

О НЕКОТОРЫХ СООТНОШЕНИЯХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА
ОКРУЖНОСТИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С
ФИКСИРОВАННЫМИ ПОЛЮСАМИ. IV

А. В. АБРАМЯН

Ванадзорский государственный педагогический институт

Аннотация. Работа посвящена изучению асимптотического поведения ортогональных на единичной окружности рациональных функций с фиксированными полюсами.

MSC2010 number: 26C15.

Ключевые слова: рациональные функции; ортогональные системы.

1. ВВЕДЕНИЕ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ ($|z_k| < 1$, $k = 0, 1, \dots$) - произвольная последовательность комплексных чисел. Рассмотрим систему Такенака-Мальмквиста рациональных функций $\{r_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ ассоциированную с последовательностью чисел $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$:

$$(1.1) \quad r_0(z) = \frac{(1 - |z_0|^2)^{1/2}}{1 - \bar{z}_0 z}, \quad r_n(z) = \frac{(1 - |z_0|^2)^{1/2}}{1 - \bar{z}_0 z} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z} \varepsilon_k,$$

где

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \frac{|z_k|}{z_k}, & \text{если } z_k \neq 0 \\ -1, & \text{если } z_k = 0, \end{cases} \quad n, k = 0, 1, \dots$$

Известно, что система (1.1) ортонормальна на единичной окружности $T = \{\xi : |\xi| = 1\}$ относительно меры $(2\pi)^{-1} d\theta$, т.е.

$$\frac{1}{2\pi} \int_T r_n(\xi) \overline{r_m(\xi)} |d\xi| = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{если } n = m \\ 0, & \text{если } n \neq m, \end{cases} \quad n, m = 0, 1, \dots$$

Пусть $\mu(\theta)$ - произвольная ограниченная неубывающая функция на отрезке $[0, 2\pi]$ с бесконечным множеством точек роста. Ортогонализируя упорядоченную последовательность (1.1) на T относительно меры $(2\pi)^{-1} d\mu(\theta)$, получим последовательность рациональных функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям, определяющим функции этой последовательности единственным образом:

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) &= \alpha_n r_n(z) + \dots, \quad \varphi_n^*(0) > 0, \quad n = 0, 1, \dots \\ \frac{1}{2\pi} \int_T \varphi_n(\xi) \overline{\varphi_m(\xi)} d\mu(\xi) &= \delta_{nm}, \quad n, m = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

где

$$\varphi_n^*(z) = \frac{B_n(z)}{z} \overline{r_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \quad B_n(z) = \prod_{k=0}^n \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z} \cdot \varepsilon_k.$$

Рациональные функции $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^\infty$ были введены М. М. Джрбашяном [1], где и были получены аналоги некоторых хорошо известных соотношений теории ортогональных на единичной окружности многочленов. Рациональным функциям $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^\infty$ посвящены также работы [2]–[5]. Отметим, что в частном случае, когда $z_k = 0$, $k = 0, 1, \dots$, система Такенака-Мальмквиста $\{r_k(z)\}_{k=0}^\infty$ переходит в систему $\{z^k\}_{k=0}^\infty$, а система рациональных функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^\infty$ переходит в систему ортогональных на единичной окружности (относительно меры $(2\pi)^{-1} d\mu$) многочленов Г. Сеге, т. е. при $z_k = 0$, $k = 0, 1, \dots$ имеем

$$\varphi_n(z) = \alpha_n z^n + \dots, \quad \alpha_n > 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_T \varphi_n(\xi) \overline{\varphi_m(\xi)} d\mu(\theta) = \delta_{nm}, \quad n, m = 0, 1, \dots, \quad \xi = e^{i\theta}.$$

Известно, что так называемые асимптотические формулы для ортогональных многочленов полезны при исследовании многих задач связанных с теорией ортогональных многочленов (например, проблемы теории вероятностных процессов, см. [6]), т.е. полезно иметь характеристику поведения ортогональных многочленов при безграничном возрастании их номеров. Поэтому нижеследующая теорема из теории ортогональных многочленов, имеет важное значение.

