

ЛАКУНАРНЫЕ РЯДЫ В ПРОСТРАНСТВАХ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ В КРУГЕ

К. Л. АВЕТИСЯН

Ереванский государственный университет

E-mail: *avetkaren@ysu.am*

Аннотация. В статье установлено необходимое и достаточное условие принадлежности лакунарных степенных рядов пространствам со смешанной нормой в единичном круге. В качестве приложения получены точные поточечные оценки лакунарных рядов.

MSC2010 number: 30B10, 30H05, 30D55.

Ключевые слова: Лакунарные ряды; пропуски Адамара; пространства со смешанной нормой.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{D}$ – единичный круг комплексной плоскости, а $\mathbb{T}$ – его граница. Через $H(\mathbb{D})$ обозначим множество голоморфных функций в $\mathbb{D}$. Для измеримой в $\mathbb{D}$ функции $f(z) = f(r\zeta)$ ее интегральные средние порядка p обозначаются, как обычно, через

$$M_p(f; r) = \|f(r\cdot)\|_{L^p(\mathbb{T}; dm)}, \quad 0 \leq r < 1, \quad 0 < p \leq \infty,$$

где dm – мера Лебега на окружности $\mathbb{T}$. Семейство голоморфных функций $f(z)$, для которых $\|f\|_{H^p} = \sup_{0 < r < 1} M_p(f; r) < +\infty$, есть обычное пространство Харди H^p . Квазинормированное пространство $H(p, q, \alpha)$ ($0 < p, q \leq \infty, \alpha > 0$) – это множество тех функций $f(z)$, голоморфных в круге $\mathbb{D}$, для которых конечна квазинорма

$$\|f\|_{p, q, \alpha} = \begin{cases} \left(\int_0^1 (1-r)^{\alpha q - 1} M_p^q(f; r) dr \right)^{1/q}, & 0 < q < \infty, \\ \sup_{0 < r < 1} (1-r)^\alpha M_p(f; r), & q = \infty. \end{cases}$$

Пространства $H(p, q, \alpha)$ со смешанной нормой тесно связаны со многими известными функциональными пространствами такими, как весовые пространства

Харди ($q = \infty$), аналитические пространства Бесова, Соболева, Блоха, Дирихле и др., см. [1], [2]. Если $(1-r)^\alpha M_p(f; r) = o(1)$ при $r \rightarrow 1^-$, то говорят, что голоморфная функция f принадлежит малому пространству $H_0(p, \infty, \alpha)$.

Символы $C(\alpha, \beta, \dots)$, c_α и т.п. всюду будут обозначать положительные постоянные, возможно различные в разных формулах и зависящие только от указанных параметров $\alpha, \beta, \dots$. Символ $A \approx B$ означает, что существуют положительные постоянные C_1 и C_2 (несущественные по своим значениям) такие, что $C_1|A| \leq |B| \leq C_2|A|$.

Лемма 1. Пусть $f \in H(p, q, \alpha)$ для некоторых $0 < p \leq \infty, 0 < q < \infty, \alpha > 0$, и $f_\rho(z) = f(\rho z)$ – растянутая функция. Тогда $\|f - f_\rho\|_{p, q, \alpha} = o(1)$ при $\rho \rightarrow 1^-$.

Доказательство леммы довольно стандартно, и его можно найти, например, в [3, Глор. 2.3], см. также [4] при $p = q$.

Лемма 2. Пусть $\alpha > 0, p > 0, a_k \geq 0, I_k = \{j \in \mathbb{N}; 2^k \leq j < 2^{k+1}\}, k = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\int_0^1 (1-r)^{\alpha-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \right)^p dr \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\alpha k}} \left(\sum_{j \in I_k} a_j \right)^p,$$

где участвующие в двусторонней оценке постоянные $C_i = C_i(p, \alpha)$, $i = 1, 2$ зависят только от p и α .

