}.$$

Замечание 1. *Пользуясь неравенством Фридрихса (см.,* [4], *(11.4.7)) легко заметить, что $\tilde{\Gamma}^\lambda(\Omega_\kappa) \subset \Gamma^\lambda(\Omega_\kappa)$ и $\tilde{\Gamma}^{\mathfrak{N}}(\Omega_\kappa) \subset \Gamma^{\mathfrak{N}}(\Omega_\kappa)$.*

Лемма 4. *Пусть $\lambda = (1, \lambda_2)$, $\lambda_2 > 0$, а $\mathfrak{M} = \left\{\nu \in R_+^2, (\nu, \lambda) \le 1\right\}$. Тогда $\Gamma^\lambda(\Omega_\kappa) = \Gamma^{\mathfrak{M}}(\Omega_\kappa)$ и $\tilde{\Gamma}^\lambda(\Omega_\kappa) = \tilde{\Gamma}^{\mathfrak{M}}(\Omega_\kappa)$.*

Доказательство. Так как оба утверждения доказываются аналогично, то мы докажем только первое из них.

Пусть $f \in \Gamma^{\lambda}(\Omega_{\kappa})$, т.е. для любого компакта $K \subset \Omega_{\kappa}$ с некоторой постоянной $c_1 = c_1(K, f) > 0$

$$\sup_{x\in K} |D^{\alpha} f(x)| \le c_1^{|\alpha|+1} \cdot \alpha_1^{\alpha_1} \cdot \alpha_2^{\lambda_2\alpha_2}, \quad \alpha \in N_0^2. \tag{2.1}$$

Так как при всех $\alpha \in N_0^2$

$$\min\{1; \lambda_2\} \cdot (|\alpha| + 1) \le (\alpha, \lambda) + 1 \le \max\{1; \lambda_2\} \cdot (|\alpha| + 1), \tag{2.2}$$

то для любых $j \in N_0$ и $\alpha \in \mathfrak{M}^j \cap N_0^2$ $\;((\alpha, \lambda) \le j)$ из (2.1) имеем

$$\sup\nolimits_{x\in K} |D^{\alpha} f(x)| \le c_1^{[(\alpha,\lambda)+1]/\min\{1;\lambda_2\}} \cdot (\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2)^{\alpha_1} \cdot (\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2)^{\lambda_2\alpha_2} \cdot$$
$$\cdot \left(\tfrac{1}{\lambda_2}\right)^{\lambda_2\alpha_2} \le \left(\left(\tfrac{c_1}{\min\{1,\lambda_2\}}\right)^{1/\min\{1,\lambda_2\}}\right)^{j+1} j^j.$$

Это в силу произвольности компакта $K \subset \Omega_{\kappa}$ означает, что $f \in \Gamma^{\mathfrak{N}}(\Omega_{\kappa})$.

Пусть теперь $f \in \Gamma^{\mathfrak{M}}(\Omega_{\kappa})$, т.е. для любого компонента $K \subset \Omega_{\kappa}$ существует постоянная $c_2 = c_2(K, f) > 0$ такая, что

$$\sup_{x\in K} |D^{\alpha} f(x)| \le c_2^{j+1} \cdot j^j, \quad \alpha \in \mathfrak{M}^j \cap N_0^2,\ j \in N_0. \tag{2.3}$$

Пусть $j \in N$. Тогда $\alpha_1 = j$ при $\alpha = (\alpha_1, 0) \in \left(\mathfrak{M}^j \setminus \mathfrak{M}^{j-1}\right) \cap N_0^2$ и поэтому из (2.3) непосредственно следует

$$\sup_{x\in K} |D_1^{\alpha_1} f(x)| \le c_2^{j+1} \cdot j^j = c_2^{\alpha_1+1} \cdot \alpha_1^{\alpha_1} \quad \forall \alpha_1 \in N_0. \tag{2.4}$$

