

О ЛИНИЯХ УРОВНЯ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Г. А. СУКИАСЯН

Гюмрийский педагогический институт

E-mail: sugagik@mail.ru

Аннотация. С помощью ранее установленного метода оценки длин линий уровня действительных функций доказывается теорема, которая является аналогом второй основной теоремы теории Γ -линий, которая, в свою очередь, является аналогом второй основной теоремы Р. Неванлинны.

MSC2010 number: 30C70, 26B15

Ключевые слова: линии уровня, Γ -линии, распределение значений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Существенная часть комплексного анализа, в частности, теория распределения значений Р. Неванлинны [4], изучает a -точки комплексных функций $w(z)$ различных классов (a -точками называются решения уравнения $w(z) = a$, или же прообразы $w^{-1}(a)$). Рассматривая аналогичное понятие Γ -линий, которые являются прообразами $w^{-1}(\Gamma)$ заданной кривой Γ , в конце 70-х Г. А. Барсегян построил теорию Γ -линий [1], (см. также [2]), где основные результаты являются аналогами основных теорем теории Р. Неванлинны. Теория дает оценки длин Γ -линий для достаточно широких классов мероморфных и, более общих, не мероморфных функций. Заметим, что когда Γ есть действительная ось, то Γ -линии становятся линиями уровня действительных функций $v(x, y) = \operatorname{Im} w$ (решения $v(x, y) = 0$ называются линиями уровня $v(x, y)$), которые встречаются во многих областях чистой и прикладной математики. Для этих частных классов упомянутые оценки являются оценками длин линий уровня действительных функций $\operatorname{Im} w$.

В [3] даны два независимых подхода для изучения длин линий уровня некоторых широких классов действительных функций. Принадлежащий автору один из подходов основан на формуле Грина. В данной статье, используя этот подход, мы улучшаем некоторые результаты [3] и изучаем длины линий уровня $v(x, y) = c_n$, $n = 1, 2, \dots, q$ для действительных функций $v(x, y)$. Основной результат, теорема 4, является аналогом второй основной теоремы теории Γ -линий (что, в свою очередь, является аналогом второй основной теоремы Р. Неванлинны).

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Мы будем пользоваться следующими обозначениями: $D \subset \mathbb{C}$ – ограниченная область, граница ∂D которой состоит из конечного числа кусочно-аналитических кривых; $l(D)$ – длина ∂D ; $C^2(\overline{D})$ – класс дважды непрерывно-дифференцируемых функций $v(x, y)$ в некоторой области содержащей замыкание $\overline{D}$, с условием $|\text{grad } v(x, y)| \neq 0$ всюду в $\overline{D}$ за исключением, быть может, конечного числа изолированных точек, в окрестности каждой из которых все интегралы в ниже приведенных теоремах сходятся. $L(D, c, v)$ – суммарная длина линий уровня $\{(x, y) \in D : v(x, y) = c\}$ функции $v(x, y)$. Для $c \in \mathbb{R}$ полагаем, что $D(c) = D(c, v) = \{(x, y) \in D : v(x, y) > c\}$ и $\partial D(c)$ – граница $D(c)$.

Теорема 1. Для произвольной функции $v(x, y) \in C^2(\overline{D})$ и $c \in \mathbb{R}$,

$$(2.1) \quad L(D, c, v) = - \iint_{D(c)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'_x(x, y)}{|\text{grad } v(x, y)|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'_y(x, y)}{|\text{grad } v(x, y)|} \right\} d\sigma - \\ - \int_{\partial D(c) \cap \partial D} \frac{v'_y(x, y)}{|\text{grad } v(x, y)|} dx - \frac{v'_x(x, y)}{|\text{grad } v(x, y)|} dy,$$

где $d\sigma$ – элемент площади, а во втором интеграле направление обхода на каждой связной компоненте кривой $\partial D(c) \cap \partial D$ положительное относительно $D(c)$.

Как следствие из теоремы 1 получаем следующую теорему, дающую оценку сверху для величины $L(D, c, v)$.