Лемма 3. Пусть $p > 0, a_k \geq 0, N \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\min\{1, N^{p-1}\} \left(\sum_{k=1}^N a_k^p \right) \leq \left(\sum_{k=1}^N a_k \right)^p \leq \max\{1, N^{p-1}\} \left(\sum_{k=1}^N a_k^p \right).$$

Лемма 2 доказана Мательевичем и Павловичем [5], а лемма 3 является следствием неравенства Гельдера.

Последовательность натуральных чисел $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ называется лакунарной (по Адамару), если существует постоянная $\lambda > 1$ такая, что $\frac{m_{k+1}}{m_k} \geq \lambda$ для всех $k = 0, 1, 2, \dots$. Соответствующий степенной ряд называется лакунарным. Классическая теорема Пэли характеризует лакунарные ряды в пространствах Харди.

Теорема А. (Пэли, [6, Глава V, Теорема 8.20]) Пусть $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ – произвольная лакунарная последовательность, и $f(z)$ – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, заданная сходящимся лакунарным рядом $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{m_k}$. Тогда для любого $p, 0 < p < \infty$,

функция f принадлежит классу Харди H^p тогда и только тогда, когда $\{a_k\} \in \ell^2$. Более того, соответствующие нормы эквивалентны:

$$\|f\|_{H^p} \approx \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Лакунарные ряды в классических функциональных пространствах, таких как пространства Блоха, Бесова, Дирихле, Q-пространства, широко изучались в последнее время, см. [7]–[17]. В недавней работе автора [18] доказана версия следующей теоремы (для высших размерностей см. [19]), которая характеризует лакунарные ряды в весовых пространствах Харди–Блоха.

Теорема В. ([18], [19]) Пусть $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ – произвольная лакунарная последовательность, $\alpha > 0$, и $f(z)$ – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, заданная сходящимся лакунарным рядом $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{m_k}$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- (a) $f(z) \in H(\infty, \infty, \alpha)$;
- (b) $f(z) \in H(p, \infty, \alpha)$ для некоторого $p \in (0, \infty)$;
- (c) $f(z) \in H(p, \infty, \alpha)$ для всех $p \in (0, \infty)$;
- (d) $\sup_{k \geq 0} \frac{|a_k|}{m_k^\alpha} < +\infty$.

Более того, соответствующие нормы эквивалентны:

$$\|f\|_{\infty, \infty, \alpha} \approx \|f\|_{p, \infty, \alpha} \approx \sup_{k \geq 0} \frac{|a_k|}{m_k^\alpha}.$$

Основная цель настоящей статьи – распространить Теорему В на все значения $q \in (0, \infty)$, т.е. на случай пространств со смешанной нормой $H(p, q, \alpha)$. В качестве приложения, затем мы выводим точные поточечные оценки лакунарных рядов из $H(p, q, \alpha)$.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Недавно Стевич [14, 15] получил характеризацию лакунарных рядов и их производных в $H(p, q, \alpha)$ для конечных значений p . Ниже в теоремах 1 и 2 мы обобщаем и уточняем его результаты с использованием дробного интегро-дифференцирования произвольного порядка.

Теорема 1. Пусть $0 < q < \infty$, $\alpha > 0$, $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ – произвольная лакунарная последовательность, и $f(z)$ – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, заданная сходящимся

лакунарным рядом $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{m_k}$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- (a) $f(z) \in H(\infty, q, \alpha)$;
- (b) $f(z) \in H(p, q, \alpha)$ для некоторого $p \in (0, \infty)$;
- (c) $f(z) \in H(p, q, \alpha)$ для всех $p \in (0, \infty)$;
- (d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^q}{m_k^{\alpha q}} < +\infty$.

Более того, соответствующие нормы эквивалентны:

$$\|f\|_{\infty, q, \alpha} \approx \|f\|_{p, q, \alpha} \approx \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^q}{m_k^{\alpha q}} \right)^{1/q}.$$

Доказательство. Импликация (a) $\Rightarrow$ (b) очевидна ввиду элементарного вложения $H(\infty, q, \alpha) \subset H(p, q, \alpha)$.

