Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 4, 2010, стр. 25-32.

О ЗАДАЧЕ РАЗДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ

С. А. ВАГАРШАКЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *suren86@gmail.com*

Аннотация. Пусть сигнал состоит из суперпозиции нескольких гармонических колебаний. Задача заключается в построении линейно-причинного фильтра, который в выходном сигнале сохраняет некоторые компоненты входного сигнала и подавляет остальные. В этой статье приводятся новые оценки коэффициента усиления линейно-причинного фильтра, которые решают эту задачу.

MSC2010 number: 42A10

Ключевые слова: наилучшая аппроксимация, фильтр.

1. Введение

В данной статье мы исследуем фильтры, которые в выходном сигнале сохраняют интересующие нас компоненты входного сигнала и подавляют другие. Этот процесс типичен для входного блока радиоприемника. Здесь мы обсуждаем проблемы, которые возникают при реализации фильтра с помощью линейно-причинной системы. Следует подчеркнуть, что в радиотехнике обычно заботятся о сохранении компонентов, имеющих определенную частоту и подавляют другие, при этом не заботясь о сохранении фазы каждой гармоники (см. [4]). В настоящей статье мы интересуемся задачей сохранения не только частоты, но и фазы каждого компонента. Именно такая постановка задачи приводит к необходимости дополнительных источников энергии.

2. Основные определения и формулировка задачи

В данном параграфе мы собрали те определения и результаты, которые заимствованы из электротехники и лежат в основе обсуждаемых проблем. Обозначим через l_2 пространство последовательностей $x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), \dots)$, удовлетворяющих условию:

$$||x||^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty.$$

Последовательности, удовлетворяющие данному условию, в дальнейшем будем называть дискретными сигналами или просто сигналами.

Для любого целого числа $n \in Z$ обозначим через S_n действующий в l_2 оператор

$$S_n \{x(k); k \in Z\} = \{x(k-n); n \in Z\}.$$

Определение 1. *Линейно-причинной системой считается оператор*

$$\Phi : l_2 \to l_2,$$

который удовлетворяет следующим трем условиям:

1. Линейность. Оператор Φ является линейным и ограниченным;

2. Инвариантность. Для любого $n \in Z$ имеет место равенство

$$\Phi S_n = S_n \Phi;$$

3. Причинность. Если входящий сигнал

$$x = \{x(n), \quad n \in Z\}$$

удовлетворяет условию $x(n) = 0$, $n < 0$, то для соответствующего ему выходящего сигнала Φx выполняется условие:

$$(\Phi x)(n) = 0, \quad n < 0.$$

Обозначим через $D = \{z : \quad |z| < 1\}$ единичный круг, а через $T = \{z : \ |z| = 1\}$ его границу.

Определение 2. *z - преобразованием дискретного сигнала $\{x(n) : \ n \in Z\}$ из l_2 называется функция*

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}, \quad z \in T,$$

где сходимость ряда понимается по норме пространства $L_2(T)$.

Заметим, что z-преобразования сигналов $x \in l_2$ заполняют все пространство $L_2(T)$. Последовательность $\delta \in l_2$, принимающая значение один при $n = 0$ и тождественно обращающаяся в нуль для всех остальных значений n, называется импульсным сигналом, сосредоточенным в нуле. Обозначим через

$$h(n) = (\Phi\delta)(n), \quad n \in Z.$$

Эта последовательность называется импульсной характеристикой системы Φ. Из свойства причинности системы Φ следует

$$h(n) = 0, \quad n = -1, -2, \dots.$$

Следовательно, входящий сигнал x и выходящий сигнал $y = \Phi(x)$ связаны следующим соотношением:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(n-k) h(k), \quad n \in Z.$$

Определение 3. *Функция*

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-n}, \quad z \in T$$

называется передаточной функцией дискретной системы Φ.