Теорема 2. ([3], Теорема 1) Для произвольной функции $v(x, y) \in C^2(\overline{D})$ и $c \in \mathbb{R}$,

$$(2.2) \quad L(D, c, v) \leq \frac{1}{2} \iint_D \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'_x(x, y)}{|\text{grad } v(x, y)|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'_y(x, y)}{|\text{grad } v(x, y)|} \right| d\sigma + \\ + \frac{1}{2} \int_{\partial D} \frac{|v'_y(x, y)dx - v'_x(x, y)dy|}{|\text{grad } v(x, y)|}.$$

Подынтегральная величина двойного интеграла в (2.2) равна кривизне проходящей через точку $(x, y) \in D$ линии уровня функции $v(x, y)$ в точке (x, y) , т.е.

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'_x(x, y)}{|\text{grad } v(x, y)|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'_y(x, y)}{|\text{grad } v(x, y)|} \right| = \frac{|(v'_x)^2 v''_{yy} - 2v'_x v'_y v''_{xy} + (v'_y)^2 v''_{xx}|}{((v'_x)^2 + (v'_y)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Заметим также, что второй интеграл (2.2) не превосходит $\frac{1}{2}l(D)$.

Применим неравенство (2.2) для мнимых (действительных) частей и модулей мероморфных функций. Пусть $w(z)$ – мероморфная в $\bar{D}$ функция, $z = x + iy$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} w(z)$ или $v(x, y) = |w(z)|$. Простые вычисления дают

$$\begin{aligned} L(D, c, \operatorname{Im} w) &\leq \frac{1}{2} \iint_D \left| \frac{\partial}{\partial x} \sin(\arg w'(z)) + \frac{\partial}{\partial y} \cos(\arg w'(z)) \right| d\sigma + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\partial D} |\cos(\arg w'(z)) dx - \sin(\arg w'(z)) dy| = \\ (2.3) \quad &= \frac{1}{2} \iint_D \left| \operatorname{Im} \left(\frac{w''(z)}{w'(z)} e^{-i \arg w'(z)} \right) \right| d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\partial D} \left| \operatorname{Re}(e^{i \arg w'(z)} dz) \right|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(D, c, |w|) &\leq \frac{1}{2} \iint_D \left| \frac{\partial}{\partial x} \cos\left(\arg \frac{w'(z)}{w(z)}\right) - \frac{\partial}{\partial y} \sin\left(\arg \frac{w'(z)}{w(z)}\right) \right| d\sigma + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\partial D} \left| \sin\left(\arg \frac{w'(z)}{w(z)}\right) dx + \cos\left(\arg \frac{w'(z)}{w(z)}\right) dy \right| = \\ (2.4) \quad &= \frac{1}{2} \iint_D \left| \operatorname{Re} \left(\left(\frac{w''(z)}{w'(z)} - \frac{w'(z)}{w(z)} \right) e^{-i \arg \frac{w'(z)}{w(z)}} \right) \right| d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\partial D} \left| \operatorname{Im}(e^{i \arg \frac{w'(z)}{w(z)}} dz) \right|. \end{aligned}$$

Оценки сверху длин линий уровня мнимых (действительных) частей и модулей мероморфных функций впервые были получены как частные случаи принципа вариации касательной в теории Γ -линий [1], [2]. Согласно этому принципу для произвольной мероморфной функции $w(z)$ и любой гладкой жордановой кривой Γ с ограниченной вариацией угла между касательной и действительной осью справедливо соотношение

$$\begin{aligned} L(D, \Gamma) &\leq K(\Gamma) \iint_D \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial x} \arg w'(z) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial y} \arg w'(z) \right| \right\} d\sigma + K_1(D) l(D) \leq \\ (2.5) \quad &\leq 2K(\Gamma) \iint_D \left| \frac{w''(z)}{w'(z)} \right| d\sigma + K_1(D) l(D), \end{aligned}$$

где $L(D, \Gamma)$ – суммарная длина кривых $w^{-1}(\Gamma) \cap D$, $l(D)$ – длина ∂D , $K(\Gamma)$ и $K_1(\Gamma)$ – постоянные, зависящие только от Γ . В [5] доказаны подобные (2.5) соотношения для квазиконформных и непрерывно-дифференцируемых отображений.

В случае прямой $\{w : \operatorname{Im} w = c\}$ имеем $L(D, \Gamma) = L(D, c, \operatorname{Im} w)$, а в случае окружности $\{w : |w| = c\}$ имеем $L(D, \Gamma) = L(D, c, |w|)$. Теперь мы видим, что для этих частных случаев неравенства (2.3) и (2.4) более точны, чем неравенство (2.5). Кроме того, из неравенства (2.2) можно получить оценки сверху для длин линий уровня функций $v(x, y)$ из различных классов.

