

О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА РЕГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПОЛОСЕ

С. Р. АЙРАПЕТЯН

Российско-армянский государственный университет
E-mail: sofia31337@mail.ru

Аннотация. Для одного класса регулярных гипоеллиптических по x_1 двумерных операторов $P(D) = P(D_1, D_2)$ доказывается бесконечная дифференцируемость в достаточно широкой полосе $\Omega_{\mathcal{H}} = \{x = (x_1; x_2) \in E^2, |x_1| < \mathcal{H}, x_2 \in E^1\}$, тех обобщенных решений уравнений $P(D)u = 0$ для которых $D_2^j u \in L_2(\Omega_{\mathcal{H}})$ при $j = 0, \dots, \text{ord}_{x_2} P$.

MSC2010 number: 12E10.

Ключевые слова: почти гипоеллиптический, частично гипоеллиптический, гипоеллиптический по группе переменных, регулярный оператор (многочлен), весовые пространства Соболева.

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: N - множество натуральных чисел, $N_0 = N \cup \{0\}$, $N_0^2 = N_0 \times N_0$ - множество двумерных мультииндексов, E^2 и R^2 - двумерные вещественные евклидовы пространства точек $x = (x_1, x_2)$ и $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, соответственно. $C^2 = R^2 \times iR^2$ ($i^2 = -1$), $R_+^2 = \{\xi, \xi \in R^2, \xi_j \geq 0, j = 1, 2\}$. Для $\xi, \eta \in R^2, x \in E^2$ и $\alpha \in N_0^2$ обозначим

$$|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}, (\xi, \eta) = \xi_1 \cdot \eta_1 + \xi_2 \cdot \eta_2, |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2, \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2},$$

и $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2}$, где $D_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ либо $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ $j = 1, 2$.

Пусть $A \equiv \{\alpha^j\}_{j=1}^M \subset R_+^2$, $0 < m_1 < m_2 < \dots < m_M$, $0 \leq \lambda_2^1 < \lambda_2^2 < \dots < \lambda_2^M$, $\lambda^j = (1, \lambda_2^j)$ и $B \equiv \{\lambda^j; m_j\}_{j=1}^M$.

Характеристическим многоугольником набора вида A называется минимальный выпуклый многоугольник $\mathcal{N}(A) \subset R_+^2$ содержащий множество $A \cup \{0\}$. Характеристическим многоугольником набора вида B называется множество $\mathcal{N}(B) \equiv \{\nu; \nu \in R_+^2; (\nu, \lambda^j) \leq m_j \quad j = 1, \dots, M\}$.

Многоугольник $\mathcal{N} \subset R_+^2$ называется полным, если $\mathcal{N}$ имеет вершину в начале координат и отличные от начала координат вершины на каждой оси координат.

Полный многоугольник $\mathcal{N} \subset R_+^2$ называется правильным (вполне правильным), если компоненты, внешних относительно $\mathcal{N}$, нормалей одномерных некоординатных сторон неотрицательны (положительны).

Замечание 1. Нетрудно заметить, что многоугольник $\mathcal{N} \subset R_+^2$ правильный тогда и только тогда, когда для любого $\alpha \in \mathcal{N}$,

$$\Pi(\alpha) := \{\nu \in R_+^2, \nu_j \leq \alpha_j, \quad j = 1, 2\} \subset \mathcal{N}.$$

Пусть $P(D) = P(D_1, D_2) = \sum \gamma_\alpha D^\alpha$ - линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2) = \sum \gamma_\alpha \xi^\alpha$ его полный символ, где сумма распространяется по некоторому конечному набору $(P) = \{\alpha \in N_0^2, \gamma_\alpha \neq 0\}$. Многоугольник набора (P) называется многоугольником Ньютона или характеристическим многоугольником оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$).

Определение 1. (см. [1], т. 2, определение 11.1.2, теоремы 10.2.1, 10.2.12). Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется гипозеллиптическим, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

- (1) любое обобщенное решение $u \in L_{2,loc}(\Omega)$ ($\Omega \subset E^2$ - область) уравнения $P(D)u = 0$ является бесконечно дифференцируемой функцией;
- (2) $\frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)} := \frac{D_\xi^\alpha P(\xi)}{P(\xi)} \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty, \quad \forall \alpha \in N_0^2, \quad \alpha \neq 0$;
- (3) $d_P(\xi) \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, где $d_P(\xi)$ расстояние точки $\xi \in R^2$ от множества $D(P) := \{\zeta \in C^2 : P(\zeta) = 0\}$.

Определение 2. (см. [1], т.2, определение 11.2.4, теорема 11.2.3). Оператор $P(D) = P(D_1, D_2)$ (многочлен $P(\xi)$) называется частично гипозеллиптическим относительно ξ_2 (или относительно прямой $x_2 = 0$), если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

- (1) $\frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)} \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty, \quad |\alpha| \neq 0$ когда ξ_1 остается ограниченным;
- (2) если u обобщенное решение уравнения $P(D)u = 0$, то $u * \varphi \in C^\infty$ при всех $\varphi \in C_0^\infty(E^1)$,
- (3) если многочлен $P(\xi)$ представить в виде $P(\xi) = \sum_{j=0}^{m_1} P_j(\xi_2) \xi_1^j$, где $m_1 := \text{ord}_{\xi_1} P$, то
 - (a) $P_0(\xi_2)$ гипозеллиптичен как многочлен от ξ_2 ,
 - (b) для любого $j = 1, \dots, m_2$

$$(1.1) \quad \frac{P_j(\xi_2)}{P_0(\xi_2)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi_2 \rightarrow \infty.$$

Замечание 2. Так как P_j $j = 0, \dots, m_1$ многочлены от одной переменной, то очевидно условие 3.a) эквивалентно условию $P_0 \neq 0$, а условие 3.b) эквивалентно условию $\text{ord}P_j < \text{ord}P_0$, $j = 1, \dots, m_1$.

Определение 3. (см. [2] или [3]). Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется гипоеллиптическим по ξ_1 , если для любого $\alpha_1 \neq 0$

$$(1.2) \quad P^{(\alpha_1, 0)}(\xi)/P(\xi) \equiv \frac{\partial^{\alpha_1} P(\xi)}{\partial \xi_1^{\alpha_1}} / P(\xi) \rightarrow 0 \text{ при } |\xi| \rightarrow \infty.$$

Определение 4. (см. [4]–[6]). Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется почти гипоеллиптическим, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

- (1) существуют постоянные $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ для которых

$$\sum_{\alpha} \left| P^{(\alpha)}(\xi) \right| \leq C_1 |P(\xi)|, \forall \xi \in \mathbb{R}^2, |\xi| \geq C_2;$$

- (2) существует число $\delta > 0$ такое, что множество

$$D_{\delta}(P) \equiv \{ \zeta \in D(P) : |I_m \zeta| \leq \delta \}$$

ограничено;

- (3) существует число $\delta > 0$ такое, что $N(P; \delta) \subset H_{\delta}^{\infty}(E^2)$, где

$$N(P; \delta) = \{ u : ue^{-\delta|x|} \in L_2(E^2), P(D)u = 0 \}, \\ H_{\delta}^{\infty}(E^2) = \{ u : (D^{\alpha}u)e^{-\delta|x|} \in L_2(E^2), \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^2 \}.$$

Определение 5. (см. [7] или [8]). Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется регулярным (невыврожденным), если с некоторой постоянной $C > 0$

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}} |\xi^{\alpha}| \leq C (|P(\xi)| + 1) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2,$$

где $\mathbb{N}$ - характеристический многоугольник оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$).

Замечание 3. Известно (см. [3], [4], [7]), что если многочлен $P(\xi)$ регулярен, то

- (1) P гипоеллиптичен тогда и только тогда когда характеристический многогранник $\mathbb{N}(P)$ многочлена P вполне правильный;
- (2) P гипоеллиптичен по ξ_1 тогда и только тогда, когда первые компоненты внешних (относительно $\mathbb{N}(P)$) нормалей некоординатных сторон положительны;
- (3) P почти гипоеллиптичен тогда и только тогда когда $\mathbb{N}(P)$ правильный;
- (4) $P(\xi) \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{N}(P)$ - полный.

В работах [9], [10] доказана бесконечная дифференцируемость решений частично гипоеллиптических уравнений, если априори предполагать их бесконечную дифференцируемость по определенным переменным.

В. И. Буренковым в работе [2] найдены алгебраические условия (см. соотношение (1.2)) на символ оператора $P(D)$ при которых все решения u уравнения $P(D)u = 0$, которые определенным образом стремятся к нулю на бесконечности были бесконечно дифференцируемы.

В работе [11] для одного класса двумерных почти гипоеллиптических операторов доказано, что при достаточно больших $\mathcal{H} > 0$ все решения уравнения $P(D)u = 0$ в полосе $\Omega_{\mathcal{H}} = \{x = (x_1; x_2) \in E^2, |x_1| < \mathcal{H}, x_2 \in E^1\}$ для которых $D_2^j u$ ($j = 0, \dots, \text{ord}_{x_2} P$) интегрируемы с квадратом в $\Omega_{\mathcal{H}}$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями по x_1 .

Наша цель доказать, что если $\mathcal{H} > 0$ достаточно велико, то все решения одного класса регулярных уравнений $P(D)u = 0$ в $\Omega_{\mathcal{H}}$ для которых $D_2^j u \in L_2(\Omega_{\mathcal{H}})$ ($j = 0, \dots, \text{ord}_{x_2} P$) являются бесконечно дифференцируемыми функциями по обоим переменным.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Пусть $\mathcal{N} \subset R_+^2$ правильный многоугольник с вершинами из N_0^2 и $m_1 \equiv \max_{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathcal{N}} \alpha_1$. Обозначим

$$\mathcal{N}_{m_1} = \{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2, \alpha + (1, 0) \notin \mathcal{N}\}$$

и

$$\mathcal{N}_j = \{\alpha \in N_0^2, \alpha + (m_1 - j, 0) \in \mathcal{N}_{m_1}\}, \quad j = 0, \pm 1; \pm 2, \dots$$

В дальнейшем запись $\alpha \in \mathcal{N}$ будет означать $\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2$.

