

**О ПРИБЛИЖЕНИИ В СРЕДНЕМ ПОЛИНОМАМИ С
ПРОПУСКАМИ НА НЕ-КАРАТЕОДОРИЕВЫХ ОБЛАСТЯХ**

В. А. МАРТИРОСЯН, С. Е. МКРТЧЯН

Ереванский государственный университет
Институт математики НАН Армении
E-mail: *mart@instmath.sci.am*

Аннотация. Статья представляет некоторые новые результаты об аппроксимации полиномами с пропусками в норме пространства L_p , $1 \leq p < \infty$, на не-Каратеодориевых областях комплексной плоскости. Найдены лакунарные версии некоторых результатов А. Л. Шагиняна, М. М. Джрбашяна, С. Н. Мергеляна, Дж. Бреннана.

MSC2000 number: 30B60

Ключевые слова: полиномиальное приближение в среднем, полиномы с пропусками, не-Каратеодориевы области, области с граничными разрезами, области лунообразного типа.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа продолжает начатое в [1] исследование вопросов аппроксимации в среднем полиномами с пропусками. Полученные в указанной статье результаты относились к случаю аппроксимации на классе Каратеодориевых множеств (областей). В данной работе аналогичные вопросы изучаются для известных подклассов не-Каратеодориевых областей (области с граничными разрезами, традиционные луночки, обобщенные луночки). Найденные здесь результаты подтверждают подмеченное в [1] наблюдение, что при аппроксимации в среднем (по сравнению с равномерной аппроксимацией) возникают интересные специфические особенности. Эти результаты были анонсированы в [2].

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Введем некоторые обозначения. Пусть, как обычно, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ будут, соответственно, множества всех натуральных, вещественных, положительных вещественных чисел, $\mathbb{C}$ и $\bar{\mathbb{C}}$ – комплексная и расширенная комплексная плоскости. Для подпоследовательности $\{p_n\}_1^\infty$ из $\mathbb{N}$ обозначим через $\{q_n\}_1^\infty$ последовательность, дополнительную к $\{p_n\}_1^\infty$ относительно $\mathbb{N}$. Положим

$$D_r(a) = \{z : |z - a| < r\} \quad \text{для} \quad a \in \mathbb{C}, \quad r \in \mathbb{R}_+,$$

$$\Delta_\beta^\alpha(s) = \{z : |z| \leq s, |\arg z - \alpha \log |z|| \leq \beta\} \quad \text{для } \alpha \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}_+, \beta \in [0, \pi).$$

Функцию $V : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, непрерывно дифференцируемую и удовлетворяющую условию $t \frac{V'(t)}{V(t)} \uparrow +\infty$ при $t \downarrow 0$, будем называть регулярной.

Пусть Ω – ограниченная область плоскости $\mathbb{C}$. Через $\partial\Omega$, $\bar{\Omega}$, Ω_∞ будем обозначать, соответственно, границу, замыкание и неограниченную компоненту связности дополнения $\mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$ к ее замыканию. Пусть $L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ – банахово пространство, элементами которого являются все определенные на Ω измеримые комплексные функции комплексного переменного $z = x + iy$, имеющие конечную норму

$$\|f\|_p = \left\{ \iint_{\Omega} |f|^p dx dy \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Подпространство этого пространства, состоящее из голоморфных на Ω функций, обозначим $H_p(\Omega)$. Определим также банахово пространство $h_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ состоящее из всех определенных на Ω действительных функций u , которые гармоничны на Ω и имеют конечную норму $\|u\|_p$. Плоскую меру Лебега измеримого множества $E \subset \mathbb{C}$ будем обозначать $meas E$.

Ниже нам понадобится результат типа знаменитой теоремы Мюнца (см. [3], [4]). Обозначим через $A(\Delta_\beta^\alpha(s))$ банахово пространство из всех непрерывных на $\Delta_\beta^\alpha(s)$ и голоморфных на внутренности $\Delta_\beta^\alpha(s)$ функций с нормой $\|f\| = \sup\{|f(z)| : z \in \Delta_\beta^\alpha(s)\}$.