Импликация (b) $\Rightarrow$ (c) следует из неравенств Пэли Теоремы А, которая утверждает, что $M_p(f; r) \approx M_s(f; r)$ для любого $s, 0 < s < \infty$. Докажем импликацию (c) $\Rightarrow$ (d). По условию (c), в частности, имеем $f(z) \in H(2, q, \alpha)$. Тогда по леммам 2 и 3

$$\begin{aligned} \|f\|_{2, q, \alpha}^q &= \int_0^1 (1-r)^{\alpha q - 1} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{q/2} dr = \\ &= \int_0^1 (1-r)^{\alpha q - 1} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^{m_k} e^{im_k \theta} \right|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{q/2} dr \geq \\ &\geq C \int_0^1 (1-r)^{\alpha q - 1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2m_k} \right)^{q/2} dr \geq \\ &\geq C \int_0^1 (1-r)^{\alpha q - 1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{m_k} \right)^{q/2} dr \geq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k\alpha q}} \left(\sum_{m_j \in I_k} |a_j|^2 \right)^{q/2} \geq \\ &\geq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k\alpha q}} \left(\sum_{m_j \in I_k} |a_j|^q \right) \geq C \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m_j \in I_k} \frac{|a_j|^q}{m_j^{\alpha q}} \right) = C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^q}{m_k^{\alpha q}}, \end{aligned}$$

где $C = C(p, q, \alpha, \lambda)$.

Для доказательства импликации (d) $\Rightarrow$ (a), вновь применим леммы 2 и 3, учитывая, что количество целых чисел m_j , содержащихся в интервале I_k , не превышает $N = 1 + [\log_{\lambda} 2]$,

$$\|f\|_{\infty, q, \alpha}^q = \int_0^1 (1-r)^{\alpha q - 1} M_{\infty}^q(f; r) dr =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} \left(\sup_{\theta \in (-\pi, \pi)} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^{m_k} e^{im_k \theta} \right| \right)^q dr \leq \\
&\leq C \int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^{m_k} \right)^q dr \leq \\
&\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k\alpha q}} \left(\sum_{m_j \in I_k} |a_j| \right)^q \leq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k\alpha q}} \left(\sum_{m_j \in I_k} |a_j|^q \right) \leq \\
&\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m_j \in I_k} \frac{|a_j|^q}{m_j^{\alpha q}} \right) = C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^q}{m_k^{\alpha q}},
\end{aligned}$$

где $C = C(q, \alpha, \lambda)$. Это завершает доказательство теоремы 1. $\square$

Определим оператор дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{-\alpha} f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)} a_k z^k, \quad z \in \mathbb{D}, \alpha > 0, \\
\mathcal{D}^{\alpha} f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1+\alpha)}{\Gamma(k+1)} a_k z^k, \quad z \in \mathbb{D}, \alpha > 0,
\end{aligned}$$

ср. [2], [20, Раздел 22, (22.51)].

Теорема 2. Пусть $0 < q < \infty, \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}, \{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ – произвольная лакунарная последовательность, $f(z)$ – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, заданная сходящимся лакунарным рядом $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{m_k}$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- (a) $\mathcal{D}^{\beta} f(z) \in H(\infty, q, \alpha)$;
- (b) $\mathcal{D}^{\beta} f(z) \in H(p, q, \alpha)$ для некоторого $p \in (0, \infty)$;
- (c) $\mathcal{D}^{\beta} f(z) \in H(p, q, \alpha)$ для всех $p \in (0, \infty)$;
- (d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^q}{m_k^{(\alpha-\beta)q}} < +\infty$.