Проиллюстрируем теорему 2 на следующих примерах.

1. Пусть $v(x, y) = \operatorname{Im} e^{ax+iby} = e^{ax} \sin by$, a и b — действительные числа ($a, b \neq 0$), $D = D(r) = \{z : |z| < r\}$. Тогда

$$\begin{aligned} L(D(r), 0, e^{ax} \sin by) &= |b| r^2 + O(r), \quad r \rightarrow \infty, \\ \frac{1}{2} \iint_{D(r)} \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'_x(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'_y(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} \right| d\sigma &= \\ = \frac{1}{2} \iint_{D(r)} \left| \frac{\partial}{\partial y} \frac{b \cos by}{\sqrt{b^2 \cos^2 by + a^2 \sin^2 by}} \right| d\sigma &= |b| r^2 + O(r), \quad r \rightarrow \infty, \\ \frac{1}{2} \int_{\partial D(r)} \frac{|v'_y(x, y) dx - v'_x(x, y) dy|}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} &\leq \pi r. \end{aligned}$$

2. Пусть $v(x, y) = |e^{ax+iby}| = e^{ax}$ ($a \neq 0$). Тогда

$$\begin{aligned} L(D(r), 1, e^{ax}) &= 2r, \\ \frac{1}{2} \iint_{D(r)} \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'_x(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'_y(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} \right| d\sigma &= \frac{1}{2} \iint_{D(r)} \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{a}{|a|} \right| d\sigma = 0, \\ \frac{1}{2} \int_{\partial D(r)} \frac{|v'_y(x, y) dx - v'_x(x, y) dy|}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} &= \frac{1}{2} \int_{\partial D(r)} |dy| = 2r. \end{aligned}$$

3. Пусть $v(x, y) = x^2 - y$, $D = \{(x, y) : 0 < x < r, \quad 0 < y < r^2\}$. Тогда

$$\begin{aligned} L(D, 0, v(x, y)) &= \int_0^r \sqrt{4x^2 + 1} dx = r^2 + O(\ln r), \quad r \rightarrow \infty. \\ \frac{1}{2} \iint_D \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'_x(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'_y(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} \right| d\sigma &= \\ = \frac{1}{2} \iint_D \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 1}} \right| d\sigma &= \frac{1}{2} r^2 + O(1), \quad r \rightarrow \infty. \\ \frac{1}{2} \int_{\partial D} \frac{|v'_y(x, y) dx - v'_x(x, y) dy|}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} &= \frac{1}{2} \int_{\partial D} \frac{|dx + 2x dy|}{\sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{1}{2} r^2 + O(\ln r), \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Приведенные примеры показывают точность неравенства (2.2). Они также показывают, что каждое слагаемое правой части (2.2) может иметь основной или равный вклад в общей сумме. Поэтому величину

$$\begin{aligned} G(D) &:= \frac{1}{2} \iint_D \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'_x(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'_y(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} \right| d\sigma + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\partial D} \frac{|v'_y(x, y) dx - v'_x(x, y) dy|}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} \end{aligned}$$

мы будем называть *характеристикой длины*, а неравенство (2.2) *принципом длины и кривизны*.

Пусть

$$G(D, c', c'') := \frac{1}{2} \iint_{D(c', c'')} \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'_x(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'_y(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} \right| d\sigma +$$

$$+\frac{1}{2} \int_{\partial D(c', c'') \cap \partial D} \frac{|v'_y(x, y)dx - v'_x(x, y)dy|}{|\operatorname{grad} v(x, y)|},$$

где c', c'' ($c' < c''$) – действительные числа, $D(c', c'') = \{(x, y) \in D : c' < v(x, y) < c''\}$, $\partial D(c', c'')$ – граница области $D(c', c'')$. Далее, для возрастающей непрерывно-дифференцируемой функции $\varphi(t)$ на $\mathbb{R}$ обозначим

$$K_\varphi(D) := \iint_D \varphi'(v(x, y)) |\operatorname{grad} v(x, y)| d\sigma,$$

$$K_\varphi(D, c', c'') := \iint_{D(c', c'')} \varphi'(v(x, y)) |\operatorname{grad} v(x, y)| d\sigma.$$