Теорема А. Пусть $\{p_n\}_1^\infty$ – подпоследовательность из $\mathbb{N}$. Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ полна в пространстве $A(\Delta_\beta^\alpha(s))$ тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$(1.1) \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \left[\sum_{p_n \leq r} \frac{1}{p_n} - \frac{\beta}{\pi} \log r \right] = +\infty.$$

Отметим, что теорема А доказывается аналогично ее частному случаю, когда $\alpha = 0$ (см. [5]). Другие сведения вспомогательного характера относительно полиномиальной аппроксимации в среднем приводятся ниже по мере надобности.

2. МЕТРИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ АППРОКСИМАЦИИ МЕРГЕЛЯНА–БРЕННАНА

Класс Каратеодориевых множеств (областей) определяется своими топологическими свойствами и, как известно, на множествах этого класса всегда возможна полиномиальная аппроксимация в среднем. Что касается возможности полиномиальной аппроксимации в среднем на не-Каратеодориевых множествах (областях), то она оказывается зависящей уже от **метрических** свойств множества аппроксимации в окрестности ее границы. Этот феномен впервые был открыт

[6] академиком М. В. Келдышем в 1939 г. и исследовался в дальнейшем рядом авторов. Приведем сперва общий критерий полиномиальной аппроксимации в среднем, справедливый для широкого класса не-Каратеодориевых областей.

Теорема В. Пусть Ω – ограниченная односвязная область, для которой существует последовательность точек $\{\varsigma\}_1^\infty$, имеющая следующие свойства:

- 1) замыкание множества точек $\{\varsigma\}_1^\infty$ содержит $\partial\Omega$;
- 2) каждую точку ς_n можно соединить с $\partial\Omega_\infty$ спрямляемой дугой Γ такою, что:

a) $\text{meas}\Omega_t(\Gamma) \leq V(t)$, где $\Omega_t(\Gamma) = \{z \in \Omega : \text{dist}(z, \Gamma) \leq t\}$, $t > 0$, а V – какая-либо регулярная мажоранта;

b) $\int_0 \log \log \frac{1}{V(t)} dt = +\infty$.

Тогда множество полиномов плотно в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Отметим, что теорема В и ее точность доказаны Дж. Бреннаном [7]. Они обобщают и усиливают соответствующие результаты С. Мергеляна (см. [8],[9]). Соответствующие теореме В результаты об аппроксимации в среднем лакунарными полиномами приводятся ниже в теоремах 1 - 4.

Теорема 1. Пусть Ω – ограниченная односвязная область, удовлетворяющая предположениям теоремы В, $0 \in \Omega_\infty$, и $\{p_n\}_1^\infty$ – подпоследовательность из $\mathbb{N}$, удовлетворяющая условию

$$(2.1) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{p_n} = 1.$$

Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ полна в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Теорема 2. Пусть $\{p_n\}_1^\infty$ – подпоследовательность из $\mathbb{N}$, удовлетворяющая условию

$$(2.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{p_n} = 1,$$

Ω – ограниченная односвязная область, удовлетворяющая предположениям теоремы В, $0 \in \partial\Omega_\infty$ и существует последовательность $\{z_m\} \subset \Omega_\infty$ такая, что $z_m \rightarrow 0$ и

$$(2.3) \quad \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{|z_m|}{\text{dist}(z_m, \partial\Omega_\infty)} < \infty.$$

Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ полна в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Теорема 3. Пусть $\{p_n\}_1^\infty$ – подпоследовательность из $\mathbb{N}$, Ω – ограниченная односвязная область, удовлетворяющая предположениям теоремы В, $0 \in \partial\Omega_\infty$ и является достижимой граничной точкой для Ω_∞ . Тогда система функций

$\{z^{p_n}\}_1^\infty$ полна в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < 2$, при выполнении одного из следующих условий:

- 1) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{q_n} < \infty$, $\frac{n}{q_n} \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$;
- 2) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(\log q_n)^{1+\varepsilon}}{q_n} < \infty$ для $\varepsilon > 0$;
- 3) 0 является достижимой граничной точкой прямолинейным отрезком для Ω_∞ и $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{q_n} < \infty$.