Так как для любого $j > 0$

$$\sup_{0<\alpha_1<j} \frac{j^j}{\alpha_1^{\alpha_1} \cdot (j - \alpha_1)^{j-\alpha_1}} \le 2^j,$$

и $j - \alpha_1 \ge \lambda_2\alpha_2 > 0$ при $\alpha_2 \neq 0, \alpha \in \left(\mathfrak{M}^j \setminus \mathfrak{M}^{j-1}\right) \bigcap N_0^2$, то в силу (2.2) и (2.3) имеем

$$\sup\nolimits_{x\in K} |D^{\alpha} f(x)| \le c_2^{j+1} \cdot j^j \le c_2^{(\alpha,\lambda)+2} \cdot 2^j \cdot \alpha_1^{\alpha_1} \cdot (j - \alpha_1)^{j-\alpha_1} \le$$
$$\le (2c_2)^{(\alpha,\lambda)+2} \cdot \alpha_1^{\alpha_1} \cdot (\lambda_2\alpha_2 + 1)^{\lambda_2\alpha_2+1} \le$$
$$\le (2c_2)^{(\alpha,\lambda)+2} \cdot \alpha_1^{\alpha_1} \cdot (2 \cdot \max\{1, \lambda_2\}\alpha_2)^{\lambda_2\alpha_2+1} \le$$
$$\le (4 \cdot c_2 \max\{1, \lambda_2\})^{(\alpha,\lambda)+2} \cdot 2 \cdot \max\{1, \lambda_2\} \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\lambda_2\alpha_2} \le$$
$$\le \left[(4 \cdot c_2 \max\{1, \lambda_2\})^{2\max\{1,\lambda_2\}}\right]^{|\alpha|+1} \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\lambda_2\alpha_2}.$$

Так как $\alpha_2 \le 2^{|\alpha|+1}$ при всех $\alpha_2 \in N$, то отсюда вместе с оценкой (2.4) получаем, что $f \in \Gamma^{\lambda}(\Omega_{\kappa})$. Лемма 4 доказана. $\square$

Из теоремы 3.2 работы [17] непосредственно следует, что если $\kappa > 0$ достаточно большое, а $P(D)$ регулярный оператор с характеристическим многоугольником вида (1.4), то для любого $\kappa_1 \in (0, \kappa)$

$$(2.5)\quad N(P,\kappa) \equiv \left\{ u,\ P(D)u = 0 \text{ в } \Omega_\kappa, \sum_{j=0}^{m_2} \left\| D_2^j u \right\|_{L_2} (\Omega_\kappa) < \infty \right\} \subset H^\infty_{(\Omega_{\kappa_1})} \subset C^\infty_{(\Omega_{\kappa_1})}$$

где $m_2 = ord_{\xi_2} P = d_k/\lambda_2^k$, а $H^\infty_{(\Omega_{\kappa_1})} = \left\{ f : D^\alpha f \in L_2(\Omega_{\kappa_1}), \forall \alpha \in N_0^2 \right\}$.

В дальнейшем будем считать, что κ настолько большое, что для регулярного оператора $P(D)$ с характеристическим многоугольником вида (1.4) выполняется вложение (2.5).

Для $u \in N(P,\kappa)$ и $\sigma \in (0,\kappa)$ обозначим

$$|||u,\sigma||| \equiv \sum_{\alpha \in \mathfrak{N} \cap N_0^2} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega_\sigma)}$$

$$|||u,\sigma|||_t = \begin{cases} \max\limits_{\alpha \in \mathfrak{M}^t \cap N_0^2} |||D^\alpha u, \sigma||| & \text{при } t > 0 \\ |||u,\sigma||| & \text{при } t \le 0 \end{cases}$$

где $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(P)$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(P)$.