Замечание 4. В силу выпуклости $\mathcal{N}$, очевидно, что для любого $l \in N_0$, $l \leq \max_{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathcal{N}} \alpha_2$ существует единственное $\alpha_1 = \alpha_1(l) \in N_0$ такое, что $(\alpha_1(l), l) \in \mathcal{N}_{m_1}$.

Предложение 2.1. Пусть $\mathcal{N} \subset R_+^2$ полный многоугольник с вершинами из N_0^2 , $m_1 \equiv \max_{\alpha \in \mathcal{N}} \alpha_1$, $m'_2 \equiv \max_{\alpha \in \mathcal{N}} \alpha_2$. Тогда,

- (1) $\mathcal{N}_j = \emptyset$, при $j < 0$ и $\mathcal{N}_j \cap \mathcal{N}_k = \emptyset$, $j \neq k$;
- (2) $\mathcal{N} = \bigcup_{j=0}^{m_1} \mathcal{N}_j$;
- (3) для любого $\alpha \in N_0^2$, $\alpha_2 \leq m'_2$ существует единственный индекс $j(\alpha) \in N_0$ такой, что $\alpha \in \mathcal{N}_{j(\alpha)}$;

- (4) $N_0 \subset \{\alpha \in N : \alpha = (0, \alpha_2)\}$;
 (5) если N порожден набором вида B , то

$$N_0 = \{\alpha \in N, \alpha = (0, \alpha_2), \alpha_2 \leq \min_{2 \leq j \leq M} [(m_j - m_1)/\lambda_2^j]\} =: \tilde{N}_0,$$

где $[a]$ – целая часть числа a ;

- (6) если $\alpha \in N_j$ ($j \in N_0$), то $\alpha_1 \geq \max\{0, j - m_1\}$ и для любого $0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1$,
 $\alpha - (\beta_1, 0) \in N_{j-\beta_1}$.

Доказательство. Пусть наоборот, для некоторого $j_0 < 0$ $N_{j_0} \neq \emptyset$, т.е. существует $\alpha^0 \in N_0^2$ такое, что $\alpha^0 + (m_1 - j_0, 0) \in N_{m_1}$. Так как $N_{m_1} \subset N$, отсюда и из определения числа m_1 имеем, что $m_1 \geq \max_{\alpha \in N_{m_1}} \alpha_1 \geq \alpha_1^0 + m_1 - j_0 > m_1$. Полученное противоречие доказывает, что $N_j = \emptyset$, при $j < 0$, т.е. утверждение пункта (1).

Докажем утверждение пункта (2). Пусть $\alpha \in N$ любой фиксированный мультииндекс. Тогда в силу выпуклости N существует число $j(\alpha) \in N_0$ такое, что $\beta \equiv \alpha + (j(\alpha), 0) \in N$ и $\alpha + (j(\alpha) + 1, 0) \notin N$, т.е. $\beta \in N_{m_1}$. Отсюда и из определения числа m_1 имеем, что $\beta_1 = \alpha_1 + j(\alpha) \leq m_1$, т.е. $j(\alpha) \leq m_1$. Следовательно, $m_1 - j(\alpha) \in N_0$, $\alpha + (j(\alpha), 0) = \alpha + (m_1 - (m_1 - j(\alpha)), 0) \in N_{m_1}$ и поэтому $\alpha \in N_{m_1 - j(\alpha)}$. Это означает, что $N \subset \bigcup_{j=0}^{m_1} N_j$.

Теперь докажем обратное вложение. Пусть $\alpha \in N_{j_0}$ для некоторого $j_0 : 0 \leq j_0 \leq m_1$, т.е. $\alpha^0 \in N_0^2$ и $\alpha + (m_1 - j_0, 0) \in N_{m_1}$. Так как N правильный и $N_{m_1} \subset N$, то в силу замечания 1 $\alpha \in N$. Это означает, что $N \subset \bigcup_{j=0}^{m_1} N_j$. Этим пункт (2) доказан.

Докажем утверждение пункта (3). Пусть $\alpha \in N_0^2$ любой мультииндекс для которого $\alpha_2 \leq m'_2$. Так как N правильный, то $(0, \alpha_2) \in N$. Следовательно в силу замечания 4 существует число $\alpha_1(\alpha_2) \in N_0$ такое, что $(\alpha_1(\alpha_2), \alpha_2) \in N_{m_1}$. Откуда по определению числа m_1 $\alpha_1(\alpha_2) \leq m_1$ и следовательно, $j(\alpha) \equiv m_1 + \alpha_1 - \alpha_1(\alpha_2) \geq 0$. Поскольку $j(\alpha) \geq 0$ и $\alpha + (m_1 - j(\alpha), 0) = (\alpha_1(\alpha_2), \alpha_2) \in N_{m_1}$, то отсюда в силу определения множеств $N_l, l \in N_0$, получаем, что $\alpha \in N_{j(\alpha)}$. Теперь докажем, что если $j \neq j(\alpha)$, то $\alpha \notin N_j$ (т.е. единственность $j(\alpha)$). Пусть, наоборот, существует индекс $j_0 \neq j(\alpha)$ такой, что $\alpha \in N_{j_0} \cap N_{j(\alpha)}$. Тогда в силу определения N_l , $\alpha + (m_1 - j_0, 0) \in N_{m_1}$ и $\alpha + (m_1 - j(\alpha), 0) \in N_{m_1}$. Так как $j_0 \neq j(\alpha)$, то $m_1 - j_0 \neq m_1 - j(\alpha)$. Пусть поэтому $m_1 - j_0 \geq m_1 - j(\alpha) + 1$ (случай $m_1 - j_0 \leq m_1 - j(\alpha) - 1$ доказывается аналогичным образом). Тогда, в силу выпуклости N и замечания 1 получаем, что $\beta \equiv \alpha + (m_1 - j(\alpha), 0) \in N$, $\beta + (k, 0) \in$

$\mathcal{N}$ $k = 1, \dots, j(\alpha) - j_0$. Но $\beta \in \mathcal{N}_{m_1}$, а в силу определения $\mathcal{N}_{m_1}$ $\beta + (1, 0) \notin \mathcal{N}$. Полученное противоречие доказывает утверждение пункта (3).

Докажем утверждение пункта (4). Пусть $\alpha \in \mathcal{N}_0$ любой мультииндекс для которого $\alpha_1 \geq 1$. Тогда в силу определения $\mathcal{N}_0$ $\alpha + (m_1, 0) \in \mathcal{N}_{m_1}$. Так как $\mathcal{N}_{m_1} \subset \mathcal{N}$, то из определения числа m_1 имеем $m_1 \geq \max_{\beta \in \mathcal{N}_{m_1}} \beta_1 \geq \alpha_1 + m_1 > m_1$. Отсюда непосредственно получаем утверждение пункта (4).

Докажем утверждение пункта (5). Если $\mathcal{N}$ порожден набором вида B , то из определения $\mathcal{N}$ в силу того, что $\mathcal{N}_{m_1} \subset \mathcal{N}$, для любого $\alpha \in \mathcal{N}_0$ имеем $m_j \geq (\alpha + (m_1, 0), \lambda^j) = \alpha_2 \lambda_2^j + m_1$, $j = 1, \dots, M$, откуда $\alpha_2 \leq \min_{2 \leq j \leq M} \left[\frac{m_j - m_1}{\lambda_2^j} \right]$. Это вместе с пунктом (4) доказывает, что $\mathcal{N} \subset \tilde{\mathcal{N}}_0$.

Теперь докажем обратное вложение. Пусть $\alpha_2 \in \mathcal{N}_0$, $\alpha_2 \leq \min_{2 \leq j \leq M} \left[\frac{m_j - m_1}{\lambda_2^j} \right]$. Тогда, $(0, \alpha_2) \in \mathcal{N}_0^2$ и $((0, \alpha_2) + (m_1, 0), \lambda^j) = m_1 + \lambda_2^j \alpha_2 \leq m_1 + \lambda_2^j \frac{(m_j - m_1)}{\lambda_2^j} = m_j$, $j = 1, \dots, M$ и $((0, \alpha_2) + (m_1, 0), \lambda^1) = m_1$. Это в силу определения $\mathcal{N}$ означает, что $(0, \alpha_2) + (m_1, 0) \in \mathcal{N}$. Так как $((0, \alpha_2) + (m_1, 0) + (1, 0), \lambda^1) = m_1 + 1 > m_1$, то это в силу определения $\mathcal{N}_{m_1}$ означает, что $(0, \alpha_2) + (m_1, 0) \in \mathcal{N}_{m_1}$. А из определения $\mathcal{N}_0$ вытекает, что $(0, \alpha_2) \in \mathcal{N}_0$. Утверждение пункта (5) доказано.

