Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 4, 2010, стр. 33-46.

О РЕШЕНИЯХ ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

Г. Г. КАЗАРЯН, В. Н. МАРГАРЯН

Ереванский государственный университет
Российско-армянский государственный университет[1]
E-mails: *haik.ghazaryan@male.ru; vachagan.margaryan@yahoo.com*

Аннотация. В работе доказывается, что если $P(D)$ регулярный почти гипоэллиптический оператор

$$L_{2,\delta} = \{u; ||u||_{2,\delta} = \left[\int (|u(x)| \cdot e^{-\delta\cdot|x|})^2 dx\right]^{1/2} < \infty\}, \quad \delta > 0$$

и H_δ^∞ – весовое соболевское пространство с весом $e^{-\delta\cdot|x|}$, то существует число $\delta_0 > 0$ такое, что все решения $u \in L_{2,\delta}$ дифференциального уравнения $P(D)u = f$ принадлежат H_δ^∞, как только $f \in H_\delta^\infty$ и $\delta \leq \delta_0$.

MSC2000 number: 12E10.

Ключевые слова: гипоэллиптический оператор (многочлен), почти гипоэллиптический оператор (многочлен), весовые пространства Соболева.

1. Определения и постановка задачи

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: N - множество натуральных чисел, $N_0 = N \cup \{0\}$, $N_0^n = N_0 \times ... \times N_0$ - множество n-мерных мультииндексов, E^n и R^n - n-мерные вещественные пространства точек соответственно $x = (x_1, ..., x_n)$ и $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$. Для $\xi \in R^n$, $x \in E^n$ и $\alpha \in N_0^n$ обозначим

$$|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + ... + \xi_n^2}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n, \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}...\xi_n^{\alpha_n},$$

и

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1}...D_n^{\alpha_n}, \quad \text{где} \quad D_j = \partial/\partial\xi_j \quad \text{либо} \quad D_j = \frac{1}{i}\cdot\partial/\partial x_j, \quad j = 1, ..., n.$$

Наконец обозначим $R_+^n = \{\xi \in R^n : \xi_j \geq 0, (j = 1, ..., n)\}$, $C^n = R^n \times iR^n$.

Пусть $\aleph = \left\{\alpha^k\right\}$ – множество точек из N_0^n. Многогранником Ньютона набора $\aleph$ назовем наименьший выпуклый многогранник $\Re = \Re(\aleph) \subset N_0^n$, содержащий множество $\aleph \cup \{0\}$.

Для точек $\eta \in R_+^n$ обозначим $\sqcap^{'}(\eta) = \left\{\xi; \xi \in R_+^n : \xi_i \leq \eta_i \,(i = 1, ..., n)\right\}$ и $\sqcap(\eta) = \sqcap^{'}(\eta) \setminus \{\eta\}$. Если $\alpha \in N_0^n \subset R_+^n$, то теми же символами $\sqcap'(\alpha)$ и $\sqcap(\alpha)$ обозначим

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS грант n. 05 - 1000080 - 8157.

$\sqcap'(\alpha) = \{\beta; \beta \in N_n^0 : \beta_i \le \alpha_i (i = 1, ..., n)\}$ и $\sqcap(\alpha) = \sqcap'(\alpha) \setminus \{\alpha\}$. Это не вызовет недоразумения, так как каждый раз из контекста будет ясно о каком множестве идет речь.

Полный многогранник $\Re$ назовем правильным, если с каждой вершиной $e \in \Re$ многогранник $\Re$ содержит множество $\sqcap(e)$. Очевидно, это эквивалентно тому, что внешние (относительно $\Re$) нормали $(n-1)$-мерных некоординантных граней $\Re$ имеют неотрицательные координаты. Если же внешние нормали таких граней имеют только положительные координаты, то многогранник $\Re$ назовем вполне правильным.

Пусть $P(D) = \sum\limits_{\alpha} \gamma_\alpha \cdot D^\alpha$ - линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а $P(\xi) = \sum\limits_{\alpha} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ - отвечающий ему символ (характеристический многочлен). Здесь сумма распространяется по конечному набору мультииндексов $(P) = \{\alpha \in N_0^n : \gamma_\alpha \ne 0\}$. Многогранник $\Re = \Re(P)$ набора точек $(P) \cup \{0\}$ назовем многогранником Ньютона или характеристическим многогранником оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$).

Определение 1. *(см. [2] или [3]) Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) с многогранником $\Re = \Re(P)$ называется невырожденным (регулярным), если существует постоянная $C > 0$ такая,что*

$$\sum_{\beta \in \Re} |\xi^\beta| \le C\,[|P(\xi)| + 1], \quad \xi \in R^n.$$

Определение 2. *(см. [5]). Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется почти гипоэллиптическим, если существует постоянная $C > 0$ такая, что*

$$\sum_{\beta \in \Re} |D^\beta P(\xi)| \le C \cdot [|P(\xi)| + 1], \quad \xi \in R^n.$$

Ясно, что любой гипоэллиптический оператор (см. [6], определение 11.1.2) является почти гипоэллиптическим, однако следующий простой пример показывает, что обратное не верно: многочлен $Q(\xi) = \xi_1^2\xi_2^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + 1$ с правильным многогранником Ньютона $\Re(Q)$ является почти гипоэллиптическим, но не гипоэллиптическим. Отметим еще, что произвольный регулярный оператор с правильным многогранником Ньютона является почти гипоэллиптическим (см. [5]).

