

Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 3, 2010, стр. 47-56.

О $\{2, 3\}$ -СВЕРХТОЖДЕСТВАХ В ОБРАТИМЫХ $\{2, 3\}$ -АЛГЕБРАХ С ТЕРНАРНОЙ ГРУППОВОЙ ОПЕРАЦИЕЙ

Г. Э. ГУМАШЯН

Ереванский государственный университет

E-mail: hgumashyan@yahoo.com

Аннотация. В статье характеризуются обратимые $\{2, 3\}$ -алгебры с тернарной групповой операцией и с уравновешенными $\{2, 3\}$ -сверхтождествами первого рода длины 4.

MSC2000 number: 20N05, 20N10, 20N15, 03C05, 08A05

Ключевые слова: тернарная квазигруппа, тернарная группа, сверхтождество, обратимая алгебра.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть Q непустое множество, а Q^n – декартова степень множества Q . Отображение $A : Q^n \rightarrow Q$ называется n -арной операцией множества Q , а число n арностью операции A . Пара $Q(A)$, где A – n -арная операция, называется n -квазигруппой или n -арной квазигруппой ([1], [2]), если в равенстве $A(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_{n+1}$ всякие n элементов из $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ однозначно определяют $(n+1)$ -й. Иными словами, $Q(A)$ является n -квазигруппой, если уравнение

$$A(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) = b$$

однозначно разрешимо для любых $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, b \in Q$ и для любого $i = 1, 2, \dots, n$. В этом случае операция A называется квазигрупповой. В случае $n = 1$ операция A будет биекцией, при $n = 2$ n -квазигруппа $Q(A)$ называется бинарной или просто квазигруппой, а при $n = 3$ n -квазигруппа $Q(A)$ называется тернарной.

n -квазигруппа $Q(A)$ называется (i, j) -ассоциативной, если выполняется тождество:

$$\begin{aligned} A(x_1, \dots, x_{i-1}, A(x_i, \dots, x_{i+n-1}), x_{i+n}, \dots, x_{2n-1}) = \\ = A(x_1, \dots, x_{j-1}, A(x_j, \dots, x_{j+n-1}), x_{j+n}, \dots, x_{2n-1}). \end{aligned}$$

n -квазигруппа $Q(A)$ называется n -группой, если она (i, j) -ассоциативна для любых i, j . При $n = 2$ n -группа $Q(A)$ называется бинарной или просто группой, а при $n = 3$ n -группа $Q(A)$ называется тернарной.

Пусть A – квазигрупповая операция арности n и пусть $A(x_1, \dots, x_n) = y$. Заменяем m элементов $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_m}$ соответственно на фиксированные элементы $a_1, a_2, \dots, a_m \in Q$. Тогда $A(x_1, \dots, x_n)$ принимает вид

$$A(x_1, \dots, x_{k_1-1}, a_1, x_{k_1+1}, \dots, x_{k_2-1}, a_2, \dots),$$

т.е. получаем операцию $B(x_1, \dots, x_{k_1-1}, x_{k_1+1}, \dots, x_{k_2-1}, \dots, x_n)$ арности $n - m$. Очевидно, B – квазигрупповая операция, называемая ретрактом A .

Следующая формула второго порядка (см. [3]) называется сверхтождеством (см. [4],[5]):

$$\forall x_1, \dots, x_k \forall X_1, \dots, X_m (W_1 = W_2),$$

где $X_1, \dots, X_m$ – функциональные переменные, а $x_1, \dots, x_k$ – предметные переменные в словах (термах) W_1, W_2 . Число m называется рангом сверхтождества. Обычно, сверхтождества указываются без кванторной приставки: $W_1 = W_2$. Если ранг $m > 1$, то сверхтождество называется нетривиальным, а если $|X_1| = n_1, \dots, |X_m| = n_m$, то сверхтождество $W_1 = W_2$ называется $\{n_1, \dots, n_m\}$ -сверхтождеством. Выполнимость сверхтождества в алгебре понимается в соответствии с его кванторной приставкой (см. [4]). О характеристике сверхтождеств в классических многообразиях решеток см. [6],[7].