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{N}$ многоугольник вида (1.4) с вершинами из N_0^2, $\mathfrak{M} = \{\nu \in R_+^2 : (\nu, \lambda^k) \le 1\}$, $\alpha \in \mathfrak{N} \cap N_0^2$, $\gamma_1 \le \alpha_1$ ($\gamma_1 \in N_0$), $j \in N$ и $\beta \in \mathfrak{M}^j \cap N_0^2$, а ψ функция из предложения 3. Тогда при всех*

$$u \in \bigcap_{0<\theta<\kappa} H^\infty(\Omega_\theta) \quad \text{и} \quad \delta \in (0, \kappa - \sigma),\ \ \sigma \in (0,\kappa)$$

$$(2.6)\qquad \left\| D_1^{\gamma_1} \psi(x_1) \cdot D_1^{\alpha_1 - \gamma_1 + \beta_1} D_2^{\alpha_2 + \beta_2} u(x) \right\|_{L_{(E^2)}} \le c\delta^{-\gamma_1} |||u, \sigma + \delta|||_{j - \gamma_1},$$

где $c = \max\limits_{1 \le r \le d_1} c_r$, а c_r, $r = 0, 1, \ldots$ постоянные из предложения 3.

Доказательство. Если $j \le \gamma_1$, то для любого $\ell : 1 \le \ell \le k$

$$\left((\alpha_1 - \gamma_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2), \lambda^\ell \right) = \left(\alpha, \lambda^\ell \right) - \left((\gamma_1, 0), \lambda^\ell \right) + (\beta, \lambda^\ell) \le d_\ell - \gamma_1 + j \le d_\ell,$$

т.е. $(\alpha_1 - \gamma_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2) \subset \mathfrak{N} \cap N_0^2$. Тогда оценка (2.6) непосредственно следует из предложения 3 и определения нормы $|||\cdot,\cdot|||_t$ при $t \le 0$. Если же $j - \gamma_1 > 0$, то $\left(\alpha + \beta - (\gamma_1, 0), \lambda^\ell \right) \le d_\ell + j - \gamma_1$, $\ell = 1, \ldots, k$, т.е. $\alpha + \beta - (\gamma_1, 0) \in \mathcal{A}_{j - \gamma_1} \cap N_0^2$. Тогда в силу леммы 2 имеем, что $\alpha + \beta - (\gamma_1, 0) = \mu + \nu$, где $\mu \in \mathfrak{N} \cap N_0^2$, а

$v \in \mathfrak{M}^{j-\gamma_1} \cap N_0^2$. Тогда в силу предложения 3

$$\left\| D_1^{\gamma_1}\psi(x_1) \cdot D_1^{\alpha_1-\gamma_1+\beta_1} D_2^{\alpha_2+\beta_2} u(x) \right\|_{L_2(E^2)} = \| D_1^{\gamma_1}\psi(x_1) D^\nu D^\mu u\|_{L_2((\Omega_{\sigma+\delta})} \leq$$
$$\leq c_{\gamma_1}\delta^{-\gamma_1} \|D^\nu D^\mu u\|_{L_2(\Omega_{\sigma+\delta})} \leq c\delta^{-\gamma_1} |||u, \sigma+\delta|||_{j-\gamma_1},$$

где $c = \max\limits_{1\leq j\leq \gamma_1} c_j, c_j$ постоянные из предложения 3. Лемма 5 доказана. □

Следствие 1. *Пусть* $P(D)$ *регулярный оператор с характеристическим многоугольником вида* (1.4), ψ *функция из предложения 3, а* $[P(D), \psi]$ *оператор коммутирования, т.е.* $[P(D), \psi]v \equiv P(D)(\psi v) - (P(D)\psi)v$. *Тогда с некоторой постоянной* $c > 0$ *при* $\delta \in (0, \kappa - \sigma)$ $(\sigma \in (0, \kappa))$

$$\|[P(D), \psi] D^\alpha u\|_{L_2(E^2)} \leq c \sum_{\ell-1}^{d_1} \delta^{-\ell} |||u, \sigma+\delta|||_{j-\ell}\,, \quad \forall u \in N(P, \kappa). \tag{2.7}$$