Теорема 3. Пусть $\varphi(t)$ – произвольная возрастающая непрерывно-дифференцируемая функция на $\mathbb{R}$, а c', c'' ($c' < c''$) – действительные числа. Тогда для любой функции $v(x, y) \in C^2(\overline{D})$,

$$(2.6) \quad \max \{L(D, c', v); L(D, c'', v)\} \leq \left(\sqrt{2G(D, c', c'')} + \sqrt{h_1 K_\varphi(D, c', c'')} \right)^2,$$

$$(2.7) \quad L(D, c', v) + L(D, c'', v) \leq \left(\sqrt{2G(D, c', c'')} + \sqrt{2h_1 K_\varphi(D, c', c'')} \right)^2,$$

$$(2.8) \quad L(D, c, v) \leq \left(\sqrt{G(D, c', c'')} + \sqrt{h_2 K_\varphi(D, c', c'')} \right)^2, \quad c' < c < c'',$$

где $h_1 = (\varphi(c'') - \varphi(c'))^{-1}$, $h_2 = (\min \{\varphi(c) - \varphi(c'), \varphi(c'') - \varphi(c)\})^{-1}$.

В оценках (2.6) – (2.8) учитывается поведение функции $v(x, y)$ лишь в окрестностях линий уровня, поэтому теорема 3 в некотором смысле дополняет теорему 2. Точность оценок (2.6) – (2.8) также легко проверяется предыдущими примерами (здесь можно взять $\varphi(t) = t$, $\varphi(t) = \arctan t$).

Во второй основной теореме теории Γ -линий [1], [2] рассматривается конечный набор попарно различных ограниченных гладких жордановых кривых $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ и для произвольной мероморфной функции $w(z)$ устанавливается неравенство

$$\sum_{k=1}^n L(D, \Gamma_k) \leq K \iint_D \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial x} \arg w'(z) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial y} \arg w'(z) \right| \right\} d\sigma +$$

$$+ h(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n) \iint_D \frac{|w'(z)|}{1 + |w(z)|^2} d\sigma + \sqrt{2}l(D) \leq$$

$$(2.9) \quad \leq 2K \iint_D \left| \frac{w''(z)}{w'(z)} \right| d\sigma + h(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n) \iint_D \frac{|w'(z)|}{1 + |w(z)|^2} d\sigma + \sqrt{2}l(D),$$

где K – абсолютная постоянная, $h(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$ – постоянная, зависящая только от $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$. Как это делается в теории распределения значений мероморфных функций [4], из неравенства (2.9) выводится соотношение дефектов для кривых.

Следующая теорема является аналогом второй основной теоремы теории Г-линий для функций класса $C^2(\overline{D})$.

Теорема 4. Пусть $\varphi(t)$ – произвольная возрастающая непрерывно-дифференцируемая функция на $\mathbb{R}$, и $c_1, \dots, c_n$ – попарно различные действительные числа. Тогда для любой функции $v(x, y) \in C^2(\overline{D})$,

$$(2.10) \quad \sum_{k=1}^n L(D, c_k, v) \leq \left(\sqrt{G(D)} + \sqrt{hK_\varphi(D)} \right)^2,$$

где $h = (\min_{i \neq j} \{\varphi(c_i) - \varphi(c_j)\})^{-1}$.

Неравенство (2.10) особенно эффективно для установления соотношения дефектов, там, где остаточный член $hK_\varphi(D)$ существенно “меньше”, чем характеристика длины $G(D)$. Это так, например, если $v(x, y) = |w(z)|$, где $w(z)$ – мероморфная функция, $D = D(r)$, $\varphi(t) = \arctan t$ [2]. В этом случае имеем интеграл

$$K_\varphi(D(r)) = \iint_{D(r)} \frac{|w'(z)|}{1 + |w(z)|^2} d\sigma,$$

который часто встречается в теории распределения значений мероморфных функций и в теории поверхностей наложения (оценки этого интеграла даны в [2]). С другой стороны соответствующий выбор функции $\varphi(t)$ в $K_\varphi(D)$ дает возможность применения неравенства (2.10) для различных классов функций $v(x, y)$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Доказательство теоремы 1 основано на формуле Грина. Сперва предположим, что функция $v(x, y)$ дважды непрерывно-дифференцируема всюду в некоторой области, содержащей $\overline{D}$ и $|\text{grad} v(x, y)| \neq 0$ в $\overline{D}$. Заметим, что граница области $D(c) = \{(x, y) \in D : v(x, y) > c\}$ состоит из кривых $\{(x, y) \in D : v(x, y) = c\}$ и дуг границы D (см. Рис. 1). Действительно, если бы существовала замкнутая линия, которая вместе со своей внутренней частью лежала бы в D , то во внутренней части этой линии уровня нашлась бы точка, в которой $|\text{grad} v(x, y)| = 0$, что невозможно в силу нашего предположения.