Более того, соответствующие нормы эквивалентны:

$$\|\mathcal{D}^{\beta} f\|_{\infty, q, \alpha} \approx \|\mathcal{D}^{\beta} f\|_{p, q, \alpha} \approx \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^q}{m_k^{(\alpha-\beta)q}} \right)^{1/q}.$$

Доказательство. Разложение в ряд функции $\mathcal{D}^{\beta} f(z)$ также лакунарно. Поэтому, мы можем применить теорему 1 к каждой из функций

$$\mathcal{D}^{\beta} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m_k+1+\beta)}{\Gamma(m_k+1)} a_k z^{m_k},$$

$$\mathcal{D}^{-\beta} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m_k + 1)}{\Gamma(m_k + 1 + \beta)} a_k z^{m_k}.$$

Далее, формула Стирлинга утверждает, что для $\beta > 0$

$$\frac{\Gamma(m_k + 1 + \beta)}{\Gamma(m_k + 1)} \sim m_k^\beta \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\|\mathcal{D}^\beta f\|_{p,q,\alpha}^q \approx \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(m_k + 1 + \beta)}{\Gamma(m_k + 1)} \right)^q \frac{|a_k|^q}{m_k^{\alpha q}} \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^q}{m_k^{(\alpha-\beta)q}}.$$

□

Замечание 1. Легко видеть, что теорема 2 остается верной, если мы заменим оператор Римана-Лиувилля $\mathcal{D}^\beta$ на дробный оператор Адамара

$$\mathcal{F}^\alpha f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (1+k)^\alpha a_k z^k, \quad z \in \mathbb{D}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Замечание 2. Подставляя $\beta - \alpha$ вместо α , убеждаемся, что теорема 2 покрывает все пространства Бесова и обобщает предыдущие аналогичные результаты из [7, 8, 13, 17].

Теоремы А и В допускают аналогичные обобщения с дробными производными, доказательства которых мы опустим.

Теорема 3. Пусть $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ – произвольная лакунарная последовательность, $\beta \in \mathbb{R}$, и $f(z)$ – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, заданная сходящимся лакунарным рядом $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{m_k}$. Тогда для любого p , $0 < p < \infty$, функция $\mathcal{D}^\beta f$ принадлежит классу Харди H^p тогда и только тогда, когда $\{m_k^\beta a_k\} \in \ell^2$. Более того, соответствующие нормы эквивалентны: $\|\mathcal{D}^\beta f\|_{H^p} \approx \left(\sum_{k=0}^{\infty} m_k^{2\beta} |a_k|^2 \right)^{1/2}$.

Теорема 4. Пусть $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ – произвольная лакунарная последовательность, $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$, и $f(z)$ – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, заданная сходящимся лакунарным рядом $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{m_k}$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- (a) $\mathcal{D}^\beta f(z) \in H(\infty, \infty, \alpha)$;
- (b) $\mathcal{D}^\beta f(z) \in H(p, \infty, \alpha)$ для некоторого $p \in (0, \infty)$;
- (c) $\mathcal{D}^\beta f(z) \in H(p, \infty, \alpha)$ для всех $p \in (0, \infty)$;
- (d) $\sup_{k \geq 0} \frac{|a_k|}{m_k^{\alpha-\beta}} < +\infty$.

Более того, соответствующие нормы эквивалентны:

$$\|\mathcal{D}^\beta f\|_{\infty, \infty, \alpha} \approx \|\mathcal{D}^\beta f\|_{p, \infty, \alpha} \approx \sup_{k \geq 0} \frac{|a_k|}{m_k^{\alpha-\beta}}.$$

Теорема 5. Пусть $\{m_k\}_{k=0}^\infty$ – произвольная лакунарная последовательность, $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$, и $f(z)$ – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, заданная сходящимся лакунарным рядом $f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^{m_k}$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- (a) $\mathcal{D}^\beta f(z) \in H_0(\infty, \infty, \alpha)$;
- (b) $\mathcal{D}^\beta f(z) \in H_0(p, \infty, \alpha)$ для некоторого $p \in (0, \infty)$;
- (c) $\mathcal{D}^\beta f(z) \in H_0(p, \infty, \alpha)$ для всех $p \in (0, \infty)$;
- (d) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{m_k^{\alpha-\beta}} = 0$.