Теорема 4. Пусть Ω – ограниченная односвязная область, удовлетворяющая предположениям теоремы В, $0 \in \partial\Omega_\infty$ и $\Omega \subset \Delta_\beta^\alpha(s)$, $\{p_n\}_1^\infty$ – подпоследовательность из $\mathbb{N}$, удовлетворяющая условию (1.1). Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ полна в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Доказательства теорем 1, 2, 4. Согласно теореме В для функции $f \in H_p(\Omega)$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует полином g такой, что

$$\|f - g\|_p < \varepsilon.$$

Без потери общности можем считать, что $g(0) = 0$. Рассмотрим компакт $\tilde{E} = \mathbb{C} \setminus \Omega_\infty$, в случае теорем 1, 2, и $\tilde{E} = \Delta_\beta^\alpha(s)$, в случае теоремы 4. Применяя к $\tilde{E}$ и g соответствующие результаты (см. [10], [11]) о равномерной аппроксимации лакунарными полиномами в первом случае и теорему А – во втором, найдем полином q по системе $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ такой, что

$$|g(z) - q(z)| < \varepsilon \quad \text{при всех } z \in \tilde{E}.$$

Так как $\Omega \subset \tilde{E}$, то тогда

$$\|f - q\|_p < \varepsilon(1 + \text{meas}\Omega).$$

□

Доказательство теоремы 3. Ограничимся доказательством случая $1 < p < 2$ (при $p = 1$ нужны лишь простые изменения). Согласно теоремам Хана-Банаха, Ф. Рисса и теореме В достаточно показать, что для любой функции $g \in L^q(\Omega)$, $q^{-1} + p^{-1} = 1$, удовлетворяющей соотношениям ортогональности

$$(2.4) \quad \iint_{\Omega} z^{p_n} \overline{g(z)} dx dy = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

будут выполняться также условия

$$(2.5) \quad \iint_{\Omega} z^{q_n} \overline{g(z)} dx dy = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

С этой целью рассмотрим интеграл Коши

$$F(t) = \iint_{\Omega} \frac{\overline{g(z)}}{t - z} dx dy, \quad z = x + iy.$$

Очевидно, что функция $F \in H(\bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{\Omega})$ и ограничена на $\bar{\mathbb{C}}$ в силу ограничения $q > 2$. С учетом (2.4) при $|t| > \sup\{|z| : z \in \Omega\}$ она представляется лакунарным рядом Лорана

$$(2.6) \quad F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{-q_n-1} \iint_{\Omega} z^{q_n} \overline{g(z)} dx dy \quad (q_0 = 0).$$

Так как при каждом из предположений 1) – 3), очевидно, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{q_n} = 0,$$

то, учитывая известную теорему Е. Фабри [12] о естественной границе степенного ряда, заключаем, что ряд (2.6) определяет функцию $F_1 \in H(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$. По теореме единственности аналитических функций из (2.6) следует равенство

$$F_1(t) = F(t) \quad \text{при} \quad t \in \Omega_{\infty}.$$

Таким образом, функция $F_1 \in H(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$, ограничена на Ω_{∞} и в окрестности бесконечно удаленной точки представляется лакунарным рядом (2.6). Следовательно, применяя к ней соответственно случаям 1), 2), 3) результаты работ [13], [14], [15], получим $F_1(t) \equiv \text{const}$. Отсюда и из (2.6) вытекают требуемые условия (2.5). Теорема 3 доказана. $\square$

Замечание 1. Интересно отметить, что теорема 3 (в отличие от теорем 1, 2, 4) не имеет естественного аналога в случае равномерной аппроксимации лакунарными полиномами (см. [10]).

3. ОБЛАСТИ С ГРАНИЧНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

Перейдем к рассмотрению более узких (по сравнению с теоремой В) классов не-Каратеодориевых областей. Выделим сперва области с граничными разрезами. Их типичные примеры доставляют Жордановы области с удаленными разрезами, которые являются Жордановыми дугами, соединяющими внутренние точки области с ее граничными точками. Ради простоты мы ограничимся здесь случаем круга с радиальными разрезами. Приведем сначала соответствующий этому случаю результат о полиномиальной аппроксимации в среднем.