Пусть $\delta > 0$, положим

$$L_{2,\delta} = \{u; ||u||_{2,\delta} = \left[\int (|u(x)| \cdot e^{-\delta\cdot|x|})^2 dx\right]^{1/2}\}$$

и введем следующее весовое пространство Соболева

$$H_{\Re,\delta} = \{u; ||u||_{H_{\Re,\delta}} \equiv \sum_{\alpha\in\Re} ||D^\alpha u||_{L_{2,\delta}} < \infty\}. \tag{1.1}$$

Если правильный многогранник $\Re = \Re(P)$ порождается дифференциальным оператором $P(D)$, то положим

$$H^P_{\Re,\,\delta} = \{u; ||u||_{H^P_{\Re,\delta}} \equiv ||u||_{2,\,\delta} + ||P(D)u||_{H_{\Re,\delta}} < \infty\},$$

$$H^\infty_{\Re,\delta} = \bigcap_{m=1}^{\infty} H_{m\cdot\Re,\delta}; \quad H^{P,\infty}_{\Re,\delta} = \bigcap_{m=1}^{\infty} H^P_{m\cdot\Re,\delta}.$$

Так как очевидно, что для произвольного многогранника $\Re$

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} (m\Re) = N_0^n,$$

то множества $H^\infty_{\Re,\delta}$ и $H^{P,\infty}_{\Re,\delta}$ не зависят от $\Re$. Поэтому далее (считая, что $\Re$ правильный многогранник) в обозначениях мы опустим символ $\Re$ и будем писать H^∞_δ и $H^{P,\infty}_\delta$ вместо $H^\infty_{\Re,\delta}$ и $H^{P,\infty}_{\Re,\delta}$ соответственно.

В [7] доказано, что если символ $P(\xi)$ оператора $P(D)$ удовлетворяет условию $|P(\xi)| \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$, то оператор $P(D)$ является почти гипоэллиптическим тогда и только тогда, когда существует число $\delta_0 > 0$ такое, что любое обобщенное решение $u \in L_{2,\delta}; (\delta \leq \delta_0)$ уравнения $P(D)u = 0$ принадлежит H^∞_δ (см. [7], теоремы 3.1 и 3.2). Применяя теорему вложения для пространств Соболева (см., например [10], теорема 10.4) получим, что в отмеченном случае решение является бесконечно дифференцируемой функцией.

Что же касается неоднородного уравнения $P(D)u = f$, то в работах [9] и [12] В. И. Буренков изучил уравнение $P(D)u = f$ в цилиндре $\Omega = \Omega_m \times E^{n-m}$ при $0 \leq m < n$, где Ω_m некоторое открытое множество в E^m (если $m = 0$, то $\Omega = E^n$), а f и все ее частные производные m-локально интегрируемы с квадратом в Ω (если $m = 0$, то интегрируемы с квадратом в Ω). Им получены необходимые и достаточные условия на оператор P, при которых все обобщенные решения уравнения $P(D)u = f$ бесконечно дифференцируемы, если бесконечно дифференцируема f. Класс таких операторов существенно шире класса гипоэллиптических операторов.

Цель настоящей работы - доказать, что если $P(D)$ регулярный почти гипоэллиптический оператор, то существует число $\delta_0 > 0$ такое, что $H^{P,\infty}_\delta \subset H^\infty_\delta$ при

$\delta \leq \delta_0$ или, что то же самое, для любого $f \in H_\delta^\infty$

$$N_\delta(P,f) = \{u \in L_{2,\delta}, (u, P(-D)\varphi) = (f,\varphi) \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(E^n)\} \subset H_\delta^\infty.$$

Отметим, что это утверждение перестает быть справедливым, если оператор $P(D)$ не является почти гипоэллиптическим или, если оператор почти гипоэллиптичен, но δ достаточно большое число. В самом деле, рассмотрим следующие примеры:

Пример 1. *Пусть*

$$P_1(D) = P_1(D_1,D_2) = D_1^2 - D_2^2 = (\frac{1}{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x})^2 - (\frac{1}{i}\cdot\frac{\partial}{\partial y})^2 = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

и $\delta > 0$, $g(t) \in L_2(E^1)\setminus C^\infty(E^1)$. *Очевидно, функция* $u(x,y) = g(x-y) \in L_{2,\,\delta}(E^2)$ *и* $(u, P_1(-D)\varphi) = 0$ *для любой* $\varphi \in C_0^\infty(E^2)$. *Следовательно* $u \in H_\delta^{P,\infty}$. *Однако* $u \notin H_\delta^\infty$ *ибо* $H_\delta^\infty \subset C^\infty$.

Пример 2. *Пусть*

$$P_2(D) = P_2(D_1,D_2) = D_1^2D_2^2 + D_1^2 + D_2^2 + 1 = \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 1,$$

и $\delta > 1$, *а функция* $g \in C^2(E^1) \setminus C^\infty(E^1)$ *такая, что*

$$||g||_{L_2(E^2)} + ||g^{''}||_{L_2(E^2)} < \infty.$$

Очевидно, $P_2(D)$ *– почти гипоэллиптический оператор, при этом функция* $u(x,y) = e^x \cdot g(y) \in L_{2,\delta}$ *является решением однородного уравнения* $P(D)u = 0$. *Следовательно* $u \in H_\delta^{P,\infty}$. *Однако* $u \notin H_\delta^\infty$, *так как* $u \notin C^\infty(E^2)$.