Докажем утверждение пункта (6). Пусть $\alpha \in \mathcal{N}_{j_0}$ для некоторого $j_0 \in \mathcal{N}_0$. Отсюда в силу определения $\mathcal{N}_{j_0}$ имеем $\alpha + (m_1 - j_0, 0) \in \mathcal{N}_{m_1}$, следовательно, $\alpha_1 + m_1 - j_0 \geq 0$. Пусть $\alpha \in \mathcal{N}_j$ и $0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1$. Покажем, что $\alpha - (\beta_1, 0) \in \mathcal{N}_{j - \beta_1}$. Из условия $\alpha \in \mathcal{N}_{j_0}$ (в силу определения $\mathcal{N}_{j_0}$) имеем, что $\alpha + (m_1 - j_0, 0) \in \mathcal{N}_{m_1}$. Так как $\mathcal{N}_{m_1} \subset \mathcal{N}$, то отсюда в силу определения m_1 и условия $0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1$ получаем $\beta_1 \leq \alpha_1 \leq j_0$. Тогда, $\alpha - (\beta_1, 0) + (m_1 - (j_0 - \beta_1), 0) = \alpha + (m_1 - j_0, 0) \in \mathcal{N}_{m_1}$, следовательно $\alpha - (\beta_1, 0) \in \mathcal{N}_{j - \beta_1}$. Этим пункт (6) предложения и тем самым предложение 2.1 доказано. $\square$

Пусть $\mathcal{N} \subset R_+^2$ – правильный многоугольник, а $\mathcal{N}_j$, $j = 0, 1, \dots$, определены как выше. На множестве $\bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{N}_j$ (на основании пункта (3) предложения 2.1) введем функцию $d(\alpha)$:

$$(2.1) \quad d(\alpha) = j, \quad \text{если} \quad \alpha \in \mathcal{N}_j, \quad j = 0, 1, \dots$$

Предложение 2.2. Пусть $\mathcal{N}$ – правильный многоугольник. Тогда

$$\begin{aligned} (1) \quad d(\alpha + (1, 0)) &= d(\alpha) + 1 \quad \forall \alpha \in \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{N}_j, \\ (2) \quad d(\alpha - (1, 0)) &= d(\alpha) - 1 \quad \forall \alpha \in \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{N}_j, \quad \alpha_1 \geq 1; \end{aligned}$$

(3) Если многоугольник $\mathcal{N}$ порожден набором вида B , то в качестве функции $d(\alpha)$ можно брать функцию

$$\tilde{d}(\alpha) = \max_{1 \leq j \leq M} [m_1 - m_j + (\alpha, \lambda^j)], \quad \alpha \in N_0^2,$$

где $[a]$ - целая часть числа a .

Доказательство. Пусть $\alpha \in \bigcup_{j=0}^{\infty} N_j$. Тогда в силу пункта (3) предложения 2.1 существует единственный индекс $j(\alpha) \in N_0^2$, такой, что $\alpha \in N_{j(\alpha)}$ и поэтому $d(\alpha) = j(\alpha)$. Из условия $\alpha \in N_{j(\alpha)}$ имеем $\alpha + (m_1 - j(\alpha), 0) \in N_{m_1}$, и следовательно

$$(\alpha + (1, 0)) + (m_1 - (j(\alpha) + 1), 0) = \alpha + (m_1 - j(\alpha), 0) \in N_{m_1}.$$

Но это в силу определения $N_{j(\alpha)+1}$ означает, что $\alpha + (1, 0) \in N_{j(\alpha)+1}$, следовательно, $d(\alpha + (1, 0)) = j(\alpha) + 1$. Откуда непосредственно получаем утверждение пункта (1). Утверждение пункта (2) следует из (1), если учитывать, что из $\alpha \in \bigcup_{j=0}^{\infty} N_j$, $\alpha_1 \geq 1$ следует, что $\alpha - (1, 0) \in \bigcup_{j=0}^{\infty} N_j$.

Докажем утверждение пункта (3). Пусть $\mathcal{N}$ порожден набором вида B и $\alpha \in N_{m_1}$. Так как $N_{m_1} \subset \mathcal{N}$, то из определения $\mathcal{N}$ имеем $(\alpha, \lambda^j) \leq m_j$, $j = 1, \dots, M$ и следовательно,

$$(2.2) \quad m_1 - m_j + (\alpha, \lambda^j) \leq m_1, \quad j = 1, \dots, M.$$

С другой стороны, так как $\alpha \in N_{m_1}$, то в силу определения N_{m_1} существует индекс $j_0 : 1 \leq j_0 \leq M$, такой, что $(\alpha + (1, 0), \lambda^{j_0}) > m_{j_0}$. Откуда $(\alpha, \lambda^{j_0}) > m_{j_0} - 1$, следовательно

$$(2.3) \quad m_1 - m_{j_0} + (\alpha, \lambda^{j_0}) > m_1 - 1.$$

Из неравенств (2.2), (2.3), так как $m_1 \in N$ и $\tilde{d}(\alpha)$ принимает целочисленные значения, получаем, что $\tilde{d}(\alpha) = m_1$ при всех $\alpha \in N_{m_1}$.

Пусть $j \in N_0$ и $\alpha \in N_j$. Так как в силу пункта (6) предложения 2.1 $\alpha_1 + m_1 - j \geq 0$, а из условия $\alpha \in N_j$ имеем $\alpha + (m_1 - j, 0) \in N_{m_1}$, то в силу уже доказанной части

$$m_1 = \tilde{d}(\alpha + (m_1 - j, 0)) = \max_{1 \leq l \leq M} [m_1 - m_l + (\alpha + (m_1 - j, 0), \lambda^l)].$$

Следовательно, аналогичным образом получаем, что

$$m_1 - m_l + (\alpha + (m_1 - j, 0), \lambda^l) \leq m_1, \quad l = 1, \dots, M$$

и для некоторого $l_0 \in N_0$, $1 \leq l_0 \leq M$

$$m_1 - m_{l_0} + (\alpha + (m_1 - j, 0), \lambda^{l_0}) > m_1 - 1.$$

Откуда,

$$\begin{aligned} m_1 - m_l + (\alpha, \lambda^l) &= m_1 - m_l + (\alpha + (m_1 - j; 0), \lambda^l) - ((m_1 - j; 0), \lambda^l) = \\ &= m_1 - m_l + (\alpha + (m_1 - j; 0), \lambda^l) + j - m_1 \leq m_1 + j - m_1 = j, \quad l = 1, \dots, M \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} m_1 - m_{l_0} + (\alpha, \lambda^{l_0}) &= m_1 - m_{l_0} + (\alpha + (m_1 - j; 0), \lambda^{l_0}) - ((m_1 - j; 0), \lambda^{l_0}) = \\ &= m_1 - m_{l_0} + (\alpha + (m_1 - j; 0), \lambda^{l_0}) + j - m_1 > m_1 - 1 + j - m_1 = j - 1. \end{aligned}$$

Из этих двух неравенств непосредственно (в силу определения функции $\tilde{d}$) следует, что $\tilde{d}(\alpha) = j$ при всех $\alpha \in \mathcal{N}_j$, $j = 0, 1, \dots$. Предложение 2.2 доказано. $\square$

На основании пункта (3) предложения 2.2, в дальнейшем вместо функции $\tilde{d}(\alpha)$ будем писать $d(\alpha)$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие легко проверяемые предложения:

Предложение 2.3. Пусть $k, r \in \mathbb{N}_0$, $k > r$. Тогда при $|\xi| \rightarrow \infty$, $\xi_1^r / (|\xi_2| + |\xi_1|^k) \rightarrow 0$.

Предложение 2.4. Пусть Q_1 и Q_2 такие многочлены от одного переменного, что $Q_1(\xi_2)/Q_2(\xi_2) \rightarrow 0$ при $\xi_2 \rightarrow \infty$. Если многочлен Q от двух переменных такой, что $|Q(\xi)| + |Q_2(\xi_2)| \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, то $Q_1(\xi_2) / [|Q_2(\xi_2)| + |Q(\xi)|] \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Предложение 2.5. (см. пункт (2) замечания 3). Если характеристический многоугольник $\mathcal{N}(P)$ регулярного многочлена P порожден набором вида $B(\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(B))$, то P гипозеллиптичен по ξ_1 .

Лемма 2.1. Пусть $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ — регулярный многочлен с полным характеристическим многоугольником $\mathcal{N}(P)$. Многочлен $P(\xi)$ гипозеллиптичен по ξ_1 тогда и только тогда, когда он частично гипозеллиптичен по ξ_2 .

Доказательство. Представим многочлен $P(\xi)$ в следующем виде

$$(2.4) \quad P(\xi) = \sum_{r=0}^M P_r(\xi_2) \xi_1^r,$$

где $M = \text{ord}_{\xi_1} P$, а

$$(2.5) \quad P_r(\xi_2) = \sum_{(r, \alpha_2) \in (P)} \gamma_{(r, \alpha_2)} \xi_2^{\alpha_2}, \quad (r = 0, \dots, M).$$

Из полноты многоугольника $\mathcal{N}(P)$ следует, что $P_0 \neq 0$ поскольку в силу определения полноты многоугольника существует $l \in N$, такой, что $(0, l) \in (P)$ ($(0, l)$ – вершина многоугольника, лежащая на оси ξ_2). Тогда, в силу замечания 1.2 многочлен $P_0(\xi_2)$ гипоеллиптичен.

В силу пункта (4) замечания 3 и из регулярности P следует, что существуют числа $C_1 > 0, C_2 > 0$, для которых

$$(2.6) \quad 0 < |P(\xi)| \leq \sum_{r=0}^M |P_r(\xi_2) \xi_1^r| \leq C_2 |P(\xi)| \quad \forall \xi \in R^2, \quad |\xi| \geq C_1.$$

Пусть многочлен $P(\xi)$, удовлетворяющий условиям леммы, гипоеллиптичен по ξ_1 , т.е. для любого $\alpha_1 \in N$

$$(2.7) \quad \left| \frac{P^{(\alpha_1, 0)}(\xi)}{P(\xi)} \right| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\xi| \rightarrow \infty.$$

Так как $P_r(\xi_2) = \frac{1}{r!} P^{(r, 0)}(0, \xi_2)$, $r = 0, \dots, M$, то из (2.7) в силу представления (2.4) имеем:

$$\frac{P_r(\xi_2)}{P_0(\xi_2)} = \frac{1}{r!} \frac{P^{(r, 0)}(0, \xi_2)}{P(0, \xi_2)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\xi_2| \rightarrow \infty, \quad r = 1, 2, \dots$$

Так как в силу вышесказанного P_0 - гипоеллиптичен, то это означает (см. пункт (2) определения 2), что многочлен P частично гипоеллиптичен по ξ_2 .