Доказательство. Так как $[P(D), \psi]$ представляется в виде линейной комбинации выражений

$$D_1^{\gamma_1}\psi(x_1) D_1^{\alpha_1-\gamma_1} D_2^{\alpha_1} \qquad \alpha \in \mathfrak{N} \cap N_0^2\,,\ \ \gamma_1 \leq \alpha_1\,,$$

то оценка (2.7) непосредственно следует из вложения (2.5) и леммы 5. □

Лемма 6. *Пусть* $m \in N$, $c > 0$, $w_{s,j} \geq 0$, $s = 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots s$ *и* $w_{s,j} \leq c$ *при* $j \leq 0$ *для всех* s. *Если с некоторой постоянной* $c_1 > 0$ *и для любых* s *и* $j \geq 0$

$$w_{s,j} \leq c_1 \cdot \sum_{\ell=1}^{m} w_{s,j-\ell}, \tag{2.8}$$

то

$$w_{s,j} \leq c_2^{j+1}, \qquad j = 1, \ldots, s, \tag{2.9}$$

где $c_2 = \max\{c_1 \cdot m; c; 1\}$.

Доказательство. проведем методом индукции по j для любого фиксированного s. Если $j = 1$, то в силу (2.8) имеем

$$w_{s,1} \leq c_1 \cdot \sum_{\ell=1}^{m} w_{s,1-\ell} \leq c_1 \cdot c \cdot m = (c_1 \cdot m) \cdot c \leq c_2^{1+1}.$$

Пусть оценка (2.9) верна при $1 \leq j \leq r \leq s-1$. Докажем его для $j = r+1$. Из оценки (2.8), в силу предположения индукции, учитывая что $c_2 \geq 1$, имеем

$$w_{s,r+1} \leq c_1 \cdot \sum_{\ell=1}^{m} w_{s,r+1-\ell} \leq c_1 \cdot \sum_{\ell=1}^{m} c_2^{r+2-\ell} \leq (c_1 \cdot m) \cdot c_2^{r+1} \leq c_2^{(r+1)+1}.$$

Лемма 6 доказана. □

Теорема 1. *Если $P(D)$ регулярный оператор с характеристическим многоугольником $\mathfrak{N}$ вида* (1.4)*, то при достаточно больших $\kappa > 0$*

$$N(P,\kappa) \subset \tilde{\Gamma}^{\mathfrak{N}}(\Omega_\kappa).$$

Доказательство. Пусть $\kappa > 0$ такое число для которого верно (2.5) и $\sigma \in (0,\kappa)$. Тогда на основании (2.5) при $\delta \in (0,\kappa-\sigma)$ и $j \in N$ имеем, что

$$|||u,\sigma|||_j = \max_{\alpha\in\mathfrak{M}^j\cap N_0^2} |||D^\alpha u,\sigma||| \le \max_{\alpha\in\mathfrak{M}^j\cap N_0^2} |||\psi(x_1)D^\alpha u(x),\sigma||| \le$$
$$\le \max_{\alpha\in\mathfrak{M}^j\cap N_0^2} \max_{\beta\in\mathfrak{N}\cap N_0^2} \left\|D^\beta\left(\psi(x_1)D^\alpha u(x)\right)\right\|_{L_2(E^2)}.$$

Отсюда в силу леммы 3 имеем с некоторой постоянной $c_1 > 0$

$$|||u,\sigma|||_j \le c_1 \max_{\alpha\in\mathfrak{M}^j\cap N_0^2} \left[\|P(D)\left(\psi(x_1)D^\alpha u(x)\right)\|_{L_2(E^2)} + \|\psi(x_1)D^\alpha u(x)\|_{L_2(E^2)}\right].$$