2. Вспомогательные предложения

Для $k \in N$ и $\gamma \in N_0^n$ через $d_k(\gamma)$ обозначим количество мультииндексов $\sqcap(\gamma)$ таких, что $|\alpha| = k$ и положим

$$d(\gamma) = \max_{1\leq k\leq|\gamma|}\{d_k(\gamma)\}.$$

Лемма 1. *Пусть* $\gamma \in N_0^n$, $\delta_0 > 0$ *и пусть* $a_\alpha(\delta)$, $b_\alpha(\delta)$ *неотрицательные в* $(0,\delta_0)$ *функции с некоторой постоянной* $\kappa > 0$ *удовлетворяющие условиям*

$$a_\alpha(\delta) \leq b_\alpha(\delta) + \kappa \sum_{\beta\in\sqcap(\alpha)} a_\beta(\delta)\,\delta^{|\alpha|-|\beta|}; \quad \alpha \in \sqcap^{'}(\gamma),\ \delta \in (0,\delta_0). \tag{2.1}$$

Тогда при $\delta \in (0,\delta_0)$

$$\sum_{\alpha\in\sqcap'(\gamma)} \left(\frac{\delta}{2\kappa\, d(\gamma)+1}\right)^{-|\alpha|} a_\alpha(\delta) \leq 2 \sum_{\alpha\in\sqcap'(\gamma)} \left(\frac{\delta}{2\kappa\, d(\gamma)+1}\right)^{-|\alpha|} b_\alpha(\delta). \tag{2.2}$$

Доказательство. Обозначим $h = 2\kappa\, d(\gamma) + 1$. Умножим неравенства (2.1) на $(\delta h)^{-|\alpha|}$ и просуммируем полученные неравенства по $\alpha \in \sqcap'(\gamma)$. Получим, что для всех $\delta \in (0, \delta_0)$

$$\sum_{\alpha\in\sqcap'(\gamma)} (\delta h)^{-|\alpha|} a_\alpha(\delta) \le \sum_{\alpha\in\sqcap'(\gamma)} (\delta h)^{-|\alpha|} b_\alpha(\delta) +$$

$$+\kappa \sum_{\alpha\in\sqcap'(\gamma)} \sum_{\beta\in\sqcap(\alpha)} (\delta h)^{-|\beta|}\, a_\beta(\delta) h^{-(|\alpha|-|\beta|)} =$$

$$= \sum_{\alpha\in\sqcap'(\gamma)} (\delta h)^{-|\alpha|} b_\alpha(\delta) + \kappa \left[\sum_{\beta\in\sqcap(\gamma)} (\delta h)^{-|\beta|}\, a_\beta(\delta)\right] \left[\sum_{\alpha\in\sqcap(\beta,\gamma)} h^{-(|\alpha|-|\beta|)}\right],$$

где $\sqcap(\beta,\gamma) = \{\alpha \in N_0^n, \beta_i \le \alpha_i \le \gamma_i \quad i = 1, ..., n; \alpha \ne \beta\}$.
Так как $(\kappa d(\gamma))/(h-1) = 1/2$ по определению числа h, то отсюда имеем для всех $\delta \in (0, \delta_0)$

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{\alpha\in\sqcap'(\gamma)} (\delta h)^{-|\alpha|} a_\alpha(\delta) \le \sum_{\alpha\in\sqcap(\gamma)} (\delta h)^{-|\alpha|} \left[1 - \frac{\kappa d(\gamma)}{h-1}\right] a_\alpha(\delta) +$$

$$+(\delta h)^{-|\gamma|} a_\gamma(\delta) \le \sum_{\alpha\in\sqcap(\gamma)} (\delta h)^{-|\alpha|} \left[1 - \sum_{\mu\in\sqcap(\alpha,\gamma)} h^{-(|\mu|-|\alpha|)}\right] a_\alpha(\delta) +$$

$$+(\delta h)^{-|\gamma|} a_\gamma(\delta) \le \sum_{\alpha\in\sqcap'(\gamma)} (\delta h)^{-|\alpha|} b_\alpha(\delta),$$

что доказывает неравенство (2.2). Лемма доказана. □

Ниже нам приходится дифференцировать весовую функцию, определяющую пространство $H_{\Re,\delta}$. В работе [7] показано, что вес $e^{-|x|}$ пространства $H_{\Re,\delta}$ можно заменить положительным гладким весом g так, чтобы полученное весовое пространство (которое также обозначим через $H_{\Re,\delta}$) было бы топологически эквивалентным исходному пространству. В [7] доказано существование заменяющей весовой функции $g \in C^\infty$, удовлетворяющей следующим условиям (здесь и далее $g_\delta(x) = g(\delta x)$):

1. существует постоянная $\varsigma > 0$ такая, что

$$\varsigma^{-1}\, e^{-\delta|x|} \le g_\delta(x) \le \varsigma\, e^{-\delta|x|}, \quad x \in E^n.$$

2. Для каждого $\alpha \in N_0^n$ существует число $\varsigma_\alpha > 0$ такое, что

$$|D^\alpha g_\delta(x)| \le \varsigma_\alpha \delta^{|\alpha|}\, g_\delta(x), \quad x \in E^n.$$

3. Пусть $T > 0$, $S_T = \{x;\, x \in E^n,\, |x| \le T\}$ и $\sigma_1 = \sigma_1(\delta, T) = \varsigma^2 e^{\delta T}$. Тогда

$$\sup_{y \in S_T} g_\delta(x+y) \le \sigma_1(\delta, T)\, g_\delta(x), \quad x \in E^n.$$

4. Пусть $T > 0$ и $\sigma_2 = \sigma_2(\delta, T) = \sqrt{n}\varsigma^2 \max\{\varsigma_\alpha; |\alpha| = 1\}\delta T e^{\delta T}$. Тогда

$$\sup_{y \in S_T} |g_\delta(x+y) - g_\delta(x)| \le \sigma_2 g_\delta(x), \quad x \in E^n.$$

Далее при определении класса $H_{\Re,\delta}$ будем считать, что вес $g \in C^\infty$ удовлетворяет условиям 1) - 4).