Заметим, что передаточная функция аналитична вне единичного круга и ограничена. Легко проверить, что работу дискретной системы с помощью z - преобразования можно представить следующим соотношением:

$$Y(z) = S(z)X(z), \quad z \in T.$$

При реализации фильтра с помощью реального прибора необходимо учитывать мощность источника питания прибора. В любой момент времени $n \in Z$ разница между энергией входного и выходного сигналов равна:

$$\sum_{k=-\infty}^{n} |(\Phi x)(k)|^2 - \sum_{k=-\infty}^{n} |x(k)|^2.$$

Следовательно, линейная система Φ может работать, если внутри себя она имеет источники энергии, которые снабжают систему энергией не меньше, чем

$$\sup_n \left(\sum_{k=-\infty}^{n} |(\Phi x)(k)|^2 - \sum_{k=-\infty}^{n} |x(k)|^2 \right)^+,$$

где $a^+ = max(0, a)$.

Данное замечание делает естественным следующее определение.

Определение 4. *Коэффициентом усиления системы является величина*

$$St(\Phi) = \sup \left(\sum_{k=-\infty}^{0} |(\Phi x)(k)|^2 - \sum_{k=-\infty}^{0} |x(k)|^2 \right)^+,$$

где верхняя граница берется по всем сигналам $x \in l_2$*, которые удовлетворяют условию* $||x|| \leq 1$.

Известно (см. [1], стр. 80), что если $S(z)$ является передаточной функцией системы Φ, то имеет место равенство

$$St(\Phi) = \left(\sup_{|z|>1} |S(z)|^2 - 1 \right)^+.$$

Приведенная ниже теорема доказана в [1], стр. 80.

Теорема 1. *Пусть* $x_0 \in l_2$ *какой-то нетривиальный сигнал и* Φ *линейно-причинная система. Если* $\Phi x_0 = x_0$*, то для любого* $x \in l_2$ *имеет место равенство* $\Phi x = x$.

Из этой теоремы следует, что невозможно осуществить фильтрацию с помощью линейно-причинной системы. По этой причине мы вынуждены ослабить требования задачи, предполагая, что система решает задачу лишь с некоторой, заранее зафиксированной точностью.

Определение 5. *Пусть F - некоторое подмножество единичной окружности T. Обозначим через $I(F)$, подпространство в l_2, состоящее из всех сигналов $x \in l_2$, z - преобразование которых равно нулю почти всюду на подмножестве $T \setminus F$.*

Заметим, что подпространству $I(F)$ принадлежат те сигналы, чьи частоты лежат в множестве F. Обозначим через P_F действующий в пространстве l_2 ортогональный проектор на подпространство $I(F)$.
Таким образом, задача состоит в следующем: Пусть E, F два непересекающихся подмножества единичного круга T. Требуется для любого числа $\varepsilon > 0$ требуется найти такую линейно-причинную систему Φ, чтобы

$$||P_F - \Phi P_{E \cup F}|| < \epsilon. \tag{2.1}$$

Заметим, что неравенство (2.1) равносильно тому, что передаточная функция $S(z)$ системы Φ удовлетворяет следующим условиям:

$$|S(z)| < \varepsilon, \quad z \in F \quad \text{и} \quad |S(z) - 1| < \varepsilon, \quad z \in E.$$

Если подмножества E, F – замкнутые и не пересекаются, то существует ограниченная аналитическая функция $S(z)$, $|z| > 1$, которая удовлетворяет вышеприведенным условиям.
Следовательно, при указанных выше условиях, задача фильтрации имеет решение. Однако оказывается, что коффицент усиления соответствующей системы Φ растет параллельно уменьшению ε. Иначе говоря, насколько точно работает система, настолько она нуждается в более мощных энергетических источниках. В данной работе мы оцениваем коэффициент усиления системы, которая работает с данной точностью $\varepsilon > 0$.
Подробно обсудим тот случай, когда

$$E_\alpha = \{z : \quad |z| = 1, \ -\alpha < argz < \alpha\}$$

и

$$F_\beta = \{z : \quad |z| = 1, \ \beta < argz < 2\pi - \beta\},$$

где $0 < \alpha < \beta < \pi$.
Заметим, что с помощью дробно-линейного преобразования общий случай $0 < \alpha < \beta < \pi$ можно свести к частному, когда $0 < \alpha = \beta < \frac{\pi}{2}$. Действительно, пусть

$$w(z) = \frac{z - x}{1 - xz},$$

где $-1 < x < 1$. Для любых чисел $0 < \alpha < \beta < \pi$ можно найти действительное число $-1 < x < 1$ такое, что имеет место равенство $-w(e^{-i\alpha}) = w(e^{i\beta})$.