Пусть, теперь, частично гипоеллиптический по ξ_2 многочлен $P(\xi)$ удовлетворяет условиям леммы. Тогда для любого $\alpha_1 \in N$ в силу представления (2.4) и оценки (2.6) при $|\xi| \geq C_1$ имеем

$$(2.8) \quad \left| \frac{P^{(\alpha_1, 0)}(\xi)}{P(\xi)} \right| = \frac{\left| \sum_{r=\alpha_1}^M \frac{r!}{(r-\alpha_1)!} P_r(\xi_2) \xi_1^{r-\alpha_1} \right|}{\left| \sum_{r=0}^M P_r(\xi_2) \xi_1^r \right|} \leq C_2 \sum_{r=\alpha_1}^M \frac{r!}{(r-\alpha_1)!} \frac{|P_r(\xi_2) \xi_1^{r-\alpha_1}|}{\sum_{k=0}^M |P_r(\xi_2) \xi_1^k|} =$$

$$= C_2 \left[\frac{\alpha_1! |P_{\alpha_1}(\xi_2)|}{|P_0(\xi_2)| + \sum_{k=1}^M |P_k(\xi_2) \xi_1^k|} + \sum_{r=\alpha_1+1}^M \frac{r!}{(r-\alpha_1)!} \frac{|P_r(\xi_2) \xi_1^{r-\alpha_1}|}{\sum_{k=0}^M |P_r(\xi_2)| |\xi_1|^k} \right].$$

В силу предложения 2.3

$$(2.9) \quad \frac{P_{\alpha_1}(\xi_2)}{|P_0(\xi_2)| + \sum_{k=1}^M |P_k(\xi_2) \xi_1^k|} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\xi| \rightarrow \infty.$$

Пусть $k \in N$, $\alpha_1 + 1 \leq k \leq M$ и $D_k = \{\xi_2 \in R : P_k(\xi_2) = 0\}$.

Так как в силу (2.6), при достаточно больших $\xi \in R^2$ и $\xi_2 \in D_k$ имеем

$$\frac{P_k(\xi_2) \xi_1^{k-\alpha_1}}{\sum_{r=0}^M |P_r(\xi_2) \xi_1^r|} = 0$$

и $|P_0(\xi_2)| + |P_k(\xi_2) \xi_1^k| \neq 0$ при достаточно больших ξ и $\xi_2 \notin D_k$, то в силу предложения 2.3 (см. пункт 3 а) определения 2) при $|\xi| \rightarrow \infty$ имеем

$$\frac{P_k(\xi_2) \xi_1^{k-\alpha_1}}{\sum_{r=0}^M |P_r(\xi_2) \xi_1^r|} \leq \frac{|P_k(\xi_2) \xi_1^{k-\alpha_1}|}{|P_0(\xi_2)| + |P_k(\xi_2) \xi_1^k|} = \frac{|\xi_2|^{k-\alpha_1}}{\left| \frac{P_0(\xi_2)}{P_k(\xi_2)} \right| + |\xi_1|^k} \rightarrow 0, \quad k = \alpha_1 + 1, \dots, M.$$

Отсюда и из соотношения (2.9) в силу оценки (2.8) получаем, что многочлен $P(\xi)$ гипоеллиптичен по ξ_1 . Лемма 2.1 доказана. $\square$

Предложение 2.6. Пусть характеристический многоугольник $\mathcal{N}(P)$ регулярного многочлена $P(\xi)$ порожден набором вида B . Тогда многочлен P частично гипоеллиптичен по ξ_2 .

Доказательство. Непосредственно следует из леммы 2.1 и предложения 2.5. $\square$

Предложение 2.7. (см. [1], т.1, теорема 1.4.1). Пусть $-\infty < a < b < +\infty$. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ существует постоянная $C = C(m) > 0$ такая, что для любого $\delta \in (0, (b-a)/2)$ существует функция $\varphi_\delta(t) \in C_0^\infty(a, b)$ ($C_0^\infty(a, b)$ – множество бесконечно дифференцируемых функций с носителем в (a, b)), для которой $\varphi_\delta(t) = 1$, $t \in (a+\delta, b-\delta)$ и $|\varphi_\delta^{(j)}(t)| \leq C\delta^j$, $j = 0, \dots, m$.

Пусть $h(t) = 1 - t^2$ при $|t| < 1$, $h(t) = 0$ при $|t| \geq 1$, $\mathcal{H} > 0$ и $h_{\mathcal{H}}(t) = h(t/\mathcal{H})$. Для правильного многоугольника $\mathcal{N} \subset R_+^2$ с вершинами из N_0^2 , функции h и числа $\mathcal{H} > 0$ обозначим

$$H_h^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}}) = \left\{ u : (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)}(x_1) \in L_2(\Omega_{\mathcal{H}}), \forall \alpha \in \mathcal{N} \right\},$$

где $d(\alpha)$ функция, определенная в (2.1), а

$$\Omega_{\mathcal{H}} = \{x \in E^2, |x_1| < \mathcal{H}, x_2 \in (-\infty; +\infty)\}.$$

Лемма 2.2. Множество $C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$ плотно в $H_h^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}})$.

Доказательство. Пусть $u \in H_h^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}})$ и $\varepsilon > 0$ – фиксированное число. Тогда существуют числа $\delta = \delta(\varepsilon, u) \in (0, \mathcal{H})$ и $M \geq 1$ такие, что

$$(2.10) \quad \|u\|_{H_h^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\delta}, M)} \equiv \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \left\| (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\delta}, M)} < \varepsilon,$$

где $\Omega_{\mathcal{H}-\delta, M} = \{x \in \Omega_{\mathcal{H}}, |x_1| < \mathcal{H} - \delta, |x_2| < M\}$.

Пусть $\varphi_1(x_1)$ и $\varphi_2(x_2)$ функции, удовлетворяющие условиям предложения 2.7 такие, что

- (1) $\varphi_1(x_1) = 1$ при $|x_1| < \mathcal{H} - \delta$, $\varphi_1(x_1) = 0$ при $|x_1| > \mathcal{H} - \frac{\delta}{2}$,
- (2) $\varphi_2(x_2) = 1$ при $|x_2| < M$, $\varphi_2(x_2) = 0$ при $|x_2| > M + 1$,
- (3) $|\varphi_1^{(j)}(x_1)| \leq C\delta^{-j}$, $|\varphi_2^{(j)}(x_2)| \leq C$, $j = 0, \dots, m_1 \equiv \max_{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \alpha_1$.

Положим $v(x) = u(x)\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)$. Очевидно, $\text{supp } v \subset \Omega_{\mathcal{H}-\delta/2, M+1}$. Пусть $\tilde{v}$ ($\widetilde{D^\alpha u}$, $\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2$) продолженные нулем вне $\Omega_{\mathcal{H}-\delta/2, M+1}$ ($\Omega_{\mathcal{H}}$) функции v ($D^\alpha u$, $\alpha \in \mathcal{N}$). Так как $v(x) = u(x)$ при $x \in \Omega_{\mathcal{H}-\delta/2, M+1}$ и $D^\alpha \tilde{v} \in L_2(E^2)$ ($\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2$), то в силу (2.10) имеем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \left\| \left(D^\alpha \tilde{v} - \widetilde{D^\alpha u} \right) h_{\mathcal{N}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(E^2)} = \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \left\| \left(D^\alpha \tilde{v} - \widetilde{D^\alpha u} \right) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} = \\
 & = \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \left\| (D^\alpha v - D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\delta}, M)} \leq \\
 & \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \left\| (D^\alpha v) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\delta}, M)} + \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \left\| (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\delta}, M)} \leq \\
 (2.11) \quad & \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \left\| D^\alpha (u\varphi_1\varphi_2) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\delta}, M)} + \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Так как $h_{\mathcal{H}}(x_1) \leq \delta/\mathcal{H}$ при $x \in \text{supp}(\varphi_1\varphi_2) \setminus (\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\delta}, M)$, то по формуле Лейбница в силу предложения 2.2, оценки (2.10) и свойства (1 – 3) функций φ_1, φ_2 для первого слагаемого правой части оценки (2.11) с некоторой постоянной $C_1 = C_1(\mathcal{N}, C, \mathcal{H}) > 0$ имеем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \left\| D^\alpha (u\varphi_1\varphi_2) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\delta}, M)} \leq \\
 & \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta \left\| D^\beta u \cdot D_1^{\alpha_1-\beta_1} \varphi_1 \cdot D_2^{\alpha_2-\beta_2} \varphi_2 \cdot h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\delta}, M)} \leq \\
 (2.12) \quad & \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \sum_{|\beta| \leq \alpha} C_\alpha^\beta C^2 \delta^{-(\alpha_1-\beta_1)} \left\| (D^\beta u) h_{\mathcal{H}}^{d(\beta)+\alpha_1-\beta_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\delta}, M)} \leq \\
 & \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta C^2 \delta^{-(\alpha_1-\beta_1)} \left(\frac{\delta}{\mathcal{H}} \right)^{\alpha_1-\beta} \left\| (D^\beta u) h_{\mathcal{H}}^{d(\beta)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\delta}, M)} \leq \\
 & \leq C_1 \sum_{\beta \in \mathcal{N}} \left\| (D^\beta u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\delta}, M)} \leq C_1 \varepsilon,
 \end{aligned}$$

где C_α^β - биномиальные коэффициенты, а C - постоянная из предложения 2.7.

Из (2.11) в силу (2.12) получаем

$$(2.13) \quad \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \left\| \left(D^\alpha \tilde{v} - \widetilde{D^\alpha u} \right) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(E^2)} \leq (C_1 + 1) \varepsilon.$$

Пусть $\theta > 0$, $S_\theta = \{x \in E^2 : |x| < \theta\}$, $\psi \in C_0^\infty(S_1)$, $\psi \geq 0$, $\int \psi dx = 1$, $\psi_\theta(x) = \theta^{-2} \psi(x/\theta)$ и $\tilde{v}_\theta = \tilde{v} * \psi_\theta$.