Так как $u \in N(P,\kappa)$, то отсюда в силу определения функции ψ имеем

(2.10)
$$|||u,\sigma|||_j \le c_1 \left[\max_{\alpha\in\mathfrak{M}^j\cap N_0^2} \|[P(D),\psi(x_1)]\, D^\alpha u(x)\|_{L_2(E^2)} + \|D^\alpha u(x)\|_{L_{2(\Omega_{\sigma+\delta})}}\right].$$

Из (2.10) в силу следствия 1, предложения 2 и определения функции ψ имеем, с некоторой постоянной $c_2 > 0$

$$|||u,\sigma|||_j \le c_2 \left(\sum_{\ell=1}^{d_1} \delta^{-\ell} |||u,\sigma+\delta|||_{j-\ell} + |||u,\sigma+\delta|||_{j-1}\right). \tag{2.11}$$

Пусть $j,s \in N$, $j \le s$, $0 < \kappa_1 < \kappa$, $\sigma = \kappa_1 - \frac{j}{s}\,a$, $0 < a < \frac{\kappa-\kappa_1}{2d_1}$, $\delta = \frac{a}{s}$. Тогда из (2.11) имеем

(2.12)
$$\left|\left|\left|u,\kappa_1 - \frac{ja}{s}\right|\right|\right|_j \le c_2 \sum_{\ell=1}^{d_1} \left(\frac{s}{a}\right)^\ell \left|\left|\left|u,\kappa_1 - \frac{(j-1)}{s}\,a\right|\right|\right|_{j-\ell} + \left|\left|\left|u,\kappa_1 - \frac{(j-1)}{s}\,a\right|\right|\right|_{j-1}.$$

Умножив обе части неравенства (2.12) на s^{-j} получим

$$s^{-j}\left|\left|\left|u,\kappa_1 - \frac{ja}{s}\right|\right|\right|_j \le c_2 \left(\sum_{\ell=1}^{d_1} \frac{s^{-(j-\ell)}}{a^\ell} \left|\left|\left|u,\kappa_1 - \frac{(j-1)}{s}\,a\right|\right|\right|_{j-\ell} + \right.$$
$$\left. + s^{-j}\left|\left|\left|u,\kappa_1 - \frac{(j-1)}{s}\,a\right|\right|\right|_{j-1}\right).$$

Так как при $1 \le \ell \le d_1$ $\kappa_1 - \frac{j-1}{s}\,a \le \kappa_1 - \frac{j-\ell}{s}\,a < \kappa$, то отсюда, с некоторой постоянной $c_3 > 0$ имеем

$$s^{-j}\left|\left|\left|u,\kappa_1 - \frac{ja}{s}\right|\right|\right|_j \le c_3 \sum_{\ell=1}^{d_1} s^{-(j-\ell)} \left|\left|\left|u,\kappa_1 - \frac{(j-\ell)a}{s}\right|\right|\right|_{j-\ell}. \tag{2.13}$$

Положим

$$w_{s,j} = \begin{cases} s^{-j} \left|\left|\left|u, \kappa_1 - \frac{ja}{s}\right|\right|\right|_j & \text{при } \ s = 1, 2, \ldots \ , j = 0, 1, \ldots \\ \left|\left|\left|u, \frac{\kappa+\kappa_1}{2}\right|\right|\right| & \text{при } \ s = 1, 2, \ldots \ , j = 0, -1, -2, \ldots . \end{cases}$$

Из оценки (2.13) получаем, что

$$w_{s,j} \leq c_3 \sum_{\ell=1}^{d_1} w_{s,j-\ell} \qquad s, j = 1, 2, \ldots$$

Отсюда в силу леммы 6 с некоторой постоянной $c_4 > 0$ имеем

$$w_{s,j} \leq c_4^{j+1} \qquad j = 1, \ldots, s. \tag{2.14}$$

При $j = s$ из (2.14) в силу наших обозначений имеем

$$j^{-j} |||u, \kappa_1 - a|||_j \leq c_4^{j+1} \qquad j = 1, 2, \ldots$$

Отсюда получаем

$$|||u, \kappa_1 - a|||_j \leq c_4^{j+1} j^j \qquad j = 1, 2, \ldots .$$

Имея в виду, что $a \in (0, \frac{\kappa-\kappa_1}{2d})$ и в силу произвольности $\kappa_1 \in (0, \kappa)$ получаем утверждение теоремы. Теорема 1 доказана. □

Следствие 2. При условиях теоремы 1 любое решение $u \in N(P, \kappa)$ является аналитической по x_1 функцией.