Направление касательной к кривой $\{(x, y) \in D : v(x, y) = c\}$ в точке (x, y) при положительном обходе соответствующей компоненты $D(c)$ совпадает с направлением вектора $\{v'_y(x, y); -v'_x(x, y)\}$ и

$$\cos \alpha(x, y) = \frac{v'_y(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|}, \quad \sin \alpha(x, y) = -\frac{v'_x(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|},$$

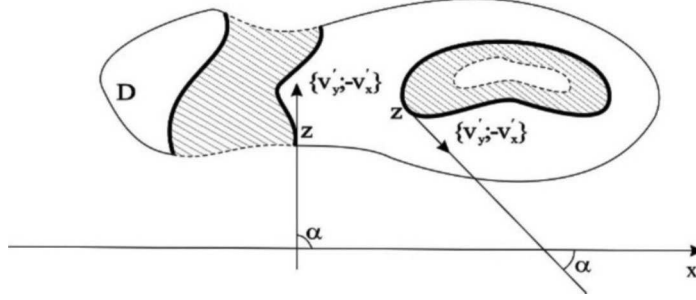


РИС. 1. Заштрихованная часть – область $D(c)$; жирные линии – кривые $\{(x, y) \in D : v(x, y) = c\}$; пунктирные линии – $\partial D(c) \cap \partial D$.

где $\alpha(x, y) \in (-\pi; \pi]$ (или $[0; 2\pi)$) – угол между этой касательной и положительным направлением действительной оси, то Следовательно,

$$\begin{aligned} L(D, c, v) &= \int_{\{(x, y) \in D : v(x, y) = c\}} dl = \int_{\{(x, y) \in D : v(x, y) = c\}} \cos \alpha(x, y) dx + \sin \alpha(x, y) dy = \\ &= \int_{\{(x, y) \in D : v(x, y) = c\}} \frac{v'_y(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} dx - \frac{v'_x(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} dy, \end{aligned}$$

где dl – элемент длины. Добавляя с каждой стороны последнего соотношения интегралы вдоль линий $\partial D(c) \cap \partial D$ и применяя формулу Грина для каждой компоненты области $D(c)$ в отдельности, получим

$$\begin{aligned} L(D, c, v) &+ \int_{\partial D(c) \cap \partial D} \frac{v'_y(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} dx - \frac{v'_x(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} dy = \\ (3.1) \quad &= - \iint_{D(c)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'_x(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'_y(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} \right\} d\sigma. \end{aligned}$$

Теперь пусть $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m) \in \bar{D}$ те точки, в которых либо $|\text{grad} v(x, y)| = 0$ либо функция $v(x, y)$ не является дважды непрерывно-дифференцируемой, но в окрестности каждой из этих точек интегралы в (3.1) сходятся. Удалим из области D попарно непересекающиеся кружки $\{(x, y) : (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 \leq \varepsilon^2\}$, $k = 1, \dots, m$ и полученную область обозначим через D_ε . Граница D_ε состоит из дуг

$$C_k(\varepsilon) = \{(x, y) : (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 = \varepsilon^2\} \cap \bar{D}, \quad k = 1, \dots, m$$

и части границы D , не лежащей в удаленных кружках (эту часть обозначим через ∂D_ε). Соотношение (3.1) для области D_ε дает

$$L(D_\varepsilon, c, v) + \int_{\partial D_\varepsilon(c) \cap \partial D_\varepsilon} \frac{v'_y(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} dx - \frac{v'_x(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} dy +$$

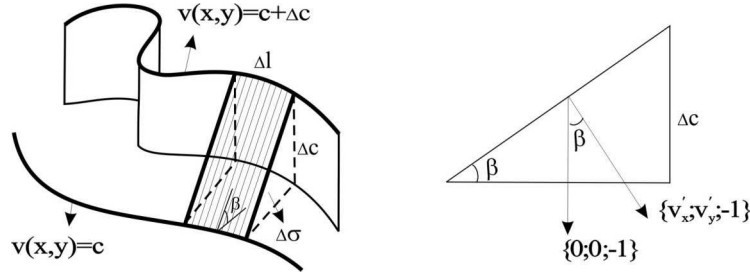


Рис. 2

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=1}^m \int_{C_k(\varepsilon) \cap \partial D_\varepsilon(c)} \frac{v'_y(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} dx - \frac{v'_x(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} dy = \\
 & = - \iint_{D_\varepsilon(c)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'_x(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'_y(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} \right\} d\sigma,
 \end{aligned}$$

где $D_\varepsilon(c) = \{(x, y) \in D_\varepsilon : v(x, y) > c\}$ и $\partial D_\varepsilon(c)$ – граница $D_\varepsilon(c)$.