Теорема 1. Если сходится ряд $\sum_{k=0}^\infty |\Phi_k(0)|^2$, где $\Phi_0(0) = 1$, $\Phi_k(0) = \frac{\varphi_k(0)}{\alpha_k}$, то ряд $\sum_{k=0}^\infty |\varphi_k(z)|^2$ и последовательность $\varphi_k^*(z) = z^k \overline{\varphi_k\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$, $k = 0, 1, \dots$ сходятся равномерно в каждом круге $|z| \leq r < 1$.

Для случая, когда функция $\mu(\theta)$, $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ абсолютно непрерывна, первоначально теорема доказана Г. Сеге [7] (для общего случая см. Я. Л. Геронимус [8], [9], а также [10]).

Настоящая работа посвящена доказательству аналогичной теоремы (см. §2, теорема 3) для ортогональных на единичной окружности рациональных функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^\infty$. В работе потребуются некоторые соотношения, которые для удобства приведены ниже.

Справедливы соотношения (см. [2], [3], [5])

$$(1.2) \quad S_n(\xi, z) = \frac{1 - z_n \bar{\xi}}{1 - |z_n|^2} \frac{1 - \bar{z}_n z}{1 - \bar{\xi} z} \{ \overline{\varphi_n^*(\xi)} \varphi_n^*(z) - \overline{U_n(\xi)} U_n(z) \overline{\varphi_n(\xi)} \varphi_n(z) \},$$

где

$$S_n(\xi, z) = \sum_{k=0}^n \overline{\varphi_k(\xi)} \varphi_k(z), \quad U_n(z) = \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_n z}, \quad \xi, z \in \mathbb{C},$$

$\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел.

$$(1.3) \quad \varphi_n^*(z) \neq 0, \quad |z| \leq 1.$$

$$(1.4) \quad |\tau_n|^2 = |\tau_0|^2 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 - |z_{k+1}|^2}{1 - |z_k|^2} \frac{1 - |z_k \omega_k|^2}{1 - |\omega_{k+1}|^2}$$

где τ_k и ω_k определяются из следующих соотношений:

$$\varphi_n(z) = \frac{\tau_n \omega_n(z)}{\pi_n(z)}, \quad \pi_n(z) = \prod_{k=0}^n (1 - \bar{z}_k z), \quad \omega_n(z) = z^n + \dots, \quad \omega_0 = 1, \quad \omega_k = \omega_k(0).$$

2. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ $\varphi_n(z)$ ПРИ $|z| > 1$

Для удобства обозначим

$$(2.1) \quad h_n = |\tau_0|^{-2} \prod_{k=1}^n \frac{1 - |\omega_k|^2}{1 - |z_k \omega_k|^2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad h_0 = 1.$$

Так как (см. [2]) $|\omega_k| < 1$, $k = 1, 2, \dots$, то $h_k \geq h_{k+1} > 0$, $k = 0, 1, \dots$, и следовательно, существует предел $h = \lim_{k \rightarrow \infty} h_k$.

Теорема 2. Ряд

$$(2.2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$(2.3) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 - |z_k|^2) |\omega_k|^2}{1 - |z_k \omega_k|^2}.$$

Доказательство. Из (1.2) при $\xi = z = 0$ следует

$$\sum_{k=0}^n |\varphi_k(0)|^2 = \frac{|\varphi_n^*(0)|^2 - |z_n \varphi_n(0)|^2}{1 - |z_n|^2}$$

откуда с учетом (2.1), (1.3) имеем

$$(2.4) \quad \sum_{k=0}^n |\varphi_k(0)|^2 = \sum_{k=0}^n \frac{1}{h_k} \frac{(1 - |z_k|^2) |\omega_k|^2}{1 - |z_k \omega_k|^2} = \frac{1}{h_n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Если учесть, что

$$h_n = |\tau_0|^2 \prod_{k=1}^n \left\{ 1 - \frac{(1 - |z_k|^2) |\omega_k|^2}{1 - |z_k \omega_k|^2} \right\},$$