Очевидно $\tilde{v}_\theta \in C^\infty(E^2)$ для любого $\theta > 0$, при этом $\tilde{v}_\theta(x) = 0$ когда $x \notin \text{supp} \tilde{v} + \bar{S}_\theta$ ($\bar{S}_\theta$ замыкание S_θ). Так как при $\theta \in (0, \delta/4)$ $\text{supp} \tilde{v} + \bar{S}_\theta \subset \Omega_{\mathcal{H}}$, то отсюда получаем, что $\tilde{v}_\theta \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$ когда $\theta \in (0, \delta/4)$. Учитывая, что $h_{\mathcal{H}} \leq 1$, $D^\alpha \tilde{v}_\theta \in L_2(E^2)$ ($\alpha \in \mathcal{N}$) и (см. например [12], 6.3 (2)) $D^\alpha \tilde{v}_h = (D^\alpha \tilde{v})_h$, то в силу неравенства Юнга и непрерывности в среднем функций из L_2 имеем при $\theta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \|D^\alpha (\tilde{v}_\theta - \tilde{v}) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)}\|_{L_2(E^2)} &\leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \|D^\alpha (\tilde{v}_\theta - \tilde{v}) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)}\|_{L_2(E^2)} = \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \|(D^\alpha \tilde{v})_\theta - D^\alpha \tilde{v}\|_{L_2(E^2)} \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \sup_{|y| < \theta} \|D^\alpha \tilde{v}(\cdot - y) - D^\alpha \tilde{v}(\cdot)\|_{L_2(E^2)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$, отсюда и из (2.12) получаем утверждение леммы. Лемма 2.2 доказана. $\square$

Лемма 2.3. Пусть $\mathcal{N} \subset R_+^2$ - правильный многоугольник с вершинами из N_0^2 , $m_1 \equiv \max \{\alpha_1 : \alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2\}$ и $\beta \in \mathcal{N} \cap N_0^2$. Тогда существуют постоянные $C_1 = C_1(m_1) > 0$ и $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0(m_1) > 0$ такие, что при $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_0$ и $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$,

$$(2.14) \quad \begin{aligned} &\|(D^\beta \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(\beta)}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \\ &\leq C_1 \left(\|(D^{(\beta_1(\beta_2), \beta_2)} \varphi) h_{\mathcal{H}}^{m_1}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \|(D_2^{\beta_2} \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(0, \beta_2)}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right), \end{aligned}$$

где $\beta_1 = \beta_1(\beta_2) \in N_0$ - то единственное (в силу замечания 4) число для которого $(\beta_1(\beta_2), \beta_2) \in \mathcal{N}_{m_1}$.

Доказательство. Оценка (2.14) очевидна при $\beta_1 = 0$ и $\beta_1 = \beta_1(\beta_2)$, так как в последнем случае $\beta \in \mathcal{N}_{m_1}$ и в силу определения функции $d(\cdot) : d(\beta) = m_1$. Пусть поэтому $0 < \beta_1 < \beta_1(\beta_2)$. Тогда, интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} &\|(D^\beta \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(\beta)}(x_1)\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}^2 = \left| \iint_{\Omega_{\mathcal{H}}} D^\beta \varphi \left(\bar{D}^\beta \varphi h_{\mathcal{H}}^{2d(\beta)}(x_1) \right) dx \right| = \\ &= \left| \iint_{\Omega_{\mathcal{H}}} D^{\beta-(1,0)} \varphi D_1 \left(\bar{D}^\beta \varphi h_{\mathcal{H}}^{2d(\beta)}(x_1) \right) dx \right| \leq \\ &\leq \iint_{\Omega_{\mathcal{H}}} \left| D^{\beta-(1,0)} \varphi \bar{D}^{\beta+(1,0)} \varphi \right| h_{\mathcal{H}}^{2d(\beta)}(x_1) dx + \\ &+ \frac{2d(\beta)}{\mathcal{H}} \iint_{\Omega_{\mathcal{H}}} \left| D^{\beta-(1,0)} \varphi D^\beta \varphi \right| h_{\mathcal{H}}^{2d(\beta)-1}(x_1) dx. \end{aligned}$$

Так как в силу предложения 2.2 $d(\beta \pm (1, 0)) = d(\beta) \pm 1$ при $\beta_1 \geq 1$, то отсюда с применением арифметического неравенства $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ получаем

$$\begin{aligned} & \left\| (D^\beta \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(\beta)}(x_1) \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}^2 \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \left(\left\| (D^{\beta+(1,0)} \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(\beta+(1,0))} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}^2 + \left\| (D^{\beta-(1,0)} \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(\beta-(1,0))} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}^2 \right) + \\ & + \frac{2d(\beta)}{\mathcal{H}} \left(\left\| (D^\beta \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(\beta)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}^2 + \left\| (D^{\beta-(1,0)} \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(\beta-(1,0))} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}^2 \right). \end{aligned}$$

Так как $d(\beta) \leq m_1$ при всех $\beta \in \mathcal{N} \cap N_0^2$, то отсюда в силу леммы 2.1 работы [11] следует существование числа $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0(m_1) > 0$ такого, что при $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_0$ с некоторой постоянной $C_1 = C_1(m_1) > 0$ выполняется оценка (2.14). Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.4. Пусть $\mathcal{N} \subset R_+^2$ – правильный многогранник с вершинами из N_0^2 , а $\mathcal{H}_0 > 0$ число определенное в лемме 2.3. Тогда существует постоянная $C_1 = C_1(m_1)$ такая, что при $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_0$ и $u \in H_h^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}})$

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \left\| (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \\ (2.15) \quad & \leq C_1 \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \left\| (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \sum_{\alpha_2=0}^{\Gamma} \left\| (D_2^{\alpha_2}) h_{\mathcal{H}}^{d(0, \alpha_2)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right) \leq \\ & \leq C_1 \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \left\| (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}, \end{aligned}$$

где по многоугольнику $\mathcal{N}$ множество $\mathcal{N}_{m_1}$ определено в начале параграфа 2, а

$$\Gamma \equiv \max \{ \alpha_2 : (0, \alpha_2) \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_{m_1} \cap N_0^2 \}.$$

Доказательство. В силу леммы 2.2 оценку (2.15) достаточно доказать для функций из $C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$. Из определения функции $d(\cdot)$ по лемме 2.3 существует постоянная $C_2 = C_2(m_1) > 0$ такая, что при всех $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_0$ и $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \left\| (D^\alpha \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \left\| (D^\alpha \varphi) h_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\ & + \sum_{\alpha \in (\mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_{m_1}) \cap N_0^2} \left\| (D_2^{\alpha_2} \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(0, \alpha_2)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \left\| (D^\alpha \varphi) h_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\ & + \sum_{\alpha_2=0}^{\Gamma} \sum_{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \left\| (D^\alpha \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \left\| (D^\alpha \varphi) h_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\ & + C_2 m_1 \left(\sum_{\alpha_2=0}^{\Gamma} \left(\left\| (D^{(\alpha_1(\alpha_2), \alpha_2)} \varphi) h_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \left\| (D_2^{\alpha_2} \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(0, \alpha_2)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right) \right) \leq \\ & \leq (C_2 m_1 + 1) \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \left\| (D^\alpha \varphi) h_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + C_2 m_1 \sum_{\alpha_2=0}^{\Gamma} \left\| (D_2^{\alpha_2} \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(0, \alpha_2)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}. \end{aligned}$$

Так как правая часть оценки (2.15) очевидна, то отсюда получаем утверждение леммы. Лемма 2.4 доказана. $\square$

Лемма 2.5. Пусть P – регулярный многочлен с правильным характеристическим многоугольником $\mathcal{N}$. Тогда существуют постоянная C и число $\mathcal{H}_1 \geq \mathcal{H}_0$ ($\mathcal{H}_0$ число из леммы 2.3) такие, что при $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_1$ и $u \in H_h^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}})$

$$(2.16) \quad \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \left\| (D^\alpha \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq C \left(\left\| (P(D)u) h_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \sum_{\alpha_2=0}^{\Gamma} \left\| (D_2^{\alpha_2} \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(0, \alpha_2)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right).$$

Доказательство. В силу леммы 2.2 оценку (2.16) достаточно доказать для функций из $C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$. В силу леммы 2.4 имеем, что с некоторой постоянной $C_1 = C_1(m_1) > 0$ при $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_0$ и $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$

$$(2.17) \quad \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \left\| (D^\alpha \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq C_1 \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \left\| (D^\alpha \varphi) h_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \sum_{\alpha_2=0}^{\Gamma} \left\| (D_2^{\alpha_2} \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(0, \alpha_2)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right).$$

Для первого слагаемого правой части оценки (2.17) в силу формулы Лейбница и определения функции h с некоторой постоянной $C_2 = C_2(h, m_1)$ при $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_0$ и $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$ имеем

$$(2.18) \quad \begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \left\| (D^\alpha \varphi) h_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} = \\ & = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \left\| D^\alpha (\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1}) - \sum_{\substack{\beta_1 < \alpha_1 \\ \alpha_1 \geq 1, \beta_2 = \alpha_2}} C_{\alpha_1}^{\beta_1} D^{\beta_1} \varphi D_1^{\alpha_1 - \beta_1} h_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \\ & \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \left\| D^\alpha (\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1}) \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\ & + \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \sum_{\substack{\beta_1 < \alpha_1 \\ \alpha_1 \geq 1, \beta_2 = \alpha_2}} C_{\alpha_1}^{\beta_1} \left\| (D^{\beta_1} \varphi) h_{\mathcal{H}}^{m_1 - \alpha_1 + \beta_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \cdot \frac{C_2}{\mathcal{H}^{\alpha_1 + \beta_1}}. \end{aligned}$$

Так как при $\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}, 0 \leq \beta_1 < \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2$ $\beta + (m_1 - (m_1 - \alpha_1 + \beta_1), 0) = \alpha \in \mathcal{N}_{m_1}$, то по определению множества $\mathcal{N}_l$ ($l \in N_0$) и условия $\beta_1 < \alpha_1$ получаем, что $\beta \in \mathcal{N}_{m_1 - \alpha_1 + \beta_1} \subset \bigcup_{j=0}^{m_1-1} \mathcal{N}_j$.