Для завершения доказательства остается в последнем соотношении ε устремить к нулю и учесть, что каждый интеграл суммы оценивается через $2\pi\varepsilon$.

Если в соотношении (2.1) мы заменим $v(x, y)$ и c соответственно на $-v(x, y)$ и $-c$, то придем к соотношению

$$\begin{aligned}
 & L(D, c, v) - \int_{\partial D_1(c) \cap \partial D} \frac{v'_y(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} dx - \frac{v'_x(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} dy = \\
 (3.2) \quad & = \iint_{D_1(c)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'_x(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'_y(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} \right\} d\sigma,
 \end{aligned}$$

где $D_1(c) = \{(x, y) \in D : v(x, y) < c\}$. Неравенство (2.2) следует из (2.1) и (3.2).

Для доказательства теорем 3 и 4 сначала докажем несколько предварительных лемм. Следующая лемма представляет собой самостоятельный интерес.

Лемма 1. Для произвольной неотрицательной непрерывной функции $f(c)$, $c \in (c', c'')$ при условиях теоремы 1 справедливо соотношение

$$(3.3) \quad \int_{c'}^{c''} f(c) L(D, c, v) dc = \iint_{D(c', c'')} f(v(x, y)) |\text{grad} v(x, y)| d\sigma.$$

Доказательство. Приведем краткое геометрическое доказательство, используя обозначения Рисунка 2. Для угла $\beta(x, y)$ между нормалью $\{v'_x(x, y); v'_y(x, y); -1\}$ к поверхности $\{v(x, y) : c' < v(x, y) < c''\}$ в точке (x, y) и вектором $\{0; 0; -1\}$ имеем

$$\Delta l \Delta c \sim \tan \beta(x, y) \Delta \sigma, \quad \tan \beta(x, y) = |\text{grad} v(x, y)|.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{c'}^{c''} L(D, c, v) f(c) dc &= \int_{c'}^{c''} \int_{\{(x,y) \in D: v(x,y)=c\}} f(c) dl dc = \\ &= \iint_{D(c', c'')} f(v(x, y)) |\operatorname{grad} v(x, y)| d\sigma. \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

Из леммы 1, как следствия, выводятся модификации принципа длины и площади для мероморфных функций [2]

$$\begin{aligned} \int_{c'}^{c''} L(D, c, |w|) f(c) dc &= \iint_{\{z \in D: c' < |w(z)| < c''\}} |w'(z)| f(|w(z)|) d\sigma, \\ \int_{c'}^{c''} L(D, c, \operatorname{Im} w) f(c) dc &= \iint_{\{z \in D: c' < \operatorname{Im} w(z) < c''\}} |w'(z)| f(\operatorname{Im} w(z)) d\sigma. \end{aligned}$$

Замечание 1. В лемме 1 функция $f(c)$ может иметь конечное число изолированных особенностей, но необходимо требовать, чтобы в окрестностях этих точек интегралы в (3.3) сходились.

Следующая лемма непосредственно следует из (2.1).

Лемма 2. Для любых $c', c'' \in \mathbb{R}$ ($c' < c''$) при условиях теоремы 1 имеет место неравенство

$$\begin{aligned} |L(D, c', v) - L(D, c'', v)| &\leq \iint_{D(c', c'')} \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'_x(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'_y(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} \right| d\sigma + \\ (3.4) \quad &+ \int_{\partial D(c', c'') \cap \partial D} \frac{|v'_y(x, y) dx - v'_x(x, y) dy|}{|\operatorname{grad} v(x, y)|}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 3. Пусть $p > 1$ – любое фиксированное число. Возможны два случая: либо имеет место неравенство

$$L(D, c', v) < \frac{p}{(p-1)(\varphi(c'') - \varphi(c'))} \int_{c'}^{c''} \varphi'(c) L(D, c, v) dc$$