Доказательство. непосредственно следует из теоремы 1, леммы 4 и замечания 1, так как тогда имеем $N(P, \kappa) \subset \Gamma^{(1, \lambda_2^k)}(\Omega_\kappa)$. □

Abstract. The paper considers regular, almost hypoelliptic equations in an infinite strip. It is proved that all solutions almost hypoelliptic equation from some specific space belong to the Gevrey class.

Список литературы

[1] S. G. Bernshtaun, "Sur la nature analytique des solutions des equations aux derivies partielles du second ordre", Math. Ann, **59**, 20 – 76 (1904).
[2] H. Weyl, "The method of ortogonal projection in potential theory", Duke Math. J., **7**, 411 – 444 (1940).
[3] I. G. Petrovski, "Sur l'analyticite des solutions des systemes d'equations differentielles", Мат. сб., **17** (59), 289 – 370 (1945).
[4] Л. Хермандер, Анализ Линейных Дифференциальных Операторов с Частными Производными, **2**, 1986.
[5] L. Hermander, "On interior regularity of solutions of partial differential equations", Comm. Pure. Appl. Math., **11**, 197 – 218 (1956).
[6] Г. Г. Казарян, "О функциональном показателе гипоэллиптичности", Мат сб., **11**, 339 – 356 (1985).

[7] Г. О. Акопян, В. Н. Маргарян, "О решениях типа Жевре гипоэллиптических уравнений" Известия НАН Армении, серия Математика, **31** (2), 33 – 47 (1996).
[8] Г. О. Акопян, В. Н. Маргарян, "О решениях класса Жевре гипоэллиптических уравнений", Известия НАН Армении, серия Математика, **33** (1), 40 – 52 (1998).
[9] В. И. Буренков, "Аналог теоремы Хермандера о гипоэллиптичности для функций обращающихся в нуль на бесконечности", Сб. докл. VIII Советско-Чехословацкого семинара, Ереван, 63 – 67 (1982).
[10] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Оценки решений не гипоэллиптических уравнений с данным носителем гипоэллиптичности", Известия АН Арм.ССР, серия Математика, XXII (5), 315 – 336 (1987).
[11] G. O. Hakobyan, V. G. Margaryan, "A behavior of huger order derivatives of the solutions of one slass non hipoelliptic equations in the infinite sylinder", Kluwer. Acad. Publ. Proceed. of the ISAAC congres Fukuoka, Japan, **2**, 1143 – 1147 (2000).
[12] D. Calvo, "Cauchy problem in multi-anisotropic Gevrey classes for weakly hyperbolic operators", Preprint del Dipartamento di Matematica dell Universita di Pisa, Submited to Boll.U.M.I., ser B.
[13] D. Calvo, A. Morando, "Multianisotropic classes and ultradistributions", Quaderno del Dipartamento di Matematica dell Universita di Torono, **41** (2002).
[14] Г. Г. Казарян, "On Almost-Hypoelliptic Plynomials", Dokl. Ross. Acad. Nauk, **398**, (6), 701 – 703 (2004).
[15] В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, **91**, 59 – 81 (1967).
[16] L. R. Volevich, S. G. Gindikin, "The Method of Newton's polyhedron in the theory of PDE", Kluwer (1992).
[17] С. Р. Айрапетян, "О гладкости решений одного класса регулярных уравнений в полосе", Известия НАН Армении, серия Математика, **45** (4), 3 – 24 (2010).

Поступила 7 октября 2009