Лемма 2. *Пусть $\Re$ – правильный многогранник в N_0^n и $\delta > 0$. Тогда следующие нормы эквивалентны норме, определенной формулой* (1.1)

$$||u||'_{\Re,\delta} = \sum_{\alpha \in \Re} ||(D^\alpha u) g_\delta||_{L_2}; \quad ||u||''_{\Re,\delta} = \sum_{\alpha \in \Re} ||D^\alpha (u g_\delta)||_{L_2}.$$

Доказательство. Эквивалентность норм $||\cdot||$ и $||\cdot||'$ непосредственно следует из свойства 1) функции g_δ. Докажем эквивалентность норм $||\cdot||'$ и $||\cdot||''$.
Так как $\Re$ правильный многогранник, то в силу формулы Лейбница и свойства 2) функции g_δ имеем с некоторой постоянной $C_1 = C_1(\Re, \delta) > 0$

$$||u||''_{\Re,\delta} = \sum_{\alpha \in \Re} ||D^\alpha (u g_\delta)||_{L_2} = \sum_{\alpha \in \Re} ||\sum_{\beta \le \alpha} C_\alpha^\beta (D^\beta u)(D^{\alpha-\beta} g_\delta)||_{L_2} \le$$

$$\le C_1 \sum_{\beta \in \Re} ||(D^\beta u)\, g_\delta||_{L_2} = C_1\, ||u||'_{\Re,\delta}. \tag{2.3}$$

Для доказательства обратного неравенства обозначим для всех $\alpha \in \Re$

$$a_\alpha(\delta) = ||(D^\alpha u)\, g_\delta||_{L_2}, \quad b_\alpha(\delta) = ||D^\alpha (u\, g_\delta)||_{L_2}.$$

Так как по формуле Лейбница

$$a_\alpha(\delta) = ||D^\alpha (u\, g_\delta) - \sum_{\beta \in \sqcap(\alpha)} C_\alpha^\beta (D^\beta u)(D^{\alpha-\beta} g_\delta)||_{L_2},$$

то по свойству 2) функции g_δ отсюда имеем для всех $\alpha \in \Re$

$$a_\alpha(\delta) \le b_\alpha(\delta) + \kappa_\alpha \sum_{\beta \in \sqcap(\alpha)} a_\beta(\delta) \delta^{|\alpha| - |\beta|},$$

где

$$\kappa(\alpha) = \max_{\beta \in \sqcap(\alpha)} \{C_\alpha^\beta\, \varsigma_\alpha\}, \quad \kappa = \max_{\alpha \in \Re} \{\kappa(\alpha)\}.$$

Поэтому при любых $\gamma \in \Re$ и $\alpha \in \sqcap^{'}(\gamma)$ выполняется неравенство (2.1). Тогда по лемме 1 справедливо неравенство (2.2) и следовательно для любого $\gamma \in \Re$ имеем с некоторой постоянной $C_2 = C_2(\gamma, \delta) > 0$

$$\sum_{\alpha \in \sqcap^{'}(\gamma)} ||(D^\alpha u)\, g_\delta||_{L_2} \le C_2 \sum_{\alpha \in \sqcap^{'}(\gamma)} ||D^\alpha (u\, g_\delta)||_{L_2}. \tag{2.4}$$

Из правильности многогранника $\Re$ следует, что

$$\bigcup_{\gamma \in \Re} \sqcap^{'}(\gamma) = \Re,$$

поэтому из оценок (2.3) - (2.4) следует эквивалентность норм $|| \cdot ||^{''}$ и $|| \cdot ||^{'}$ и, следовательно, эквивалентность всех трех норм. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3. *Пусть $\Re$ – правильный многогранник и $\delta > 0$. Тогда множество H_δ^∞ плотно в $H_{\Re,\delta}$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, $\varphi \in C_0^\infty(S_1)$, $\varphi(x) \ge 0$ при $x \in S_1$ и $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \cdot \varphi(\frac{x}{\varepsilon})$. Для $u \in H_{\Re,\delta}$ обозначим $u_\varepsilon(x) = (u * \varphi_\varepsilon)(x) = \int u(x-y)\varphi_\varepsilon(y)dy$.
Тогда в силу свойства 4) функции g_δ и неравенства Юнга имеем для любого $m \in N$

$$\sum_{\alpha \le m} \int \left[\left| \int u(x-y) D^\alpha \varphi_\varepsilon(y) dy \right| \right]^2 g_\delta^2(x) dx =$$

$$\sum_{\alpha \le m} \int \left[\left| \int u(x-y) g_\delta(x-y) D^\alpha \varphi_\varepsilon(y) dy - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int u(x-y)[g_\delta(x-y) - g_\delta(x)] D^\alpha \varphi_\varepsilon(y) dy \right| \right]^2 dx \le 2\{ \sum_{\alpha \le m} ||(u g_\delta) * D^\alpha \varphi_\varepsilon||_{L_2}^2 +$$

$$+ \sigma_2^2 \sum_{\alpha \le m} \int \left[\int |u(x-y)| g_\delta(x-y) |D^\alpha \varphi_\varepsilon(y)| dy \right]^2 dx \} \le$$

$$\le 2(1+\sigma_2^2) \sum_{\alpha \le m} ||u g_\delta||_{L_2}^2\, ||D^\alpha \varphi_\varepsilon||_{L_1}^2 = (1+\sigma_2^2) \sum_{\alpha \le m} \varepsilon^{-2|\alpha|} ||(D^\alpha \varphi)_\varepsilon||_{L_1}^2\, ||u g_\delta||_{L_2}^2 < \infty.$$

Так как число $m \in N$ произвольно, то отсюда следует, что $u_\varepsilon \in H_\delta^\infty$ при $\varepsilon > 0$.
Остается показать, что $||u_\varepsilon - u||_{\Re,\delta} \to 0$ при $\varepsilon \to +0$.
В силу леммы 1 имеем с некоторой постоянной $C_1 > 0$

$$||u_\varepsilon - u||_{H_{\Re,\delta}} \le C_1 \sum_{\alpha \in \Re} ||D^\alpha (u_\varepsilon - u)||_{L_{2,\delta}} = C_1 \sum_{\alpha \in \Re} ||[(D^\alpha u)_\varepsilon - (D^\alpha u)] g_\delta||_{L_2} \le$$

$$\le C_1 \sum_{\alpha \in \Re} [||((D^\alpha u) g_\delta)_\varepsilon - (D^\alpha u)_\varepsilon g_\delta||_{L_2} + ||((D^\alpha u) g_\delta)_\varepsilon - (D^\alpha u) g_\delta||_{L_2}]. \tag{2.5}$$