Пусть E – совершенное, нигде не плотное точечное множество на окружности $\partial D_r(a)$. Для каждого $w \in E$ обозначим

$$S_w = \{z : \arg(z - a) = \arg(w - a), r - \rho \leq |z - a| \leq r\}, \quad 0 < \rho < r,$$

и положим $S_E = \cup_{w \in E} S_w$. Фиксируя ρ , рассмотрим множество

$$\Omega_E = D_r(a) \setminus S_E.$$

Итак, Ω_E – ограниченная односвязная область, граница которой $\partial\Omega_E$ состоит почти целиком из радиальных разрезов. Для $w \in \partial D_r(a)$ и $t \in \mathbb{R}_+$ положим

$$\Delta_t(w) = D_w(t) \cap \partial D_r(a)$$

и обозначим через Λ линейную меру Лебега.

Теорема С. (см. [7]). Пусть существует счетное множество E' всюду плотное в E такое, что для каждого $w \in E'$:

1) $\Lambda(\Delta_t(w) \cap (\partial D_r(a) \setminus E)) \leq V(t)$ при $t \leq t(w)$, для некоторой регулярной мажоранты V ;

$$2) \int_0^1 \log \log \frac{1}{V(t)} dt = +\infty.$$

Тогда множество полиномов плотно в пространстве $H_p(\Omega_E)$, $1 \leq p < \infty$.

Следующий результат является лакунарным аналогом теоремы С.

Теорема 5. Пусть область Ω_E удовлетворяет предположениям теоремы С, причем $r \leq |a|$, и подпоследовательность $\{p_n\}_1^\infty$ из $\mathbb{N}$ удовлетворяет условию (1.1), где

$$\beta = \arcsin \frac{r}{|a|}.$$

Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ полна в пространстве $H_p(\Omega_E)$, $1 \leq p < \infty$.

Доказательство. Без потери общности можно считать, что $a \in \mathbb{R}_+$. В этом случае область Ω_E будет содержаться в секторе $\Delta_\beta^0(|a| + r) = \{z : |\arg z| \leq \beta, |z| \leq |a| + r\}$. Согласно теореме С любая функция из $H_p(\Omega_E)$, $1 \leq p < \infty$, аппроксимируется полиномами. Однако, согласно теореме А любой полином можно равномерно на этом секторе аппроксимировать полиномами по системе функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$. Этим теорема 5 доказана. $\square$

4. ЛУНООБРАЗНЫЕ ОБЛАСТИ

Другой важный класс не-Каратеодориевых областей образуют лунообразные области (луночки). Такие области были хронологически первыми не-Каратеодориевыми областями, изученными в связи с возможностью полиномиальной аппроксимации в среднем. **Традиционная** луночка понимается как односвязная область, топологически эквивалентная области, ограниченной двумя внутренне касающимися окружностями. Для традиционных луночек имеют место следующие результаты.

Теорема D. Пусть Ω – луночка с кратной граничной точкой в начале координат, которая расположена между двумя окружностями $\partial D_a(a)$ и $\partial D_{a/2}(a/2)$. Обозначим через $l(r)$ линейную меру множества $\Omega \cap \partial D_r$ и предположим, что $r \frac{l'(r)}{l(r)} \uparrow +\infty$ при $r \downarrow 0$. Тогда множество полиномов плотно в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, тогда и только тогда, когда

$$\int_0 \log l(r) dr = -\infty.$$

Теорема E. Пусть Ω – луночка с кратной граничной точкой x_0 , для которой существует прямолинейный отрезок L от точки x_0 во внутрь ограниченной компоненты для $\mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$ такой, что $\text{dist}(z, L) \geq C \text{dist}(z, x_0)^k$ для любого $z \in \Omega$ и некоторых постоянных $k > 0$, $C > 0$. Обозначим через $l(r)$ линейную меру множества $\Omega \cap \partial D_r(x_0)$ и предположим, что:

- 1) $r \frac{l'(r)}{l(r)} \uparrow +\infty$ при $r \downarrow 0$;
- 2) $\int_0 r^{k-1} \log \log \frac{1}{l(r)} dr = +\infty$.