Замечание 3. Следует отметить, что теорема 3 включает случай голоморфных пространств Харди–Соболева [21], содержащих те голоморфные функции, чьи производные из H^p . Теоремы 4 и 5 покрывают все весовые пространства Блоха и малые пространства Блоха, обобщая предыдущие известные результаты из [7], [8], [10], [13], [17], [22].

3. ПОТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ ЛАКУНАРНЫХ РЯДОВ

Хорошо известно, что произвольная функция $f(z) \in H(p, q, \alpha)$ удовлетворяет поточечной оценке

$$(3.1) \quad |f(z)| \leq C(p, q, \alpha) \frac{\|f\|_{p, q, \alpha}}{(1 - |z|)^{\alpha+1/p}}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Неравенство (3.1) следует из оценки Харди–Литтлвуда

$$M_\infty(f; \rho) \leq C(1 - \rho)^{-1/p} M_p(f; \rho), \quad 0 < \rho < 1,$$

которую можно найти в [1, Теор.5.9], или в [3, Прор.2.1]. Действительно, достаточно возвести последнее неравенство в степень $q < \infty$ и проинтегрировать с весом $(1 - \rho)^{\alpha q - 1}$ по интервалу $(r, 1)$,

$$\int_r^1 (1 - \rho)^{q/p + \alpha q - 1} M_\infty^q(f; \rho) d\rho \leq C \int_r^1 (1 - \rho)^{\alpha q - 1} M_p^q(f; \rho) d\rho, \quad 0 < r < 1.$$

Ввиду монотонности величины $M_\infty(f; \rho)$ получаем

$$M_\infty^q(f; r) \int_r^1 (1 - \rho)^{q/p + \alpha q - 1} d\rho \leq C \|f\|_{p, q, \alpha}^q,$$

что немедленно влечет (3.1).

Показатель $\alpha + 1/p$ в (3.1) наилучший для произвольных функций. Действительно, вложение $H(p, q, \alpha) \subset H(\infty, \infty, \alpha + 1/p - \varepsilon)$ ложно для любого малого $\varepsilon > 0$. Можно проверить, что функция

$$g(z) = (1 - z)^{-(\alpha + 1/p)} \left(\log \frac{e}{1 - z} \right)^{-2/q}, \quad z \in \mathbb{D},$$

принадлежит $H(p, q, \alpha)$, но не принадлежит $H(\infty, \infty, \alpha + 1/p - \varepsilon)$.

Следующая теорема показывает, что лакунарные ряды из $H(p, q, \alpha)$ имеют более медленный рост вблизи границы, чем произвольные функции из $H(p, q, \alpha)$.

Теорема 6. Пусть $0 < p, q \leq \infty, \alpha > 0$, $\{m_k\}_{k=0}^\infty$ — произвольная лакунарная последовательность, и $f(z)$ — функция из $H(p, q, \alpha)$, заданная сходящимся лакунарным рядом $f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^{m_k}$. Тогда

$$(3.2) \quad |f(z)| \leq C(\lambda, p, q, \alpha) \frac{\|f\|_{p, q, \alpha}}{(1 - |z|)^\alpha}, \quad z \in \mathbb{D},$$

где показатель α не может быть уменьшен.

Доказательство. Для функции $f \in H(p, q, \alpha)$ с $0 < q < \infty$, по теореме 1 имеем

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{|a_k|^q}{m_k^{\alpha q}} \leq C \|f\|_{p, q, \alpha}^q, \quad \text{и} \quad \frac{|a_k|^q}{m_k^{\alpha q}} \leq C \|f\|_{p, q, \alpha}^q, \quad k \geq 0,$$

или

$$(3.3) \quad |a_k| \leq C \|f\|_{p, q, \alpha} m_k^\alpha \quad \text{для всех} \quad k \geq 0,$$