Так как $(D^\alpha u)g_\delta \in L_2$ при $u \in H_{\Re,\delta}$ и $\alpha \in \Re$, то в силу непрерывности в целом функций из L_2 (см., например [10]) имеем при $\varepsilon \to +0$

$$\sum_{\alpha\in\Re} ||((D^\alpha u)g_\delta)_\varepsilon - (D^\alpha u)g_\delta||_{L_2} \to 0. \tag{2.6}$$

Покажем,что при $\varepsilon \to +0$

$$\sum_{\alpha\in\Re} ||((D^\alpha u)g_\delta)_\varepsilon - (D^\alpha u)_\varepsilon\, g_\delta||_{L_2} \to 0. \tag{2.7}$$

Так как $\sigma_2(\delta,\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to +0$, то применяя неравенство Юнга, из свойства 4) функции g имеем при $\varepsilon \to +0$

$$\sum_{\alpha\in\Re} ||((D^\alpha u)g_\delta)_\varepsilon - (D^\alpha u)_\varepsilon \cdot g_\delta||_{L_2} =$$

$$\sum_{\alpha\in\Re} ||\int (D^\alpha u)(x-y)[g_\delta(x-y) - g_\delta(x)]\varphi_\varepsilon(y)dy||_{L_2} \le$$

$$\le \sigma_2(\delta,\varepsilon) \cdot \sum_{\alpha\in\Re} ||\int |(D^\alpha u)(x-y)|g_\delta(x-y)\varphi_\varepsilon(y)dy||_{L_2} \le$$

$$\le \sigma_2(\delta,\varepsilon) \cdot \sum_{\alpha\in\Re} ||(D^\alpha u)g_\delta||_{L_2} \cdot ||\varphi_\varepsilon||_{L_1} \to 0,$$

при $\varepsilon \to +0$.

Из (2.5) - (2.7) следует, что $||u_\varepsilon - u||_{\Re,\delta} \to 0$ при $\varepsilon \to +0$. Лемма доказана. □

Следствие 1. *Пусть $\delta > 0$, $\Re$ – правильный многогранник и $P(D)$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Тогда H_δ^∞ плотно в $H_\delta^{P,\infty}$.*

Доказательство непосредственно следует из леммы 3, если заметить (см., например, [10], 6.3), что

$$P(D)u_\varepsilon(x) = (P(D)u)_\varepsilon(x); x \in E^n, u \in H^P_{\Re,\,\delta}.$$

Далее для многочлена $P(\xi)$ через $d_P(\xi)$ обозначим расстояние точки $\xi \in R^n$ от поверхности $\wedge(P) = \{\varsigma; \varsigma \in C^n, P(\varsigma) = 0\}$.

Известно (см. [6], лемма 11.1.4), что для любого многочлена P от n переменных существует число $C = C(ordP, n) > 0$ такое, что

$$C^{-1} \le d_P(\xi) \sum_{|\alpha|>0} |P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi)|^{1/|\alpha|} \le C, \quad \forall\, \xi \in R^n,\ P(\xi) \ne 0. \tag{2.8}$$

Из (2.8) непосредственно следует, что если $|P(\xi)| \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$, то оператор почти гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда

$$\rho_P \equiv \lim_{t\to\infty} \min_{|\xi|=t} d_P(\xi) > 0.$$

Из (2.8) также следует существование чисел $\rho_0 < \rho_P$ и $C = C(\rho_0) > 0$ таких, что для почти гипоэллиптического оператора $P(D)$ и для всех $\rho \le \rho_0$ имеем

$$\sum_{\alpha\in\Re} \rho^{|\alpha|}\, |P^{(\alpha)}(\xi)| \le C(|P(\xi)|+1), \quad \xi \in R^n. \tag{2.9}$$

Лемма 4. *Пусть $P(D)$ – регулярный почти гипоэллиптический оператор с правильным многогранником Ньютона $\Re$. Тогда существует число $\Delta = \Delta(P) > 0$ такое, что при $\delta \in (0,\Delta)$*

$$H_\delta^P \equiv \{u \in L_{2:\delta},\ P(D)u \in L_{2,\delta}\} = H_{\Re,\delta}.$$

Доказательство. В силу лемм 2 и 3 достаточно доказать существование чисел $\Delta > 0$ и $C > 0$ таких, что при $\delta \in (0,\Delta)$ и $u \in H_\delta^\infty = H_{\Re,\,\delta}^\infty$

$$C^{-1}\, ||u||_{H_{\Re,\delta}} \le ||u||_{L_{2,\delta}} + ||P(D)u||_{L_{2,\delta}} \le C\, ||u||_{H_{\Re,\delta}}. \tag{2.10}$$

Так как правая часть неравенства (2.10) очевидна, то в доказательстве нуждается только левая часть.