Сверхтождество называется уравновешенным, если каждая предметная переменная этого сверхтождества участвует в обеих частях равенства, причем только один раз. Уравновешенное сверхтождество называется первого рода, если предметные переменные в левой и правой частях равенства упорядочены одинаково. Количество предметных переменных в уравновешенном сверхтождестве называется длиной этого сверхтождества.

Классификация сверхтождеств ассоциативности и критерий их выполнимости в q -алгебрах и e -алгебрах содержатся в [4] – [6]. Аналогичные результаты для тернарных сверхтождеств ассоциативности в обратимых алгебрах (см. [4] и [2]). В настоящей статье исследуется критерий выполнимости уравновешенных $\{2, 3\}$ -сверхтождеств первого рода длины 4 в обратимых $\{2, 3\}$ -алгебрах с тернарной групповой операцией.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Алгебру $Q(\Sigma)$ с бинарными и тернарными операциями назовем $\{2, 3\}$ -алгеброй. $\{2, 3\}$ -алгебра нетривиальна, если множество ее бинарных и тернарных операций не одноэлементно. Алгебра $Q(\Sigma)$ называется обратимой, если $Q(A)$ – квазигруппа (некоторой арности) для любой операции $A \in \Sigma$.

Теорема 1.1 ([8]). *Если в обратимой нетривиальной $\{2, 3\}$ -алгебре выполняется $\{2, 3\}$ -сверхтождество, определенное равенством*

$$((x, y, z), u) = (x, (y, z, u)),$$

тогда каждая функциональная переменная повторяется хотя бы два раза. Следовательно, такое сверхтождество определяется единственным образом:

$$(1.1) \quad X(Y(x, y, z), u) = X(x, Y(y, z, u)).$$

Теорема 1.2 ([8]). *Если в обратимой нетривиальной $\{2, 3\}$ -алгебре выполняется $\{2, 3\}$ -сверхтождество, определенное равенством*

$$((x, y), u, v) = (x, (y, u), v),$$

тогда в нем каждая функциональная переменная повторяется хотя бы два раза. Следовательно, такое сверхтождество определяется единственным образом:

$$(1.2) \quad Y(X(x, y), u, v) = Y(x, X(y, u), v).$$

Теорема 1.3 ([8]). *Если в обратимой нетривиальной $\{2, 3\}$ -алгебре выполняется $\{2, 3\}$ -сверхтождество, определенное равенством*

$$((x, y), u, v) = (x, y, (u, v)),$$

тогда в нем каждая функциональная переменная повторяется хотя бы два раза. Следовательно, такое сверхтождество определяется единственным образом:

$$(1.3) \quad Y(X(x, y), u, v) = Y(x, y, X(u, v)).$$

Теорема 1.4 ([8]). *Если в обратимой нетривиальной $\{2, 3\}$ -алгебре выполняется $\{2, 3\}$ -сверхтождество, определенное равенством*

$$((x, y, z), u) = ((x, y), z, u),$$

тогда в нем каждая функциональная переменная повторяется хотя бы два раза. Следовательно, такое сверхтождество определяется единственным образом:

$$(1.4) \quad X(Y(x, y, z), u) = Y(X(x, y), z, u).$$

Теорема 1.5 ([8]). *Если в обратимой нетривиальной $\{2, 3\}$ -алгебре выполняется $\{2, 3\}$ -сверхтождество, определенное равенством*

$$((x, y, z), u) = (x, (y, z), u),$$

тогда в нем каждая функциональная переменная повторяется хотя бы два раза. Следовательно, такое сверхтождество определяется единственным образом:

$$(1.5) \quad X(Y(x, y, z), u) = Y(x, X(y, z), u).$$

Теорема 1.6 ([8]). Если в обратимой нетривиальной $\{2, 3\}$ -алгебре выполняется $\{2, 3\}$ -сверхтождество, определенное равенством