Тогда множество полиномов плотно в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Замечание 2. Теорема D доказана академиками А. Л. Шагиняном и М. М. Джербашьяном (необходимость и достаточность интегрального условия, соответственно). Теорема E принадлежит Дж. Бреннану. Существенное различие между ними состоит в том, что в теореме D луночка Ω не имеет выступа в кратной граничной точке, а в теореме E – может иметь (см. [7]).

Обратимся к лакунарным версиям теорем D, E.

Теорема 6. Пусть Ω – луночка, удовлетворяющая предположениям теоремы D, $\{p_n\}_1^\infty$ – подпоследовательность из $\mathbb{N}$, удовлетворяющая условию

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \left[\sum_{p_n \leq r} \frac{1}{p_n} - \frac{1}{2} \log r \right] = +\infty.$$

Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ полна в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Теорема 7. Пусть Ω – луночка, удовлетворяющая предположениям теоремы E, $0 \in \Omega_\infty$ и $\{p_n\}_1^\infty$ – подпоследовательность из $\mathbb{N}$, удовлетворяющая условию (2.1). Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ полна в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Теорема 8. Пусть $\{p_n\}_1^\infty$ – подпоследовательность из $\mathbb{N}$, удовлетворяющая условию (2.2) и Ω – луночка, удовлетворяющая предположениям теоремы E, $x_0 = 0$ и существует последовательность $\{z_m\} \subset \Omega_\infty$ такая, что $z_m \rightarrow 0$ и выполняется условие (2.3). Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ полна в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Теорема 9. Пусть $\{p_n\}_1^\infty$ – подпоследовательность из $\mathbb{N}$, Ω – луночка, удовлетворяющая предположениям теоремы E и $x_0 = 0$. Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ полна в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < 2$, при выполнении одного из условий 1) – 3) теоремы 3.

Теорема 10. Пусть Ω – луночка, удовлетворяющая предположениям теоремы E, $0 \in \bar{\Omega}_\infty$ и $\Omega \subset \Delta_\beta^\alpha(s)$, $\{p_n\}_1^\infty$ – подпоследовательность из $\mathbb{N}$, удовлетворяющая условию (1.1). Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ полна в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Доказательства теорем 6 – 10. Теоремы 7, 8, 10 доказываются точно так же, как соответствующие теоремы 1, 2, 4 с той разницей, что вместо теоремы В надо использовать теорему Е. Для доказательства теоремы 6 надо использовать теорему Е и теорему А при $\beta = \pi$ (см. доказательство теоремы 4). Теорема 9 доказывается как теорема 3 с заменой в ее доказательстве теоремы В теоремой Е. $\square$

5. ОБОБЩЕННЫЕ ЛУНООБРАЗНЫЕ ОБЛАСТИ

По сравнению с традиционными луночками, рассмотренными в §4, более обширный класс не-Каратеодориевых областей образуют **обобщенные лунообразные области**. Изучение возможности полиномиальной аппроксимации в среднем на таких областях было начато в работах Дж. Бреннана, В. Хавина, В. Мазы (см [16], [17], [18]). Напомним, что под обобщенной лунообразной областью понимается область Ω , замыкание которой $\bar{\Omega}$ есть компактное связное множество с дополнением $\mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$, состоящим из двух компонент связности: неограниченной компоненты Ω_∞ и ограниченной компоненты G , причем $\partial G \cap \partial \Omega_\infty \neq \emptyset$. В частном случае, когда множество $\partial G \cap \partial \Omega_\infty$ состоит из одного элемента, получается традиционная луночка. Типичным примером обобщенной лунообразной области является внутренняя змейка – односвязная область, наматывающаяся изнутри круга к его границе.

Для обобщенных луночек имеют место следующие теоремы о полиномиальной аппроксимации в среднем (см [19]).