В силу формулы Лейбница и свойства 2) функции g_δ имеем с некоторой постоянной $C_1 = C_1(g) > 0$ при $\rho \in (0,\rho_0)$

$$\sum_{\alpha\in\Re} \rho^{|\alpha|}\, ||(P^{(\alpha)}(D)u)g_\delta||_{L_2} \le \sum_{\alpha\in\Re} \rho^{|\alpha|}\, ||P^{(\alpha)}(D)(ug_\delta)||_{L_2} +$$

$$+C_1 \sum_{0\ne\gamma\in\Re} \rho^{|\gamma|}\, ||(P^{(\gamma)}(D)u)g_\delta||_{L_2} \sum_{0\ne\beta\le\gamma} \frac{1}{\beta!}\,(\frac{\delta}{\rho})^{|\beta|}. \tag{2.11}$$

Оценим первое слагаемое правой части (2.11). В силу равенства Парсеваля, формулы Лейбница и свойства 2) функции g_δ из (2.9) с некоторыми постоянными $C_2 > 0$, $C_3 > 0$ имеем

$$\sum_{\alpha\in\Re} \rho^{|\alpha|}\, ||P^{(\alpha)}(D)(ug_\delta)||_{L_2} = \sum_{\alpha\in\Re} \rho^{|\alpha|}\, ||F[P^{(\alpha)}(D)(ug_\delta)]||_{L_2} =$$

$$= \sum_{\alpha\in\Re} \rho^{|\alpha|}\, ||P^{(\alpha)}(\xi)F(ug_\delta)||_{L_2} \le C_2[||P(\xi)F(ug_\delta)||_{L_2} + ||F(ug_\delta)||_{L_2}] =$$

$$= C_2[||P(D)(ug_\delta)||_{L_2} + ||ug_\delta||_{L_2}] \le C_2[||(P(D)u)g_\delta)||_{L_2} + ||ug_\delta||_{L_2}] +$$

$$+C_2 \sum_{0\ne\alpha\in\Re} \frac{1}{\alpha!} ||(P^{(\alpha)}(D)u)D^\alpha g_\delta||_{L_2} \le C_2[||P(D)u||_{L_{2,\,\delta}} + ||u||_{L_{2,\delta}}] +$$

$$+C_3 \sum_{0\neq\alpha\in\Re} \frac{\delta^{|\alpha|}}{\alpha!} ||P^{(\alpha)}(D)u||_{L_{2,\delta}}, \tag{2.12}$$

где $F(v)$ – преобразование Фурье функции v.

Из (2.11), (2.12) следует, что

$$||P(D)u||_{L_{2,\delta}} + \sum_{0\neq\alpha\in\Re} \rho^{|\alpha|}\, ||P^{(\alpha)}(D)u||_{L_{2,\delta}} = \sum_{\alpha\in\Re} \rho^{|\alpha|} \cdot ||(P(D)u)g_\delta)||_{L_2} \leq$$

$$\leq C_2\, [||(P(D)u)g_\delta)||_{L_2} + ||ug_\delta||_{L_2}] + C_3 \sum_{0\neq\alpha\in\Re} \frac{\delta^{|\alpha|}}{\alpha!} ||[P^{(\alpha)}(D)u]g_\delta||_{L_2} +$$

$$+C_1 \sum_{0\neq\gamma\in\Re} \rho^{|\gamma|}\, ||(P^{(\gamma)}(D)u)g_\delta||_{L_2} \sum_{0\neq\beta\leq\gamma} \frac{1}{\beta!}\, (\frac{\delta}{\rho})^{|\beta|}.$$

Переносся соответствующие слагаемые справа на лево, получаем

$$||P(D)u||_{L_{2,\,\delta}} + \sum_{0\neq\alpha\in\Re} \rho^{|\alpha|}\, ||P^{(\alpha)}(D)u||_{L_{2,\delta}}\, [1 - C_3 \frac{(\delta/\rho)^{|\alpha|}}{\alpha!} -$$

$$-C_1 \sum_{0\neq\beta\leq\alpha} \frac{(\delta/\rho)^{|\beta|}}{\beta!}] \leq C_2\, [||P(D)u||_{L_{2,\delta}} + ||u||_{L_{2,\delta}}]. \tag{2.13}$$

Пусть $\rho_0 = \frac{1}{2}\rho_P$. Выберем число $\Delta > 0$ так, что

$$A_\alpha \equiv 1 - C_3 \frac{(\delta/\rho)^{|\alpha|}}{\alpha!} - C_1 \sum_{0\neq\beta\leq\alpha} \frac{(\delta/\rho)^{|\beta|}}{\beta!} \geq \frac{1}{2} \tag{2.14}$$

при всех $0 \neq \alpha \in \Re$ и $\delta \in (0, \Delta)$. Тогда из (2.13) следует, что при $u \in H_\delta^\infty$

$$\frac{1}{2}||P(D)u||_{L_{2,\delta}} + \frac{1}{2} \sum_{0\neq\alpha\in\Re} \rho_0^{|\alpha|}\, ||P^{(\alpha)}(D)u||_{L_{2,\delta}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}||P(D)u||_{L_{2,\delta}} + \sum_{0\neq\alpha\in\Re} \rho_0^{|\alpha|}\, ||P^{(\alpha)}(D)u||_{L_{2,\delta}}\, A_\alpha \leq$$

$$\leq C_2\, [||P(D)u||_{L_{2,\delta}} + ||u||_{L_{2,\delta}}] \quad \forall\, \delta \in (0, \Delta).$$

Отсюда при всех $\delta \in (0, \Delta)$ и $u \in H_\delta^\infty$ имеем

$$\sum_{\alpha\in\Re} \rho_0^{|\alpha|}\, ||(P^{(\alpha)}(D)u)g_\delta)||_{L_2} \leq 2C_2[||P(D)u||_{L_{2,\delta}} + ||u||_{L_{2,\delta}}]. \tag{2.15}$$

С другой стороны, так как многочлен $P(\xi)$ регулярен и многогранник $\Re$ правильный, то (см. [2])

$$\sum_{\alpha\in\Re} |\xi^\alpha| \leq C_4[|P(\xi)| + 1], \quad \xi \in R^n$$

с некоторой постоянной $C_4 > 0$. Поэтому при $\xi \in R^n$

$$\sum_{\alpha\in\Re} |\xi^\alpha F(ug_\delta)(\xi)| \leq C_4[|P(\xi)\, F(ug_\delta)(\xi)| + |F(ug_\delta)(\xi)|]. \tag{2.16}$$