3. Вспомогательные результаты

В данном параграфе мы приводим формулировку известной теоремы Г. Сеге (см. [5], стр. 197) и одно ее следствие, которое играет существенную роль в доказательстве основной теоремы.

Теорема 2. *Пусть $h(z)$, $|z| = 1$ – неотрицательная непрерывная функция, удовлетворяющая условию*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln h(e^{ix})dx > -\infty.$$

Тогда для любого комплесного числа $|a| < 1$

$$\inf_{P\in H^\infty}\left(\sup_{z\in T}\left|\frac{A}{z-a} - P(z)\right| h(z)\right) = \frac{|A|}{1-|a|^2}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-|a|^2}{|1-ae^{ix}|}\ln h(e^{ix})dx\right\}.$$

Точная нижняя грань достигается на функции

$$P(z) = \frac{A}{z-a}\left(1 - \frac{(1-\bar{a}z)F(a)}{(1-|a|^2)F(z)}\right),$$

где

$$F(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{ix}+z}{e^{ix}-z}\ln h(e^{ix})dx\right\}, \quad |z| < 1.$$

Рассмотрим один частный случай теоремы Г. Сеге. Обозначим через

$$E_\alpha = \{z \in T; \quad -\alpha < argz < \alpha\} \quad \text{и} \quad F_\alpha = \{z \in T; \quad \pi - \alpha < argz < \pi + \alpha\},$$

где $0 < 2\alpha < \pi$. Рассмотрим следующую весовую функцию

$$h(z) = \begin{cases} e^{-m}, & z \in T \setminus E_\alpha \cup F_\alpha \\ 1, & z \in E_\alpha \cup F_\alpha. \end{cases}$$

Здесь m произвольное положительное число. Пользуясь теоремой Г. Сеге, для любого числа $-1 < y < 1$ имеем

$$\left|\frac{1}{z+iy} - P_y(z)\right| \le \frac{|F(iy)|}{1-y^2}, \quad z \in E_\alpha \cup F_\alpha$$

$$\left|\frac{1}{z+iy} - P_y(z)\right| \le \frac{|F(iy)|e^m}{1-y^2}, \quad z \in T \setminus E_\alpha \cup F_\alpha,$$

где

$$P_y(z) = \frac{1}{z+iy}\left(1 - \frac{(1-iyz)F(-iy)}{(1-y^2)F(z)}\right), \quad |z| < 1.$$

Заметим, что функция $P_y(z)$, $|z| < 1$ аналитическая и ограниченная.

4. Основные теоремы

Теорема 3. *Пусть $0 < 2\alpha < \pi$ и $\varepsilon > 0$ какие-либо числа. Если $S(z)$ - передаточная функция линейно-причинной системы Φ удовлетворяет условиям*

$$|S(z)| < \varepsilon, \quad z \in F_\alpha \quad \text{и} \quad |S(z) - 1| < \varepsilon, \quad z \in E_\alpha,$$

то коэффициент усиления системы Φ допускает оценку

$$St(\Phi) \geq \frac{1}{16\varepsilon^{\frac{2\alpha}{\pi-2\alpha}}} - 1.$$

Доказательство. Передаточная функция $S(z)$, $|z| > 1$, является аналитической и ограниченной функцией. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned}
&1 \leq |S(\infty)| + |1 - S(\infty)| \leq \\
&\leq \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|S(e^{-it})|dt\right\} + \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|1 - S(e^{-it})|dt\right\} \leq \\
&\leq \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \ln|S(e^{-it})|dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \ln|S(e^{-it})|dt\right\} + \\
&+ \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \ln|1 - S(e^{-it})|dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \ln(1 + |S(e^{it})|)dt\right\} \leq \\
&\leq \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \ln\varepsilon dt + \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \ln M dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} \ln(1+\varepsilon)dt\right\} + \\
&+ \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} \ln\varepsilon dt + \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \ln(1+M)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \ln(1+\varepsilon)dt\right\} \leq \\
&\leq 2(\varepsilon(1+\varepsilon))^{\frac{\alpha}{\pi}}(1+M)^{\frac{\pi-2\alpha}{\pi}},
\end{aligned}$$