где $C = C(\lambda, p, q, \alpha)$ независима от f . Для $q = \infty$ и функции $f \in H(p, \infty, \alpha)$, последнее неравенство следует непосредственно из Теоремы В. Таким образом, любой лакунарный ряд f из $H(p, q, \alpha)$ с $0 < q \leq \infty$ удовлетворяет оценке (3.3). Следовательно,

$$(3.4) \quad \begin{aligned} |f(z)| &\leq \sum_{k=0}^\infty |a_k| |z|^{m_k} \leq C \|f\|_{p, q, \alpha} \sum_{k=0}^\infty m_k^\alpha |z|^{m_k} = \\ &= C \|f\|_{p, q, \alpha} \sum_{k=0}^\infty \sum_{m_j \in I_k} m_j^\alpha |z|^{m_j}, \end{aligned}$$

где $I_k = \{i \in \mathbb{N}; 2^k \leq i < 2^{k+1}\}$. Количество целых чисел m_j , содержащихся в I_k , не превышает $N = 1 + [\log_\lambda 2]$. Поэтому внутренняя сумма в (3.4) может быть оценена следующим образом

$$\sum_{m_j \in I_k} m_j^\alpha |z|^{m_j} \leq N 2^{(k+1)\alpha} |z|^{2^k}.$$

Значит, из (3.4) следует, что

$$|f(z)| \leq CN \|f\|_{p,q,\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(k+1)\alpha} |z|^{2^k} \approx \frac{\|f\|_{p,q,\alpha}}{(1-|z|)^\alpha}.$$

Последнюю оценку можно найти, например, в [1, стр. 66].

Теперь покажем, что показатель α в (3.2) наилучший. Предположим, что существует показатель $\beta, 0 < \beta < \alpha$, такой, что для каждого лакунарного ряда $f \in H(p, q, \alpha)$ найдется постоянная $C > 0$ такая, что

$$(3.5) \quad |f(z)| \leq \frac{C \|f\|_{p,q,\alpha}}{(1-|z|)^\beta}, \quad z \in \mathbb{D},$$

т.е. $f \in H(\infty, \infty, \beta)$. Выбирая γ таким, что $\beta < \gamma < \alpha$, определим контрпример

$$f_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\gamma} z^{2^k}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

По Теоремам В и 1 функция $f_0(z)$ принадлежит $H(p, q, \alpha)$, но, с другой стороны, $f_0(z) \notin H(\infty, \infty, \beta)$. Это противоречит (3.5) и завершает доказательство теоремы. $\square$

Хотя мы не можем уменьшить показатель α в (3.2), тем не менее, мы можем уточнить оценки (3.2) в следующем смысле.

Теорема 7. Пусть $0 < p \leq \infty$, $0 < q < \infty$, $\alpha > 0$, $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ – произвольная лакунарная последовательность, и $f(z)$ – функция из $H(p, q, \alpha)$, заданная сходящимся лакунарным рядом $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{m_k}$. Тогда

$$(3.6) \quad f(z) = o\left(\frac{1}{(1-|z|)^\alpha}\right) \quad \text{при} \quad |z| \rightarrow 1^-.$$

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ по Лемме 1 можем выбрать $\rho_0 \in (0, 1)$ настолько близким к 1, чтобы

$$\|f - f_\rho\|_{p,q,\alpha} < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad \rho \in (\rho_0, 1),$$

и, кроме того, $(1-r)^\alpha < \varepsilon$ для всех $r \in (\rho_0, 1)$. По теореме 6 для функции $f - f_\rho \in H(p, q, \alpha)$ будем иметь оценку

$$|f(z) - f_\rho(z)| \leq C(\lambda, p, q, \alpha) \frac{\|f - f_\rho\|_{p,q,\alpha}}{(1-|z|)^\alpha}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Для фиксированного $\rho \in (\rho_0, 1)$ получим

$$\begin{aligned} (1-|z|)^\alpha |f(z)| &\leq (1-r)^\alpha |f(z) - f_\rho(z)| + (1-r)^\alpha |f_\rho(z)| \leq \\ &\leq C \|f - f_\rho\|_{p,q,\alpha} + C_\rho (1-r)^\alpha < C\varepsilon \end{aligned}$$

для всех $r \in (\rho_0, 1)$. $\square$

Разумеется, показатель α в (3.6) не может быть уменьшен ввиду теоремы 6.