Применяя равенство Парсеваля и формулу Лейбница, в силу свойства 2) функции g_δ с некоторой постоянной $C_4 > 0$ и для всех $u \in H_\delta^\infty$ имеем

$$||u||''_{H_{\Re,\delta}} \equiv \sum_{\alpha \in \Re} ||D^\alpha(ug_\delta)||_{L_2} \le C_4\,[||P(D)(ug_\delta)||_{L_2} + ||ug_\delta||_{L_2}] \le$$

$$\le C_5 \left[\sum_{\alpha \in \Re} \frac{\delta^{|\alpha|}}{\alpha!}\,||P^{(\alpha)}(D)u||_{L_{2,\delta}} + ||u||_{L_2}\right].$$

Так как, очевидно, $\Delta \le \rho$, то отсюда и из оценки (2.15) получим

$$||u||''_{H_{\Re,\delta}} \le C_5\,\{2C_2[||P(D)u||_{L_{2,\delta}} + ||u||_{L_2}] + ||u||_{L_2}\} \quad \delta \in (0,\Delta), \quad u \in H_\delta^\infty.$$

Так как по лемме 2 нормы $||\cdot||''$ и $||\cdot||$ эквивалентны, то это доказывает левую часть (2.10). Лемма доказана. □

3. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть* $P(D)$ *– регулярный почти гипоэллиптический оператор с (правильным) многогранником Ньютона* $\Re = \Re(P)$, *а число* $\Delta = \Delta(P)$ *удовлетворяет условию* (2.14). *Тогда*

$$H^P_{(k-1)\Re,\delta} = H_{k\cdot\Re,\delta}.$$

Доказательство. Применяя леммы 2 и 3 получим, что утверждение теоремы эквивалентно тому, что для любых $k \in N$ и $\delta \in (0,\Delta)$ существует число $C = C(k,\Delta) > 0$ такое, что

$$C^{-1}\cdot||u||'_{H_{k\cdot\Re,\delta}} \le ||u||'_{H^P_{(k-1)\Re,\delta}} \le C||u||'_{H_{k\cdot\Re,\delta}} \quad u \in H_\delta^\infty. \tag{3.1}$$

Очевидно, в доказательстве нуждается лишь левая часть (3.1), которое будем вести индукцией по $k \in N$. При $k = 1$ левая часть (3.1) непосредственно следует из леммы 4. Предположим, что неравенства (3.1) доказаны для всех $k \le r \in \Re$ и докажем их для $k = r + 1$.

Так как $(k+1)\Re = \{\gamma \in N_0^n; \gamma = \alpha + \beta, \alpha \in k\Re, \beta \in \Re\}$, то по предположению индукции и в силу леммы 4 имеем с некоторой постоянной $C_1 > 0$ (см. неравенство (2.10))

$$||u||'_{H_{(r+1)\cdot\Re,\delta}} = \sum_{\gamma \in (r+1)\Re} ||(D^\gamma u)g_\delta)||_{L_2} \le \sum_{\alpha \in r\Re}\sum_{\beta \in \Re} ||(D^\beta[D^\alpha u])g_\delta||_{L_2} =$$

$$= \sum_{\alpha \in r\Re} ||D^\alpha u||_{H_{\Re,\delta}} \le C_1\,\{\sum_{\alpha \in r\Re} ||(D^\alpha u)g_\delta||_{L_2} + ||(P(D)(D^\alpha u)g_\delta||_{L_2}\} \le$$

$$\le C_1\,[||u||'_{H^P_{r\Re,\delta}} + ||u||'_{H_{r\cdot\Re,\delta}}] \le \sum_{j=1}^{r+1} C_1^j\,||u||'_{H^P_{(r+1-j)\Re,\delta}} \le (\sum_{j=1}^{r+1} C_1^j)\,||u||'_{H^P_{r\Re,\delta}}.$$

Этим левая часть неравенства (3.1) и тем самым теорема 1 доказаны. □

Следствие 2. *Пусть* $P(D)$ *– регулярный почти гипоэллиптический оператор и* $f \in H_\delta^\infty$. *Тогда существует число* $\Delta = \Delta(P) > 0$ *такое, что при* $\delta \in (0, \Delta)$ $N_\delta(P, f) \subset H_\delta^\infty$.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 1, так как для некоторого числа $\Delta_0(P) \leq \Delta(P)$ справедливо вложение

$$N_\delta(P, f) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} H^P_{k\cdot\Re,\delta},$$

где число $\Delta(P)$ определяется соотношением (2.14), а $\Re = \Re(P)$ – правильный многогранник Ньютона оператора $P(D)$.

Теорема 2. *Пусть* $P(D)$ *– линейный дифференциальный оператор с полным многогранником* $\Re = \Re(P)$. *Если* $H^P_{k\Re,\delta} \subset H_{(k+1)\Re,\delta_0}$ *для некоторых* $k \in N_0$ *и* $\delta_0 > 0$, *то многогранник* $\Re$ *– правильный, а* $P(D)$ *- регулярный, почти гипоэллиптический оператор.*

Доказательство. Сначала покажем регулярность оператора $P(D)$. В силу теоремы о замкнутом графике (или в силу теоремы Банаха) (см., например, [11]) из условия теоремы следует существование постоянной $C > 0$ такой, что

$$||u||'_{H_{(k+1)\cdot\Re,\delta_0}} \leq C||u||'_{H^P_{k\cdot\Re,\delta_0}} \quad \forall\, u \in H^P_{k\cdot\Re,\delta_0}. \tag{3.2}$$