Поэтому из (2.18) с некоторым постоянным $C_3 = C_3(\mathcal{N}, h)$, $C_4 = C_4(\mathcal{N}, h) > 0$, при $\mathcal{H} > \max\{1, \mathcal{H}_0\}$ получаем

$$(2.19) \quad \begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \|(D^\alpha \varphi) h_{\mathcal{H}}^{m_1}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \|D^\alpha (\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\ & + \frac{C_3}{\mathcal{H}} \sum_{j=0}^{m_1-1} \sum_{\beta \in \mathcal{N}_j} \|(D^\beta \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(\beta)}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \|D^\alpha (\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\ & + \frac{C_4}{\mathcal{H}} \sum_{\beta \in \mathcal{N} \cap \mathcal{N}_0^2} \|(D^\beta \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(\beta)}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}. \end{aligned}$$

Из оценок (2.18) и (2.19) при $\mathcal{H} > \max\{1, \mathcal{H}_0, 2C_1 \cdot C_4\} \equiv \mathcal{H}'_0$ получаем, что при всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$

$$(2.20) \quad \begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap \mathcal{N}_0^2} \|(D^\alpha \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \\ & \leq 2C_1 \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \|D^\alpha (\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \sum_{\alpha_2=0}^{\Gamma} \|(D_2^{\alpha_2} \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(0, \alpha_2)}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right). \end{aligned}$$

Отсюда, в силу равенства Парсеваля и регулярности многочлена P , для первого слагаемого правой части оценки (2.3) с некоторой постоянной $C_5 = C_5(P) > 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \|D^\alpha (\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \|D^\alpha (\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(E^2)} = \\ & = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \|\xi^\alpha F(\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(R^2)} \leq C_5 \left(\|P(\xi) F(\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(R^2)} + \|F(\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(R^2)} \right) = \\ & = C_5 \left(\|P(D)(\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(R^2)} + \|(\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(R^2)} \right) = \\ & = C_5 \left(\|P(D)(\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \|(\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right). \end{aligned}$$

Из оценки (2.20) и отсюда получаем, что при $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}'_0$

$$(2.21) \quad \begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap \mathcal{N}_0^2} \|(D^\alpha \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq 2C_1 C_5 \left(\|P(D)(\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \|\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right) + \\ & + 2C_1 \sum_{\alpha_2=0}^{\Gamma} \|(D_2^{\alpha_2} \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(0, \alpha_2)}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}. \end{aligned}$$

Для первого слагаемого правой части оценки (2.21) по формуле Лейбница и из определения функции h с некоторой постоянной $C_6 = C_6(P, h) > 0$ имеем

$$(2.22) \quad \begin{aligned} & \|P(D)(\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \|(P(D)\varphi) h_{\mathcal{H}}^{m_1}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\ & + \sum_{\alpha_1 \geq 1} \left\| \left(P^{(\alpha_1, 0)}(D)\varphi \right) D_1^{\alpha_1} h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \| (P(D)\varphi) h_{\mathcal{H}}^{m_1} \|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + C_6 \sum_{\alpha_1 \geq 1} \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{N} \cap N_0^2 \\ \beta_1 \geq \alpha_1}} \frac{\| (D^{\beta - (\alpha_1, 0)} \varphi) h_{\mathcal{H}}^{m_1 - \alpha_1} \|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}}{\mathcal{H}^{\alpha_1}}.$$

Так как $\beta_1 \geq \alpha_1 \geq 1$, то в силу пункта (6) предложения 2.1, $\beta - (\alpha_1, 0) \in \bigcup_{j=0}^{m_1 - \alpha_1} \mathcal{N}_j$ при $\beta \in \mathcal{N} \cap N_0^2$. Следовательно, $m_1 - \alpha_1 \geq d(\beta - (\alpha_1, 0))$ и $h_{\mathcal{H}} \leq 1$. Отсюда с некоторой постоянной $C_7 = C_7(P, h) > 0$ имеем, что для $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$

$$(2.23) \quad \begin{aligned} & \| P(D) (\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1}) \|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \| (P(D)\varphi) h_{\mathcal{H}}^{m_1} \|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\ & + \frac{C_7}{\mathcal{H}} \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \| (D^\alpha \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}. \end{aligned}$$

Из оценок (2.21) и (2.23) при $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_1 := \max \{4C_1 \cdot C_5 \cdot C_7, \mathcal{H}'_0\}$ непосредственно получаем оценку (2.16) с постоянной $C = 4C_1 \cdot C_5$. Лемма 2.5 доказана. $\square$

Для правильного многогранника $\mathcal{N}$ с вершинами из N_0^2 , $j \in N_0$, через $\mathcal{N}^j$ обозначим множество $\bigcup_{l=0}^j \mathcal{N}_l$ и положим

$$H_h^{\mathcal{N}, \infty}(\Omega_{\mathcal{H}}) = \bigcap_{j=m_1}^{\infty} H_h^{\mathcal{N}^j}(\Omega_{\mathcal{H}}).$$

Так как для любого $j \in N_0, j \geq m_1$ выпуклая оболочка $(\mathcal{N}(\mathcal{N}^j))$ множества $\{\alpha, \alpha \in \mathcal{N}^j\}$ является правильным многоугольником и (в силу того, что вершины $\mathcal{N}$ принадлежат N_0^2) $\mathcal{N}(\mathcal{N}^j) \cap N_0^2 = \mathcal{N}^j$, то в силу леммы 2.2 множество $C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$ плотно в $H_h^{\mathcal{N}^j}$ при $j = m_1, m_1 + 1, \dots$

Лемма 2.6. Пусть P – регулярный многочлен с правильным характеристическим многоугольником $\mathcal{N}$, порожденный набором вида B . Тогда для любого $j \in N_0$ существуют постоянные $A_l > 0, l = 0, \dots, j+1$ такие, что при $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_1$ ($\mathcal{H}_1$ число определенное в лемме 2.5) и всех $u \in H_h^{\mathcal{N}, \infty}(\Omega_{\mathcal{H}})$

$$(2.24) \quad \begin{aligned} & \sum_{\beta \in \mathcal{N}^{m_1+j}} \| (D^\beta u) h_{\mathcal{H}}^{d(\beta)} \|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \sum_{l=0}^j A_l \| (D_1^l P(D) u) h_{\mathcal{H}}^{m_1+l} \|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\ & + A_{j+1} \sum_{\alpha_2=0}^{\Gamma} \| (D_2^{\alpha_2} u) h_{\mathcal{H}}^{d(0, \alpha_2)} \|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}, \end{aligned}$$

где Γ – число определенное в лемме 2.4.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по j . Оценка (2.24) при $j = 0$ следует из леммы 2.5. Пусть оценка (2.24) верна при $j \leq k$. Докажем ее для $j = k + 1$. В силу определения $\mathcal{N}^j$ и предположения индукции с некоторыми

постоянными A_l , $l = 0, \dots, k+1$, имеем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\alpha \in \mathcal{N}^{m_1+k+1}} \left\| (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N}^{m_1+k+1} \setminus \mathcal{N}^{m_1+k}} \left\| (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\
 (2.25) \quad & + \sum_{\alpha \in \mathcal{N}^{m_1+k}} \left\| (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N}^{m_1+k+1} \setminus \mathcal{N}^{m_1+k}} \left\| (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\
 & + \sum_{l=0}^k A_l \left\| (D_1^l P(D) u) h_{\mathcal{H}}^{m_1+l} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + A_{k+1} \sum_{\alpha_2=0}^{\Gamma} \left\| (D_2^{\alpha_2} u) h_{\mathcal{H}}^{d(0, \alpha_2)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}.
 \end{aligned}$$

Для первого слагаемого правой части (2.25) из определений множества $\mathcal{N}^j$, функции $d(\cdot)$ и в силу формулы Лейбница имеем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\alpha \in \mathcal{N}^{m_1+k+1} \setminus \mathcal{N}^{m_1+k}} \left\| (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} = \sum_{\beta \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \left\| (D^\beta D_1^{k+1} u) h_{\mathcal{H}}^{m_1+k+1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \\
 & \leq \sum_{\beta \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \left\| D^\beta ((D_1^{k+1} u) h_{\mathcal{H}}^{k+1}) h_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\
 & + \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{N} \\ \beta_1 \geq 1}} \sum_{1 \leq \gamma_1 \leq \beta_1} C_{\beta_1}^{\gamma_1} \left\| D^{\beta - (\gamma_1, 0)} (D_1^{k+1} u) D_1^{\gamma_1} h_{\mathcal{H}}^{k+1} h_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}.
 \end{aligned}$$

Так как с некоторой постоянной $B_{k+1} = B_{k+1}(h) > 0$

$$|(D_1^{\gamma_1} h_{\mathcal{H}}^{k+1}) h_{\mathcal{H}}^{m_1}(x_1)| \leq (B_{k+1}/\mathcal{H}^{\gamma_1}) h_{\mathcal{H}}^{m_1+k+1-\gamma_1}(x_1),$$

при $1 \leq \gamma_1 \leq m_1$, $|x_1| < \mathcal{H}$, $\beta - (\gamma_1; 0) + (k+1; 0) \in \bigcup_{j=0}^{m_1-\gamma_1} \mathcal{N}_{j+k+1} \subset \mathcal{N}^{m_1+k}$ (см. пункт (4) предложения 2.2), то отсюда в силу предположения индукции с некоторыми постоянными A'_l , $l = 0, \dots, k+1$, имеем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\alpha \in \mathcal{N}^{m_1+k+1} \setminus \mathcal{N}^{m_1+k}} \left\| (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \sum_{\beta \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \left\| D^\beta ((D_1^{k+1} u) h_{\mathcal{H}}^{k+1}) h_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\
 & + \sum_{l=0}^k A'_l \left\| (D_1^l P(D) u) h_{\mathcal{H}}^{m_1+l} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + A'_{k+1} \sum_{\alpha_2=0}^{\Gamma} \left\| (D_2^{\alpha_2} u) h_{\mathcal{H}}^{d(0, \alpha_2)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}.
 \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.25) получаем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\beta \in \mathcal{N}^{m_1+j}} \left\| (D^\beta u) h_{\mathcal{H}}^{d(\beta)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \sum_{\beta \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \left\| D^\beta ((D_1^{k+1} u) h_{\mathcal{H}}^{k+1}) h_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\
 (2.26) \quad & + \sum_{l=0}^k (A'_l + A_l) \left\| (D_1^l P(D) u) h_{\mathcal{H}}^{m_1+l} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\
 & + (A'_{k+1} + A_{k+1}) \sum_{\alpha_2=0}^{\Gamma} \left\| (D_2^{\alpha_2} u) h_{\mathcal{H}}^{d(0, \alpha_2)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}.
 \end{aligned}$$