Теорема F. Пусть Ω – обобщенная луночка, $\mathbb{C} \setminus \bar{\Omega} = \Omega_\infty \cup G$. Предположим, что граница ограниченной компоненты ∂G является Жордановой кривой класса C^1 и ее внешняя единичная нормаль n удовлетворяет условию Липшица

$$|n(z_1) - n(z_2)| \leq C|z_1 - z_2| \quad \text{при всех } z_1, z_2 \in \partial G,$$

где $C > 0$ – постоянная. Тогда множество полиномов плотно в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, тогда и только тогда, когда

$$\int_{\partial G} \log \delta(z) |dz| = -\infty, \quad \delta(z) = \text{dist}(z, \partial\Omega_\infty).$$

Теорема Г. Пусть Ω – обобщенная луночка и ω – гармоническая мера на ∂G относительно какой-либо фиксированной точки $x_0 \in G$. Тогда существует универсальная постоянная $\tau > 0$ такая, что если

$$\int_{\partial G} \log \delta(z) d\omega(z) = -\infty,$$

то множество полиномов плотно в пространстве $H_p(\Omega)$ при $1 \leq p < 3 + \tau$.

Как и в случае традиционных луночек для обобщенных луночек справедливы следующие лакунарные версии теорем F, G.

Теорема 11. Пусть обобщенная луночка Ω и число p удовлетворяют предположениям теоремы F (или G), $0 \in \Omega_\infty$ и подпоследовательность $\{p_n\}_1^\infty$ из $\mathbb{N}$ удовлетворяет условию (2.1). Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ полна в пространстве $H_p(\Omega)$.

Теорема 12. Пусть подпоследовательность $\{p_n\}_1^\infty$ из $\mathbb{N}$ удовлетворяет условию (2.2), а обобщенная луночка Ω и число p удовлетворяют предположениям теоремы F (или G), $0 \in \partial\Omega_\infty$ и существует последовательность $\{z_m\} \subset \Omega_\infty$ такая, что $z_m \rightarrow 0$ и выполняется условие (2.3). Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ полна в пространстве $H_p(\Omega)$.

Теорема 13. Пусть $\{p_n\}_1^\infty$ – подпоследовательность из $\mathbb{N}$, Ω – обобщенная луночка, удовлетворяющая предположениям теоремы F (или G) и $0 \in \Omega_\infty$. Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ полна в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < 2$, при выполнении одного из условий 1) - 3) теоремы 3.

Теорема 14. Пусть обобщенная луночка Ω и число p удовлетворяют предположениям теоремы F (или G), $0 \in \bar{\Omega}_\infty$ и $\Omega \subset \Delta_\beta^\alpha(s)$, подпоследовательность $\{p_n\}_1^\infty$ из $\mathbb{N}$ удовлетворяет условию (1.1). Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ полна в пространстве $H_p(\Omega)$.

Теоремы 11 – 14 доказываются аналогично соответствующим теоремам 7 - 10 с заменой в доказательстве последних теоремы E через теорему F (или G).

6. АППРОКСИМАЦИЯ ГАРМОНИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

Вопросы полиномиальной аппроксимации в среднем, как хорошо известно, тесно связаны с вопросами аппроксимации в среднем вещественными гармоническими полиномами. Указанная связь подтверждается, в частности, следующим результатом (см. [7]).

Теорема Н. Пусть обобщенная луночка Ω такова, что множество полиномов плотно в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Тогда множество вещественных гармонических полиномов плотно в пространстве $h_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Комбинируя теорему Н с теоремами 6 – 14, получим следующее следствие.

Теорема 15. Пусть обобщенная луночка Ω , число p и подпоследовательность $\{p_n\}_1^\infty$ из $\mathbb{N}$ удовлетворяют предположениям одной из теорем 6 - 14. Тогда множество вещественных частей полиномов по системе функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ плотно в пространстве $h_p(\Omega)$.