то справедливость теоремы следует из признака сходимости бесконечного произведения и из равенств (2.4). Теорема доказана. $\square$

Следствие 1. Если расходится ряд

$$(2.5) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (1 - |z_k|),$$

то ряд (2.2) сходится тогда и только тогда когда сходится ряд

$$(2.6) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (1 - |z_k|) |\omega_k|^2.$$

Доказательство. Из расходимости ряда (2.5) и из сходимости ряда (2.6) следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = 0$. Очевидно, что тогда сходимость ряда (2.3) эквивалентна сходимости ряда (2.6), остальное следует из теоремы 2. Следствие доказано. $\square$

Теорема 3. Если ряд (2.5) расходится, а ряд (2.6) сходится, то ряд

$$(2.7) \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_k(z)|^2$$

и последовательность

$$(2.8) \quad \left\{ \frac{1 - \bar{z}_k z}{\sqrt{1 - |z_k|^2}} \varphi_k^*(z) \right\}_{k=0}^{\infty}$$

сходятся равномерно в каждом круге $|z| \leq r < 1$.

Доказательство. Из формулы (1.2) при $\xi = z$ следует

$$(2.9) \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_k(z)|^2 = \frac{|1 - \bar{z}_n z|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |z_n|^2)} |\varphi_n^*(z)|^2 - \frac{|z_n - z|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |z_n|^2)} |\varphi_n(z)|^2.$$

Из этой формулы вытекает, что при $|z| < 1$

$$\frac{\sqrt{1 - |z_k|^2}}{|1 - \bar{z}_k z|} \frac{1}{|\varphi_k^*(z)|} \leq \frac{1}{\sqrt{1 - |z|^2}} \frac{1}{|\varphi_0^*(z)|},$$

откуда следует, что последовательность

$$(2.10) \quad \left\{ \frac{\sqrt{1 - |z_k|^2}}{1 - \bar{z}_k z} \frac{1}{\varphi_k^*(z)} \right\}_{k=0}^{\infty}$$

равномерно ограничена в каждом круге $|z| \leq r < 1$. На основании теоремы Стильтеса-Витали из этой последовательности можно выделить подпоследовательность

$$(2.11) \quad \left\{ \frac{\sqrt{1 - |z_k|^2}}{1 - \bar{z}_k z} \frac{1}{\varphi_k^*(z)} \right\}_{k \in \Lambda}, \quad \Lambda = \{n_1, n_2, \dots\}, \quad 0 \leq n_1 < n_2 < \dots,$$

которая равномерно сходится в каждом круге $|z| \leq r < 1$. Ни одна функция последовательности (2.10) не обращается в нуль в круге $|z| \leq 1$, следовательно,

на основании теоремы Гурвица (см. [11], стр. 299) предельная функция подпоследовательности (2.11) не может обращаться в нуль внутри этой области и эта функция не равняется нулю тождественно, так как

$$\left(\frac{\sqrt{1-|z_k|^2}}{1-\bar{z}_k z} \frac{1}{\varphi_k^*(z)} \right) \Big|_{z=0} = \frac{\sqrt{1-|z_k|^2}}{|T_k|^2} = \sqrt{1-|z_k \omega_k|^2}, \quad h_k \rightarrow h > 0$$

(см. следствие 1). Из сказанного следует, что подпоследовательность

$$(2.12) \quad \left\{ \frac{1-\bar{z}_k z}{\sqrt{1-|z_k|^2}} \varphi_k^*(z) \right\}_{k \in \Lambda}$$

стремится к пределу равномерно в каждом круге $|z| \leq r < 1$. На основании (2.9) отсюда следует, что сумма ряда (2.7) непрерывна в круге $|z| < 1$. Так как члены этого ряда неотрицательны, то по теореме Дини (см. [12], стр. 431) ряд (2.7) сходится равномерно в каждом круге $|z| \leq r < 1$. Первое утверждение теоремы доказано. Далее, из этого утверждения следует, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \overline{\varphi_k(0)} \varphi_k(z)$$