С другой стороны, так как $u_\xi(x) \equiv e^{i<x,\xi>} \in H^P_{k\cdot\Re,\delta}$ для произвольной точки $\xi \in R^n$ и для произвольного числа $\delta > 0$, то отсюда имеем

$$\sum_{\alpha\in(k+1)\Re} |\xi^\alpha|\, ||u_\xi||_{L_{2,\delta_0}} \leq C\, [||u_\xi||_{L_{2,\delta_0}} + \sum_{\beta\in k\Re} |\xi^\beta P(\xi)|\, ||u_\xi||_{L_{2,\delta_0}}], \quad \forall \xi \in R^n.$$

Или, что то же самое,

$$\sum_{\alpha\in(k+1)\Re} |\xi^\alpha| \leq C\, [\sum_{\beta\in k\Re} |\xi^\beta P(\xi)| + 1], \quad \forall\, \xi \in R^n.$$

Отсюда непосредственно следует регулярность оператора $P(D)$.
Докажем почти гипоэллиптичность оператора $P(D)$. Предположим обратное, что при условиях теоремы, оператор $P(D)$ не является почти гипоэллиптическим. Тогда существует последовательность $\{\xi^s\}$ такая, что

$$t_s := |\xi^s| \to \infty \quad \text{и} \quad d_P(\xi^s) \to 0 \quad \text{при} s \to \infty.$$

Для $s \in N$ обозначим через $z^s \in \bigwedge(P)$ точку, реализующую минимум в определении функции $d_P(\xi^s)$, т.е. $d_P(\xi^s) = |\xi^s - z^s|$. Так как $d_P(\xi^s) \to 0$ при $s \to \infty$, то $|Imz^s| \to 0$ при $s \to \infty$. Поэтому, не умаляя общности, можно считать, что $|Imz^s| \le \delta_0/2$ $(s = 1, 2, \ldots)$.
Очевидно, $v_s(x) := e^{i<x,z^s>} \in H^P_{k\cdot\Re,\delta_0}$ $(s = 1, 2, \ldots)$, поэтому из (3.2) имеем для всех $s \in N$

$$\sum_{\alpha\in(k+1)\Re} |(z^s)^\alpha| \, ||v_s||'_{L_{2,\delta_0}} \le C \, [||v_s||'_{L_{2,\delta_0}} +$$
$$+ \sum_{\alpha\in k\Re} |(z^s)^\alpha| \, |P(z^s)| \, ||v_s||'_{L_{2,\delta_0}}] = C \, ||v_s||'_{L_{2,\delta_0}},$$

т.е.

$$\sum_{\alpha\in(k+1)\Re} |(z^s)^\alpha| \le C \quad (s = 1, 2, \ldots).$$

Так как $\Re$ – полный многогранник, то $\Re$ имеет вершины на каждой координатной оси N_0^n, отличные от начала координат. Поэтому $|z^s| \le C$ $(s = 1, 2, \ldots)$. Отсюда и из определения точек z^s имеем

$$|\xi^s| \le |\xi^s - z^s| + |z^s| \le d_P(\xi^s) + C \quad (s = 1, 2, \ldots).$$

Так как по предположению $d_P(\xi^s) \to 0$ при $s \to \infty$, то это противоречит тому, что $|\xi^s| \to \infty$ при $s \to \infty$.
Полученное противоречие доказывает почти гипоэллиптичность оператора $P(D)$. Так как многогранник Ньютона почти гипоэллиптического оператора является правильным многогранником (см. [5]), то этим теорема доказана. □

Abstract. It is proved that if $P(D)$ is a regular, almost hyperelliptic operator and

$$L_{2,\delta} = \{u; ||u||_{2,\delta} = \left[\int (|u(x)| \cdot e^{-\delta\cdot|x|})^2 dx\right]^{1/2} < \infty\}, \quad \delta > 0$$

and H^∞_δ is the $e^{-\delta\cdot|x|}$-weighted Sobolev space, then there exists a number $\delta_0 > 0$ such that all solutions $u \in L_{2,\delta}$ of differential equation $P(D)u = f$ belong to H^∞_δ for any $f \in H^\infty_\delta$ with some $\delta \le \delta_0$.

Список литературы

[1] С. М. Никольский, “Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения”, ДАН СССР, **146**, (4), 767 – 769 (1968).
[2] В. П. Михайлов, “О поведении на бесконечности одного класса многочленов”, Труды МИАН СССР, **150**, 143 – 159 (1965).
[3] S. Gindikin, L. Volevich, The Method of Newtons Polyhedron in the Theory of PDE, Kluwer (1992).
[4] Г. Г. Казарян, “Об оценках норм производных через нерегулярный набор операторов”, Дифф. уравнения, **5**, (5), 911 – 921 (1967).

[5] G. G. Kazaryan, “On Almost - Hypoelliptic Polynomials”, Doklady Ross. Acad. Nauk, **398**, (6), 701 – 703 (2004).
[6] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators 2, Springer - Verlag (1983).
[7] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, “Об одном классе почти гипоэллиптических операторов”, Изв. НАН Армении, серия Математика, **41**, (6), 39 – 56 (2006).
[8] Г. Г. Казарян, “Некоторые оценки производных многочленов с постоянными коэффициентами”, Изв. НАН Армении, серия Математика, **34**, (3), 44 – 63 (1999).
[9] В. И. Буренков, “Аналог теоремы Л. Хермандера о гипоэллиптичности для функций, стремящихся к нулю на бесконечности”, Сб. докладов 7-ого Советско-Чехословацкого семинара, Ереван, 63 – 67 (1982).
[10] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные Представления Функций и Теоремы Вложения, Москва, Наука (1996).
[11] К. Иосида, Функциональный Анализ, Москва, Мир (1967).
[12] V. I. Burenkov, “Conditional hypoellipticity and Fourier multipliers in weighted L_p-spaces with an exponential weight”, Proc. of summerschool “Function spaces, differential operators, nonlinear analysis” held in Fridrichroda in 1993, Stuttgart - Leipzig, Teubner - Texte zur Mathematik, **133**, 256 – 265 (1993).

Поступила 19 февраля 2009