либо это не так. В первом случае соотношение (3.3) для φ' вместо f дает

$$\begin{aligned} L(D, c', v) &< \frac{p}{(p-1)(\varphi(c'') - \varphi(c'))} \iint_{D(c', c'')} \varphi'(v(x, y)) |\operatorname{grad} v(x, y)| d\sigma = \\ (3.5) \quad &= \frac{p}{p-1} h_1 K_\varphi(D, c', c'') \end{aligned}$$

Во втором случае, т.е. когда

$$L(D, c', v) \geq \frac{p}{(p-1)(\varphi(c'') - \varphi(c'))} \int_{c'}^{c''} \varphi'(c) L(D, c, v) dc,$$

в силу теоремы о среднем значении существует значение $c^* \in (c', c'')$ такое, что

$$L(D, c', v) \geq \frac{p}{p-1} L(D, c^*, v),$$

откуда получаем

$$L(D, c', v) \leq p |L(D, c', v) - L(D, c^*, v)|.$$

Согласно неравенству (3.4) имеем

$$(3.6) \quad \begin{aligned} L(D, c', v) &\leq p \iint_{D(c', c^*)} \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'_x(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'_y(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} \right| d\sigma + \\ &+ p \int_{\partial D(c', c^*) \cap \partial D} \frac{|v'_y(x, y) dx - v'_x(x, y) dy|}{|\text{grad} v(x, y)|} \leq 2pG(D, c', c''). \end{aligned}$$

Таким образом, в любом случае из (3.5) и (3.6) получаем

$$(3.7) \quad L(D, c', v) \leq 2pG(D, c', c'') + \frac{p}{p-1} h_1 K_\varphi(D, c', c'').$$

Неравенство (3.7) для $L(D, c'', v)$ доказывается аналогичным образом. Минимум функции

$$2pG(D, c', c'') + \frac{p}{p-1} h_1 K_\varphi(D, c', c''), \quad p > 1$$

достигается для значения $p = \sqrt{\frac{h_1 K_\varphi(D, c', c'')}{2G(D, c', c'')}} + 1$ и равен

$$\left(\sqrt{2G(D, c', c'')} + \sqrt{h_1 K_\varphi(D, c', c'')} \right)^2.$$

Окончательно получаем

$$\max \{L(D, c', v); L(D, c'', v)\} \leq \left(\sqrt{2G(D, c', c'')} + \sqrt{h_1 K_\varphi(D, c', c'')} \right)^2,$$

чем и завершается доказательство неравенства (2.6).

Неравенство (2.7) можно доказать также как и (2.6). Действительно, если

$$L(D, c', v) + L(D, c'', v) < \frac{2p}{(p-1)(\varphi(c'') - \varphi(c'))} \int_{c'}^{c''} \varphi'(c) L(D, c, v) dc$$

тогда

$$(3.8) \quad L(D, c', v) + L(D, c'', v) < \frac{2p}{p-1} h_1 K_\varphi(D, c', c'').$$

Если же

$$L(D, c', v) + L(D, c'', v) \geq \frac{2p}{(p-1)(\varphi(c'') - \varphi(c'))} \int_{c'}^{c''} \varphi'(c) L(D, c, v) dc,$$

то опять в силу теоремы о среднем значении существует значение $c^* \in (c', c'')$ такое, что

$$L(D, c', v) + L(D, c'', v) \geq \frac{2p}{p-1} L(D, c^*, v).$$

Из этого неравенства и (3.4) имеем

$$\begin{aligned}
 L(D, c', v) + L(D, c'', v) &\leq p |L(D, c', v) - L(D, c^*, v)| + p |L(D, c'', v) - L(D, c^*, v)| \\
 &\leq p \iint_{D(c', c'')} \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'_x(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'_y(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} \right| d\sigma + \\
 (3.9) \quad &+ p \int_{\partial D(c', c'') \cap \partial D} \frac{|v'_y(x, y)dx - v'_x(x, y)dy|}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} = 2pG(D, c', c'').
 \end{aligned}$$

Из (3.8) и (3.9) получаем

$$(3.10) \quad L(D, c', v) + L(D, c'', v) \leq 2pG(D, c', c'') + \frac{2p}{p-1} h_1 K_\varphi(D, c', c''),$$

и соответственно

$$L(D, c', v) + L(D, c'', v) \leq \left(\sqrt{2G(D, c', c'')} + \sqrt{2h_1 K_\varphi(D, c', c'')} \right)^2.$$

Неравенство (2.7) доказано.