Так как $(D_1^{k+1}u) h_{\mathcal{H}}^{k+1} \in H_h^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}})$ при $u \in H_h^{\mathcal{N}, \infty}(\Omega_{\mathcal{H}})$, то в силу леммы 2.5 для первого слагаемого правой части (2.26) с некоторой постоянной $C_1 > 0$ имеем

$$\begin{aligned}
& \sum_{\beta \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \|D^\beta ((D_1^{k+1}u) h_{\mathcal{H}}^{k+1}) h_{\mathcal{H}}^{m_1}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \\
& \leq C_1 \left(\|P(D) (D_1^{k+1}u) h_{\mathcal{H}}^{m_1}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \sum_{\alpha_2=0}^{\Gamma} \|D_2^{\alpha_2} (D_1^{k+1}u) h_{\mathcal{H}}^{k+1+d(0, \alpha_2)}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right) \leq \\
& \leq C_1 \left(\|(P(D)D_1^{k+1}u) h_{\mathcal{H}}^{k+1+m_1}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \right. \\
& + \sum_{\alpha_1 \geq 1} \left\| \left(P^{(\alpha_1, 0)}(D) D_1^{k+1}u \right) D_1^{\alpha_1} h_{\mathcal{H}}^{k+1} h_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\
& \left. + \sum_{\alpha_2=0}^{\Gamma} \left\| (D_2^{\alpha_2} D_1^{k+1}u) h_{\mathcal{H}}^{k+1+d(0, \alpha_2)} h_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right).
\end{aligned}$$

Так как при $0 \leq \alpha_2 \leq \Gamma$ $(0, \alpha_2) \in \bigcup_{j=0}^{m_1-1} \mathcal{N}_j$, $(k+1, \alpha_2) \in \mathcal{N}^{m_1+k}$ и $\beta - (\alpha_1, 0) + (k+1, 0) \in \mathcal{N}^{m_1+k}$ для любого $\beta \in \mathcal{N}$, $\beta_1 \geq 1$, $1 \leq \alpha_1 \leq \beta_1$, то отсюда в силу оценки (2.26) и предположения индукции получаем оценку (2.24) с некоторыми постоянными $A_l'' > 0$, $l = 0, \dots, k+2$ ($A_{k+1} = C_1$). Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.7. Пусть $\mathcal{N}$ правильный многоугольник с вершинами из N_0^2 . Тогда существует постоянная $C > 0$ такая, что при всех $u \in H_h^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}})$

$$\begin{aligned}
(2.27) \quad & C^{-1} \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \|D^\alpha (u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \|(D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \\
& \leq C \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \|D^\alpha (u h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)})\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Левая часть оценки непосредственно получается применением формулы Лейбница в силу правильности многоугольника и пунктов (1) - (2) предложения 2.2.

Докажем правую часть оценки (2.27). Пусть $0 < j \leq m_1 = \max\{\alpha_1, \alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2\}$. Тогда в силу формулы Лейбница с некоторой постоянной $C_1 > 0$, учитывая, что в силу пункта (2) предложения 2.2 $d(\alpha) - (\beta_1, 0) = d(\alpha - (\beta_1, 0))$ при всех $\alpha \in \mathcal{N}$, $0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1$, (следовательно, $\alpha - (\beta_1, 0) \in \mathcal{N}_{j-\beta_1}$ при $\alpha \in \mathcal{N}$, $0 \leq$

$\beta_1 \leq \alpha_1$), имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_j} \left\| (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_j} \left\| D^\alpha \left(u h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right) \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\ & + \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{N}_j \\ \alpha_1 \geq 1}} \sum_{2 \leq \beta_1 \leq \alpha_1} C_{\alpha_1}^{\beta_1} \left\| (D^{\alpha - (\beta_1, 0)} u) D_1^{\beta_1} h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \\ & \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_j} \left\| D^\alpha \left(u h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right) \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + C_1 \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{\beta \in \mathcal{N}_l} \left\| (D^\beta u) h_{\mathcal{H}}^{d(\beta)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}. \end{aligned}$$

Поступая аналогичным образом, и учитывая, что $\mathcal{N}_0 \subset \{(0, \alpha_2) \in \mathcal{N}\}$ (пункт (3) предложения 2.1) и функция $h_{\mathcal{H}}$ зависит только от переменной x_1 , через $j - 1$ шагов с некоторой постоянной $C_2 > 0$ получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_j} \left\| (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \\ & \leq C_2 \left(\sum_{l=1}^j \sum_{\alpha \in \mathcal{H}_l} \left\| D^\alpha (u h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)}) \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \sum_{\beta \in \mathcal{N}_0} \left\| (D^\beta u) h_{\mathcal{H}}^{d(\beta)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right). \end{aligned}$$

Просуммировав полученные неравенства по $j = 1, \dots, m_1$ и учитывая, что (в силу вышесказанного для $\mathcal{N}_0$).

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{N}_0} \left\| (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_0} \left\| D^\alpha \left(u h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right) \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})},$$

получим оценку (2.27). Лемма доказана. $\square$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом параграфе будем считать, что характеристический многоугольник оператора $P(D) = P(D_1, D_2)$ порожден набором вида B и обозначим

$$N(P, \mathcal{H}) = \left\{ u, D_2^j \in L_2(\Omega_{\mathcal{H}}) \ j = 0, \dots, m_2, P(D)u = 0 \right\},$$

где $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_1$ - число определенное в лемме 2.5, а m'_2 число из леммы 2.4.

Пусть

$$\varphi \in C_0^\infty(S_1), \varphi \geq 0, \int \varphi dx = 1, \varepsilon > 0, \varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-2} \varphi(x/\varepsilon) \quad \text{и} \quad u \in N(P, \mathcal{H}).$$

Обозначим через $\tilde{u}_\varepsilon = \tilde{u} * \varphi_\varepsilon$, где $\tilde{u}$ продолженная нулем вне $\Omega_{\mathcal{H}}$ функция u . Нетрудно заметить, что для любого $\varepsilon > 0$ $D^\alpha \tilde{u}_\varepsilon \in L_2(E^2)$ при всех $\alpha \in N_0^2$ и $D_2^{\alpha_2} \tilde{u}_\varepsilon = \left(\widetilde{D_2^{\alpha_2} u} \right)_\varepsilon$ (см. например [12], 6.3) $\alpha_2 = 0, \dots, \Gamma$.

Лемма 3.1. Для любого $u \in N(P, \mathcal{H})$

$$(3.1) \quad \left\| \left(D_1^j P(D) \tilde{u}_\varepsilon \right) h_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad j = 0, 1, \dots$$

Доказательство. Так как (см. например [12], 6.3, (2)) для $x \in \Omega_{\mathcal{H}-\varepsilon}$, $j = 0, 1, \dots$,

$$\left\| \left(D_1^j P(D) \tilde{u}_\varepsilon \right) h_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

то для доказательства соотношения (3.1) достаточно показать, что при $\varepsilon \rightarrow 0+$ имеем

$$(3.2) \quad \left\| \left(D_1^j P(D) \tilde{u}_\varepsilon \right) h_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\varepsilon})} \rightarrow 0, \quad j = 0, 1, \dots$$

Так как $h_{\mathcal{H}} \leq 2\varepsilon/\mathcal{H}$ при $x \in \Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\varepsilon}$, то в силу неравенства Юнга с некоторыми постоянными $C_1 = C_1(P)$, $C_2 = C_2(P, j, \varphi)$ имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \left(D_1^j P(D) \tilde{u}_\varepsilon \right) h_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\varepsilon})} \leq \left(\frac{2\varepsilon}{\mathcal{H}} \right)^{m_1+j} \left\| D_1^j P(D) \tilde{u}_\varepsilon \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\varepsilon})} \leq \\ & \leq C_1 \left(\frac{2\varepsilon}{\mathcal{H}} \right)^{m_1+j} \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \left\| \left(\widetilde{D_2^{\alpha_2} u} \right) * \left(D_1^{\alpha_1+j} \varphi_\varepsilon \right) \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\varepsilon})} \leq \\ & \leq C_1 \left(\frac{2\varepsilon}{\mathcal{H}} \right)^{m_1+j} \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \sup_{|y| < \varepsilon} \left\| \widetilde{D_2^{\alpha_2} u}(\cdot - y) \right\|_{L_2(E^2)} \cdot \left\| D_1^{\alpha_1+j} \varphi_\varepsilon \right\|_{L_1(E^2)} \leq \\ & \leq C_2 \left(\frac{2\varepsilon}{\mathcal{H}} \right)^{m_1+j} \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \varepsilon^{-(\alpha_1+j)} \sup_{|y| < \varepsilon} \left\| \widetilde{D_2^{\alpha_2} u}(\cdot - y) \right\|_{L_2(E^2)}. \end{aligned}$$

Так как $m_2 + j \geq \alpha_1 + j$ при всех $\alpha \in \mathcal{N}$, а функции из $L_2(E^2)$ непрерывны в среднем, то отсюда непосредственно получаем утверждение леммы. Лемма доказана. $\square$

Теорема 3.1. Пусть $P(D) = P(D_1, D_2)$ регулярный оператор характеристический многоугольник которого порожден набором вида B . Тогда при $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_1$ ($\mathcal{H}_1$ - число из леммы 2.5) $N(P, \mathcal{H}) \subset H_h^{\mathcal{N}, \infty}(\Omega_{\mathcal{H}})$.