в каждом круге $|z| \leq r < 1$, сходится равномерно, а из (1.2) при $\xi = 0$ следует

$$\sum_{k=0}^n \overline{\varphi_k(0)} \varphi_k(z) = \frac{1-\bar{z}_n z}{1-|z_n|^2} \overline{\varphi_n^*(0)} \varphi_n^*(z) - \frac{z_n(z_n - z)}{1-|z_n|^2} \overline{\varphi_n(0)} \varphi_n(z),$$

откуда в свою очередь следует, что не только подпоследовательность (2.12), но и вся последовательность (2.8) сходится равномерно в каждом круге $|z| \leq r < 1$. Теорема доказана полностью. $\square$

Следствие 2. Если ряд (2.5) расходится, а ряд (2.6) сходится, то существует функция $\Delta(z)$ аналитическая в области $|z| > 1$, нигде в этой области не обращающаяся в нуль и такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z - z_n}{\sqrt{1-|z_n|^2}} \frac{\varphi_n(z)}{B_n(z)} = \Delta(z)$$

в каждой точке z области $|z| > 1$ и притом сходимость равномерна внутри этой области.

Доказательство. Пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\bar{z}_n z}{\sqrt{1-|z_n|^2}} \varphi_n^*(z) = g(z), \quad |z| < 1, \quad \Delta(z) = \overline{g\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \quad |z| > 1,$$

как существование так и свойства функции $\Delta(z)$, указанные в формулировке следствия, вытекают из теоремы 3. Следствие 2 доказано. $\square$

Abstract. The paper is devoted to investigation of the asymptotic behavior of orthogonal on the unit circle rational functions with fixed poles.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. М. Джрбашян, “Ортогональные системы рациональных функций на окружности”, Изв. АН. Арм. ССР, серия Математика, **1**, часть 1, стр. 3-24, часть 2, стр. 106-125, (1966).
- [2] А. В. Абрамян, “О некоторых соотношениях ортогональных на окружности рациональных функций с фиксированными полюсами”, Изв. НАН Армении, серия Математика, **41**, N 3, 3 – 12 (2006).
- [3] А. В. Абрамян, “О некоторых соотношениях ортогональных на окружности рациональных функций с фиксированными полюсами. II”, Изв. НАН Армении, серия Математика, **43**, N 2, 3 – 16, (2008).
- [4] А.В. Абрамян, “О некоторых соотношениях ортогональных на окружности рациональных функций с фиксированными полюсами. III”, Изв. НАН Армении, серия Математика, **45**, N 1, 3 – 10, (2010).
- [5] А. В. Абрамян, “Рекуррентные формулы ортогональных на единичной окружности рациональных функций с фиксированными полюсами”, Тезисы докладов научной межвузовской конференции, посвященной 80-летию академика С. Н. Мергеляна, Ванадзор, стр. 59–62 (2008).
- [6] У. Гренандер, Г. Сеге. Теплицевы формы и их Приложения. М; ИЛ, 1961.
- [7] Г. Сеге. Ортогональные Многочлены. М; Физматгиз, 1962.
- [8] Я. Л. Геронимус. Полиномы, ортогональные на круге и их приложения, Сообщ. Харьк. матем. общества XIX, 1948.
- [9] Я. Л. Геронимус. Многочлены, Ортогональные на Окружности и на Отрезке. М; Физматгиз, 1958.
- [10] Н. И. Ахиезер. Классическая Проблема Моментов. М; Физматгиз, 1961.
- [11] А. И. Маркушевич. Краткий курс Теории Аналитических Функций. М; Наука, 1979.
- [12] Г. М. Фихтенгольц, Курс Дифференциального и Интегрального Исчисления. Том II, М; Наука, 1970.

Поступила 17 сентября 2008