Доказательство. В самом деле, пусть заданы функция $g \in h_p(\Omega)$ и число $\varepsilon > 0$. По теореме Н существует вещественный гармонический полином u такой, что

$$\|g - u\|_p < \varepsilon.$$

Пусть f такая целая функция, что $\operatorname{Re} f = u$. По одной из теорем 6 - 14 найдется полином q по системе функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$, для которого

$$\|f - q\|_p < \varepsilon.$$

Следовательно, получим

$$\|g - \operatorname{Re} q\|_p < 2\varepsilon.$$

Теорема 15 доказана. □

Abstract. The paper presents some new results on approximation by polynomials with gaps in the norm of the space L_p , $1 \leq p < \infty$, on non-Caratheodory domains in the complex plane. Lacunary versions of several results due to A. L. Shahinian, M. M. Djrbashian, S. M. Mergelian and J. Brennan are proved.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Мартиросян, С. Е. Мкртчян, “О приближении в среднем полиномами с пропусками на множествах Каратеодори”, Изв. НАН Армении. Математика, **43** (6), 43 – 50 (2008).
- [2] В. А. Мартиросян, С. Е. Мкртчян, “О приближении в среднем полиномами с пропусками на не-Каратеодориевых областях”, Доклады НАН Армении, **2**, 109 – 118 (2009).
- [3] С. Н. Müntz, “Über den Approximationssatz von Weierstrass”, H. A. Schwarz Festschrift, Berlin, 303 – 312 (1914).
- [4] J. Korevaar, W. A. J. Luxemburg, “Entire functions and Müntz-Szasz type approximation”, Trans. of the American Math. Society, **157**, 23 – 37 (1971).

- [5] J. M. Anderson, "Müntz-Szasz type approximation and the angular growth of lacunary integral functions", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **169**, 237 – 248 (1972).
- [6] M. V. Keldysh, "Sur l'approximation en moyenne quadratique des fonctions analytiques", *Matem. Sbornik*, **5** (47), 391 – 401 (1939).
- [7] J. E. Brennan, "Approximation in the mean by polynomials in non-Caratheodory domains", *Ark. Math.*, **15** (1), 117 – 168 (1977).
- [8] С. Н. Мергелян, "Общий метрический критерий полноты системы многочленов", *Доклады АН СССР*, **105**, 901 – 904 (1955).
- [9] С. Н. Мергелян, А. Р. Тамадян, "О полноте в одном классе не-Жордановых областей", *Изв. АН Армянской ССР, Математика*, **7**, 1 – 17 (1954).
- [10] В. А. Мартиросян, "О равномерном комплексном приближении многочленами с пропусками", *Матем. Сборник*, **120** 451 – 472 (1983).
- [11] W. Luh, V. A. Martirosian, J. Müller, "Restricted T-universal functions", *Journal of Approxim. Theory*, **114**, 201 – 213 (2002).
- [12] L. Bieberbach, "Analytische Fortsetzung", *Ergenbisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (N.F.)*, Heft 3., Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1955).
- [13] А. И. Павлов, "О росте по кривым целых функций, заданных лакунарными степенными рядами", *Сибирский мат. журнал*, **13** (5), 1169 – 1181 (1972).
- [14] J. M. Anderson, K. G. Binmore, "Coefficient estimates for lacunary power series and Dirichlet series. I.", *Proc. London Math. Soc.* (3), **18** (1), 36 – 49 (1968).
- [15] A. J. Macintyre, "Asymptotic paths of integral functions with gap power series", *Proc. London Math. Soc.* (3), **2**, 286 – 296 (1952).
- [16] J. E. Brennan, "Invariant subspaces and weighted polynomial approximation", *Ark. Math.*, **11**, 167 – 189 (1973).
- [17] В. П. Хавин, В. Г. Мазья, "Аппроксимация в среднем аналитическими функциями", *Вестник Ленинград. унив.*, **13**, 64 – 74 (1968).
- [18] В. П. Хавин, В. Г. Мазья, "Не линейная теория потенциала", *Успехи Мат. Наук*, **27**, 67 – 138 (1972).
- [19] J. E. Brennan, "The Cauchy integral and certain of its applications", *Изв. НАН Армении, Математика*, **39** (1), 5 – 48 (2004).

Поступила 3 февраля 2009