где $M = \sup\limits_{|z|=1} |S(z)|$. Следовательно,

$$St(\Phi) = \left(M^2 - 1\right)^+ \geq \frac{1}{16\varepsilon^{\frac{2\alpha}{\pi-2\alpha}}} - 1.$$

□

Теперь оценим сверху коэффициент усиления.

Теорема 4. *Допустим $0 < 2\alpha < \pi$ и $0 < \varepsilon < 1$ - некоторые числа. Тогда существует число $0 < M < \infty$ и линейно-причинная система Φ с передаточной функцией $S(z)$, $|z| = 1$, которая удовлетворяет следуюшим условиям*

$$|S(z)| < \varepsilon, \quad z \in E_\alpha$$

$$|1 - S(z)| < \varepsilon, \quad z \in F_\alpha$$

и имеет место неравенство

$$St(\Phi) < \frac{M}{\varepsilon^{\frac{4\alpha}{\pi-2\alpha}}}\left(\ln\frac{8}{\pi\,\varepsilon\,\cos\alpha}\right)^{\frac{2\pi}{\pi-2\alpha}}.$$

Доказательство. Пусть $m-$ положительное число, значение которого уточним позже. Пусть

$$F(z) = \exp\left\{-\frac{m}{2\pi}\left(\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{e^{ix}+z}{e^{ix}-z}dx + \int_{\pi+\alpha}^{2\pi-\alpha}\frac{e^{ix}+z}{e^{ix}-z}dx\right)\right\}, \quad |z|<1.$$

Имеет место неравенство $|F(z)| \le 1$, $|z|<1$. При этом на дугах E_α и F_α имеем $|F(z)|=1$, и

$$|F(z)| = e^{-m}, \quad z \in T \setminus E_\alpha \cup F_\alpha.$$

Наконец, если $-1<y<1$, то имеет место оценка

$$|F(iy)| \le |F(0)| = \exp\left\{-\frac{\pi-2\alpha}{\pi}m\right\}.$$

Рассмотрим область $\Omega = \{z : \operatorname{Re} z > 0,\ |z|<2\}$. Из теоремы Коши следует

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{d\xi}{\xi - z} = \begin{cases} 1, & z \in \Omega \\ 0, & z \notin \Omega. \end{cases}$$

Можем записать

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{it}dt}{2e^{it}-z} + \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}\frac{dy}{iy+z}, \quad z \notin \partial\Omega.$$

Пусть $0<\delta<1$ - некоторое число, значение которого уточним позже.
На дугах $z \in E_\alpha \cup F_\alpha$ имеем

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-1-\delta}^{-1+\delta}\frac{dy}{iy+z} + \frac{1}{2\pi}\int_{1-\delta}^{1+\delta}\frac{dy}{iy+z}\right| \le \frac{2\delta}{\pi\cos\alpha}.$$

В последнем неравенстве мы воспользовались тем, что для любых $-1<y<1$ и $z \in E_\alpha \cup F_\alpha$, имеет место неравенство $|iy+z| \ge \cos\alpha$. Введем новую функцию:

$$G_\delta(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{it}dt}{2e^{it}-z} + \frac{1}{2\pi}\int_{1+\delta}^{2}\frac{dy}{iy+z} +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{-1-\delta}\frac{dy}{iy+z} + \frac{1}{2\pi}\int_{-1+\delta}^{1-\delta}P_y(z)dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{d\xi}{\xi-z} - \frac{1}{2\pi}\int_{-1-\delta}^{-1+\delta}\frac{dy}{iy+z} - \frac{1}{2\pi}\int_{1-\delta}^{1+\delta}\frac{dy}{iy+z} +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-1+\delta}^{1-\delta}\left(P_y(z) - \frac{1}{iy+z}\right)dy.$$