Теперь при $c' < c < c''$, дважды применяя неравенство (3.7) будем иметь

$$L(D, c, v) \leq 2pG(D, c', c) + \frac{p}{(p-1)(\varphi(c) - \varphi(c'))} K_\varphi(D, c, c'')$$

и

$$L(D, c, v) \leq 2pG(D, c, c'') + \frac{p}{(p-1)(\varphi(c'') - \varphi(c))} K_\varphi(D, c, c').$$

Суммируя последние два неравенства, получаем

$$L(D, c, v) \leq pG(D, c', c'') + \frac{p}{(p-1)} h_2 K_\varphi(D, c', c''),$$

откуда, как и выше, выводим (2.8). Теорема 3 полностью доказана. $\square$

Замечание 2. Из доказательства ясно, что достаточно потребовать, чтобы функция $\varphi(t)$ была определена на множестве, содержащем множество значений функции $v(x, y)$.

Доказательство теоремы 4. Без ограничения общности можно предположить, что $c_1 < c_2 < \dots < c_n$. Для $L(D, c_1, v)$ и $L(D, c_n, v)$ из соотношений (3.2) и (2.1) имеем

$$\begin{aligned}
 L(D, c_1, v) &\leq \iint_{D_1(c_1)} \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'_x(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'_y(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} \right| d\sigma + \\
 (3.11) \quad &+ \int_{\partial D_1(c_1) \cap \partial D} \frac{|v'_y(x, y)dx - v'_x(x, y)dy|}{|\operatorname{grad} v(x, y)|}, \\
 L(D, c_n, v) &\leq \iint_{D(c_n)} \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'_x(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'_y(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} \right| d\sigma +
 \end{aligned}$$

$$(3.12) \quad + \int_{\partial D(c_n) \cap \partial D} \frac{|v'_y(x, y)dx - v'_x(x, y)dy|}{|\operatorname{grad} v(x, y)|},$$

где $D_1(c_1) = \{(x, y) \in D : v(x, y) < c_1\}$ и $D(c_n) = \{(x, y) \in D : v(x, y) > c_n\}$.

Для $L(D, c_k, v)$, $k = 1, \dots, n-1$ согласно неравенству (3.10) имеем

$$(3.13) \quad L(D, c_k, v) + L(D, c_{k+1}, v) \leq 2p G(D, c_k, c_{k+1}) + \frac{2p K_\varphi(D, c_k, c_{k+1})}{(p-1)(\varphi(c_{k+1}) - \varphi(c_k))}.$$

Суммируя (3.11) – (3.13) по всем k и учитывая, что каждая линия уровня участвует два раза, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n L(D, c_k, v) &\leq p G(D) + \frac{p}{p-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\varphi(c_{k+1}) - \varphi(c_k)} K_\varphi(D, c_k, c_{k+1}) \leq \\ &\leq p G(D) + \frac{p}{p-1} h K_\varphi(D). \end{aligned}$$

Неравенство (3.2) следует из последнего неравенства при $p = \sqrt{\frac{h K_\varphi(D)}{G(D)}} + 1$. Теорема 4 доказана. $\square$

Abstract. Based on the earlier established general estimation method of the lengths of level sets of real functions, the paper proves a theorem which is an analog of the second fundamental theorem of the theory of Γ -lines which, in its turn, is an analog of the second fundamental theorem of R. Nevanlinna.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. А. Барсегян, “Новые результаты в теории мероморфных функций”, ДАН СССР, **238**, (4), 777 – 780 (1978).
- [2] Г. А. Барсегян, “О геометрии мероморфных функций”, Матем. сборник, **114**, (156), (2), 179 – 226 (1981).
- [3] G. Barsegian, G. Sukiasyan, “Methods for studying level sets of smooth enough functions”, In book “Topics in Analysis and Applications”, editors Barsegian G. and Begehr H., Kluwer, Series: NATO Science Publications (2004).
- [4] Р. Неванlinna, Однозначные Аналитические Функции, М., ГИИТЛ (1941).
- [5] G. Sukiasyan, “On level sets of quasiconformal mappings”, In book “Value distribution and related topics”, editors Barsegian G., Laine I. and Yang C.C., Advances in Complex Analysis and Applications (Kluwer Acad. Publ., 2004).

Поступила 3 марта 2009