Abstract. The paper establishes a necessary and sufficient condition under which a lacunary series belong to a mixed norm space of functions holomorphic in the unit disc. As a corollary, some sharp pointwise estimates for lacunary series are obtained.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Duren, Theory of H^p Spaces, Academic Press, New York (1970).
- [2] H. Hedenmalm, B. Korenblum and K. Zhu, Theory of Bergman Spaces, Springer-Verlag, New York / Berlin / Heidelberg (2000).
- [3] S. Gadbois, "Mixed-norm generalizations of Bergman spaces and duality", Proc. Amer. Math. Soc., **104**, 1171 – 1180 (1988).
- [4] М. М. Джрбашян, "К проблеме представимости аналитических функций", Сообщ. Инст. Матем. Мех. АН Арм. ССР, **2**, 3 – 40 (1948).
- [5] M. Mateljević and M. Pavlović, " L^p -behavior of power series with positive coefficients and Hardy spaces", Proc. Amer. Math. Soc., **87**, 309 – 316 (1983).
- [6] А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, Мир, М. (1965).
- [7] R. Aulaskari, J. Xiao and R. Zhao, "On subspaces and subsets of BMOA and UBC", Analysis, **15**, 101 – 121 (1995).
- [8] R. Aulaskari and G. Csordas, "Besov spaces and the $Q_{q,0}$ classes", Acta Sci. Math. (Szeged), **60**, 31 – 48 (1995).
- [9] D. Girela, M. Pavlović and J. A. Peláez, "Spaces of analytic functions of Hardy-Bloch type", J. d'Analyse Math., **100**, 53 – 83 (2006).
- [10] D. Girela and J. A. Peláez, "Integral means of analytic functions", Ann. Acad. Sci. Fenn., **29**, 459 – 469 (2004).
- [11] D. Girela and J. A. Peláez, "Growth properties and sequences of zeros of analytic functions in spaces of Dirichlet type", J. Austral. Math. Soc., **80**, 397 – 418 (2006).
- [12] D. Girela and J. A. Peláez, "Carleson measures for spaces of Dirichlet type", Integral Equations Oper. Theory, **55**, 415 – 427 (2006).
- [13] J. Miao, "A property of analytic functions with Hadamard gaps", Bull. Austral. Math. Soc., **45**, 105 – 112 (1992).
- [14] S. Stević, "A generalization of a result of Choa on analytic functions with Hadamard gaps", J. Korean Math. Soc., **43**, 579 – 591 (2006).
- [15] S. Stević, "On Bloch-type functions with Hadamard gaps", Abstract Appl. Anal., **2007**, Article ID 39176, 8 pages (2007).
- [16] H. Wulan and K. Zhu, Bloch and BMO functions in the unit ball", Complex Var. Elliptic Equ., **53**, 1009 – 1019 (2008).
- [17] K. Zhu, "A class of Möbius invariant function spaces", Illinois J. Math., **51**, 977 – 1002 (2007).
- [18] К. Л. Аветисян, "Лакунарные ряды и точные оценки в весовых пространствах голоморфных функций", Известия НАН Армении, серия Математика, **42**, (2), 3 – 9 (2007).
- [19] K. L. Avetisyan, "Hardy-Bloch type spaces and lacunary series on the polydisk", Glasgow Math. J., **49**, 345 – 356 (2007).
- [20] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, Интегралы и Производные Дробного Порядка и Некоторые их Приложения, Минск, Наука и техника (1987).
- [21] F. Beatrous and J. Burbea, "Holomorphic Sobolev spaces on the ball", Diss. Math., **276**, 1 – 57 (1989).
- [22] S. Yamashita, "Gap series and α -Bloch functions", Yokohama Math. J., **28**, 31 – 36 (1980).

Поступила 21 декабря 2009