Так как на дугах $z \in E_\alpha \cup F_\alpha$ имеет место оценка

$$\left|\frac{1}{z+iy} - P_y(z)\right| \le \frac{|F(iy)|}{1-y^2}, \quad z \in E_\alpha \cup F_\alpha,$$

то

$$\left|G_\delta(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{d\xi}{\xi-z}\right| \le \frac{2\delta}{\pi\cos\alpha} + \frac{1}{2\pi}\int_{-1+\delta}^{1-\delta}\frac{|F(iy)|}{1-y^2}dy \le$$

$$\leq \frac{2\delta}{\pi\cos\alpha} + \frac{1}{2\pi}\int_{-1+\delta}^{1-\delta}\frac{|F(0)|}{1-y^2}dy \leq \frac{2\delta}{\pi\cos\alpha} + \frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{\pi-2\alpha}{\pi}m\right\}\ln\frac{2}{\delta}.$$

Так как на дугах $z \in T \setminus E_\alpha \cup F_\alpha$ имеет место оценка

$$\left|\frac{1}{z+iy} - P_y(z)\right| \leq \frac{|F(iy)|}{1-y^2}e^m,$$

то получаем

$$|G_\delta(z)| \leq 1 + \frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{\delta} + \frac{1}{2\pi}\int_{-1+\delta}^{1-\delta}\left|P_y(z) - \frac{1}{iy+z}\right| \leq$$

$$\leq 1 + \frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{\delta} + \frac{e^m}{2\pi}\int_{-1+\delta}^{1-\delta}\frac{|F(0)|}{1-y^2}dy \leq 1 + \frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{\delta} + \frac{1}{2\pi}\exp\left\{\frac{2\alpha m}{\pi}\right\}\ln\frac{2}{\delta}.$$

Выбирая число $\delta = \frac{\pi\varepsilon}{4}\cos\alpha$ и число m из соотношения

$$\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{\pi-2\alpha}{\pi}m\right\}\ln\frac{2}{\delta} = \frac{\varepsilon}{2},$$

получим

$$|G_\delta(z)| \leq \varepsilon, \quad z \in E_\alpha, \quad |G_\delta(z) - 1| \leq \varepsilon, \quad z \in F_\alpha.$$

Наконец, при $z \in T$ имеем

$$|G_\delta(z)| \leq 1 + 2\ln\left(\frac{4}{\pi\varepsilon\cos\alpha}\right) + \frac{1}{2\pi}\left(\ln\left(\frac{8}{\pi\varepsilon\cos\alpha}\right)\right)^{\frac{\pi}{\pi-2\alpha}}\frac{1}{(\pi\varepsilon)^{\frac{2\alpha}{\pi-2\alpha}}}.$$

Тогда коэффициент усиления линейно-причинной систем Φ с передаточной функцией

$$S(z) = G\left(\frac{1}{z}\right), \quad |z| > 1,$$

для малых значении $\varepsilon > 0$ удовлетворяет оценке

$$St(\Phi) \leq \frac{2}{\varepsilon^{\frac{4\alpha}{\pi-2\alpha}}}\left(\ln\frac{8}{\pi\varepsilon\cos\alpha}\right)^{\frac{2\pi}{\pi-2\alpha}}.$$

□

Abstract. In assumption that the input signal consists of several harmonic oscillations, the paper considers the problem of construction a linearly-causal filter that preserves some components of the signal and rejects the others. Some new estimates for the amplification coefficient of linearly-causal filters are obtained, which solve the problem.

Список литературы

[1] А. Вагаршакян, Численные Методы Обработки Сигналов, Ереван (2007).
[2] John B. Garnett, Bounded Analytic Functions, Los Angles, California (1981).
[3] A. N. Kolmogorov, “Interpolation and extrapolation of stationary processes“, Izv. AN USSR, **5**, 3 – 14 (1941).
[4] A. Oppenheim, R. Schafer J. Buck, Discrete Time Signal Processing, New Jersey (1999).
[5] P. Koosis, Introduction to H_p Spaces, Cambridge university press (1980).

Поступила 18 мая 2009