Доказательство. Пусть $u \in N(P, \mathcal{H})$, φ и $\tilde{u}_\varepsilon$ те же, что и в лемме 3.1. Тогда в силу лемм 2.7 и 2.6 (так как для любого $j \in \mathcal{N}_0$ многоугольник набора $\mathcal{N}^{m_1+j}$ - правильный) с некоторыми постоянными A_l , $l = 0, \dots, j+1$ имеем

$$(3.3) \quad \begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathcal{N}^{m_1+j}} \left\| D^\alpha \left(\tilde{u}_\varepsilon h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right) \right\| \leq \sum_{l=0}^j A_l \left\| \left(D_1^l P(D) \tilde{u}_\varepsilon \right) h_{\mathcal{H}}^{m_1+l} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\ & + A_{j+1} \sum_{\alpha_2=0}^{\Gamma} \left\| \left(\widetilde{D_2^{\alpha_2} u} \right)_\varepsilon h_{\mathcal{H}}^{d(0, \alpha_2)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}. \end{aligned}$$

Из условия $u \in N(P, \mathcal{H})$ и определения функции h в силу леммы 3.1, получаем, что множество $\{\tilde{u}_\varepsilon\}$ равномерно ограничено в

$$H^{\mathcal{N}^{m_1+j}}(\Omega_{\mathcal{H}_2}) \equiv \{ v, D^j v \in L_2(\Omega_{\mathcal{H}_2}) \quad \forall \alpha \in \mathcal{N}^{m_1+j} \}$$

для любого $\mathcal{H}_2 \in (0, \mathcal{H})$.

Поступая аналогичным образом с $\tilde{u}_{\varepsilon_1} - \tilde{u}_{\varepsilon_2}$ в силу леммы 3.1 и условия $u \in N(P, \mathcal{H})$ имеем, что при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow +0$

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{m_1+j}} \left\| D^\alpha \left((\tilde{u}_{\varepsilon_1} - \tilde{u}_{\varepsilon_2}) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right) \right\| \leq \sum_{l=0}^j A_l \left\| (D_1^l P(D) (\tilde{u}_{\varepsilon_1} - \tilde{u}_{\varepsilon_2})) h_{\mathcal{H}}^{m_1+l} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\ + A_{j+1} \sum_{\alpha_2=0}^{\Gamma} \left\| \left(\left(\widetilde{D_2^{\alpha_2} u} \right)_{\varepsilon_1} - \left(\widetilde{D^{\alpha_2} u} \right)_{\varepsilon_2} \right) h_{\mathcal{H}}^{d(0, \alpha_2)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \rightarrow 0,$$

т.е. множество предкомпактное в $H^{\mathbb{N}^{m_1+j}}(\Omega_{\mathcal{H}_2})$ при всех $\mathcal{H}_2 \in (0, \mathcal{H})$.

Так как, очевидно, $\|\tilde{u}_\varepsilon - u\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то в силу полноты пространства $H^{\mathbb{N}^{m_1+j}}(\Omega_{\mathcal{H}_2})$ получаем, что $u \in H^{\mathbb{N}^{m_1+j}}(\Omega_{\mathcal{H}_2})$ при всех $\mathcal{H}_2 \in (0, \mathcal{H})$. При этом переходя к пределу в (3.3), когда $\varepsilon \rightarrow 0+$ в силу леммы 2.7 получаем, что $u \in H_h^{\mathbb{N}^{m_1+j}}(\Omega_{\mathcal{H}})$. Отсюда в силу произвольности $j \in \mathbb{N}_0$ имеем, что $N(P, \mathcal{H}) \subset H_h^{\mathbb{N}, \infty}(\Omega_{\mathcal{H}})$. Теорема доказана. $\square$

Лемма 3.2. Пусть $j \in \mathbb{N}_0$, $u \in H_h^{\mathbb{N}^{m_1+j}}(\Omega_{\mathcal{H}})$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$. Тогда $u\varphi \in H^{\mathbb{N}^{m_1+j}}$, при этом с некоторой постоянной $C = C(j, \varphi) > 0$

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{m_1+j}} \|D^\alpha(u\varphi)\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq C \sum_{\alpha \in \mathbb{R}^{m_1+j}} \left\| (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}, \quad \forall u \in H_h^{\mathbb{N}^{m_1+j}}.$$

Доказательство. Непосредственно получается применением формулы Лейбница в силу леммы 2.7 если заметить, что функция

$$\begin{cases} \varphi(x)/g_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)}, & \text{при } x \in \text{supp } \varphi \\ 0, & \text{при } x \notin \text{supp } \varphi \end{cases}$$

для любого $\alpha \in \mathbb{N}^{m_1+j}$ принадлежат $C^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$. $\square$

Теорема 3.2. При условии теоремы 3.1, $N(P, \mathcal{H}) \subset C^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$.

Доказательство. Пусть $R_0(\xi) = 1 + |P(\xi)|$, $R_j(\xi) = R_0(\xi) (1 + |\xi_1|)^j$, $j = 1, 2, \dots$. Так как в силу предложения 2.6 оператор $P(D)$ частично гипоэллиптический по ξ_2 , функция $R_0(\xi)$ является медленно растущей весовой функцией (см. [1] том 2, определение 10.1.1), то в силу теоремы Гординга-Малыгранжа-Эренпрайса (см. например [1] том 2, теорема 11.2.5) для доказательства теоремы 3.2 достаточно показать, что $N(P, \mathcal{H}) \subset B_{2, R_j}^{loc}(\Omega_{\mathcal{H}})$, $j = 0, 1, \dots$, где для весовой функции R и области Ω пространство Л. Хермандера $B_{2, R}^{loc}(\Omega)$ определяется следующим образом

$$B_{2, R_j}^{loc}(\Omega) = \{v; v \in D'(\Omega), \text{ для } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) F(v\varphi) \text{ функция и}$$

$$\|R(\xi) F(v\varphi)\|_{L_2(R^2)} < \infty\},$$

где $D'(\Omega)$ - пространство распределений над $C_0^\infty(\Omega)$, а F - преобразование Фурье.

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$. Тогда в силу равенства Парсеваля и леммы 3.2 для любого $u \in N(P, \mathcal{H})$ в силу теоремы 3.1 с некоторыми постоянными $C_1 = C_1(P, j) > 0$, $C_2 = C_2(P, j, \varphi, h) > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \|R_j(\xi) F(u\varphi)\|_{L_2(R^2)} &= \left\| (1 + |P(\xi)|) (1 + |\xi_1|)^j F(u\varphi) \right\|_{L_2(R^2)} \leq \|F(u\varphi)\|_{L_2(R^2)} + \\ &+ \|P(\xi) F(u\varphi)\|_{L_2(R^2)} + \left\| \xi_1^j F(u\varphi) \right\|_{L_2(R^2)} + \left\| \xi_1^j P(\xi) F(u\varphi) \right\|_{L_2(R^2)} \leq \\ &\leq C_1 \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{m_1+j}} \|D^\alpha(u\varphi)\|_{L_2(R^2)} = C_1 \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{m_1+j}} \|D^\alpha(u\varphi)\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \\ &\leq C_2 \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{m_1+j}} \left\| (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} < \infty. \end{aligned}$$

Это означает, что $u \in B_{2,R_j}^{loc}(\Omega_{\mathcal{H}})$ для любого $j = 0, 1, \dots$. Следовательно, в силу упомянутой теоремы Гординга-Мальгранжа-Эренпрайса $u \in C^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$. Так как $u \in N(P, \mathcal{H})$ было любое, то отсюда получаем утверждение теоремы. Теорема 3.2 доказана. $\square$

Abstract. The paper considers a class of regular, hypoelliptic in x_1 , two-dimensional operators $P(D) = P(D_1, D_2)$ in rather wide strip $\Omega_{\mathcal{H}} = \{x = (x_1; x_2) \in E^2, |x_1| < \mathcal{H}, x_2 \in E^1\}$. It is proved the infinite differentiability in $\Omega_{\mathcal{H}}$ of those generalized solutions of the equation $P(D)u = 0$ for which $D_2^j u \in L_2(\Omega_{\mathcal{H}})$, $j = 0, \dots, \text{ord}_{x_2} P$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Хермандер, Анализ Линейных Дифференциальных Операторов с Частными Производными, **1, 2**, Ин. Лит., М., Наука (1983).
- [2] В. И. Буренков, "Аналог теоремы Л. Хермандера о гипоеллиптичности для функций стремящихся к нулю на бесконечности", Сборник докладов 7-ого Советско-Чехословацкого семинара, Ереван, 63 – 67 (1982).
- [3] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Носитель гипоеллиптичности линейных дифференциальных операторов", Изв. АН. АрмССР XXI, сер. Математика, (5), 453 – 470 (1986).
- [4] Г. Г. Казарян, "О почти гипоеллиптических многочлена", Докл. Росс. Акад. Наук, **398**, (6), 701 – 703 (2004).
- [5] В. Г. Карапетян, В. Н. Маргарян, "О почти гипоеллиптических операторах в обобщенных весовых пространствах Соболева", Математика в высшей школе, **4**, (4), 9 – 16 (2008).
- [6] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Об одном классе почти гипоеллиптических операторов", Изв. НАН. Армении, сер. Математика, **41**, (6), 39 – 56 (2006).
- [7] В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, **91**, 59 – 81 (1967).
- [8] L. R. Volevich, S. G. Gindikin, The Method of Newton's Polyhedron in the Theory of PDE, Kluwer Academic Publishers (1992).
- [9] L. Ehrenpreis, "Solutions of some problems of division", 4 Amer. J. Math., **82**, 522 – 588 (1960).
- [10] F. John, "Continuous dependence of data for solutions of PDE with a prescribed bound", Comm. Pure Appl. Math., **13**, 551 – 585 (1960).
- [11] В. Н. Маргарян, Г. Г. Казарян, "О гладкости решений одного класса почти гипоеллиптических уравнений", Изв. НАН. Арм., сер. Математика, **43**, (3), 40 – 66 (2008).
- [12] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные Представления Функций и Теоремы Вложения, Москва, Наука (1996).

Поступила 22 июня 2009