$$((x, y, z), u) = (x, y, (z, u)),$$

тогда в нем каждая функциональная переменная повторяется хотя бы два раза. Следовательно, такое сверхтождество определяется единственным образом:

$$(1.6) \quad X(Y(x, y, z), u) = Y(x, y, X(z, u)).$$

2. КРИТЕРИЙ ВЫПОЛНИМОСТИ СВЕРХТОЖДЕСТВ (1.1)-(1.6) В $\{2, 3\}$ -АЛГЕБРАХ С ТЕРНАРНОЙ ГРУППОВОЙ ОПЕРАЦИЕЙ

Основными результатами статьи являются нижеприведенные теоремы.

Теорема 2.1. Пусть в обратимой $\{2, 3\}$ -алгебре $Q(\Sigma)$ существует тернарная операция $A \in \Sigma$ такая, что $Q(A)$ – тернарная группа. Тогда в алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется сверхтождество (1.1) тогда и только тогда, когда каждая тернарная квазигрупповая операция $A_i \in \Sigma$ определяется по правилу:

$$A_i(x, y, z) = x \cdot \theta y \cdot c \cdot z \cdot t_i,$$

а каждая бинарная квазигрупповая операция $B_j \in \Sigma$ определяется по правилу:

$$B_j(x, y) = \alpha_j(x \cdot \theta y),$$

где $Q(\cdot)$ – группа, θ – ее автоморфизм, $t_i, c \in Q$, $\theta(c) = c$, $\theta(t_i) = t_i$, $\theta^2(x) = c \cdot x \cdot c^{-1}$, $t_i \in Z(Q)$ – центр группы $Q(\cdot)$, $\alpha_j : Q \rightarrow Q$ – биекция.

Доказательство. Достаточность устанавливается непосредственной проверкой:

$$X(Y(x, y, z), u) = \alpha_j(x \cdot \theta y \cdot c \cdot z \cdot t_i \cdot \theta u) = \alpha_j(x \cdot \theta(y \cdot \theta z \cdot c \cdot u \cdot t_i)) = X(x, Y(y, z, u)).$$

Докажем необходимость. Пусть в данной алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется сверхтождество (1.1). Согласно теореме Глускина-Хоссу [1], существует такая группа $Q(\cdot)$, что

$$A(x, y, z) = x \cdot \theta y \cdot c \cdot z,$$

где $Q(\cdot)$ – группа, θ – ее автоморфизм, $c \in Q$, $\theta c = c$, $\theta^2(x) = c \cdot x \cdot c^{-1}$, т.е. θ^2 – внутренний автоморфизм. Если в (1.1) положить $X = B_j$, $Y = A$, получим

$$B_j(x \cdot \theta y \cdot c \cdot z, u) = B_j(x, y \cdot \theta z \cdot c \cdot u).$$

Если здесь $z = e$ – единица группы $Q(\cdot)$ и $u = c^{-1}$, тогда

$$B_j(x, y) = B_j(x \cdot \theta y \cdot c, c^{-1}) = \alpha_j(x \cdot \theta y),$$

где $\lambda_j(x) = B_j(x \cdot c, c^{-1})$ и α_j – биекция.

Возвращаясь к равенству (1.1), при $X = B_j$, $Y = A_i$ получим

$$\alpha_j(A_i(x, y, z) \cdot \theta u) = \alpha_j(x \cdot \theta A_i(y, z, u))$$

или

$$A_i(x, y, z) \cdot \theta u = x \cdot \theta A_i(y, z, u)$$

и при $u = e$ имеем:

$$A_i(x, y, z) = x \cdot \theta A_i(y, z, e) = x \cdot \lambda_i(y, z),$$

где $\lambda_i : Q^2 \rightarrow Q$ – квазигрупповая операция, причем

$$\lambda_i(y, z) = \theta A_i(y, z, e).$$

Возвращаясь к равенству (1.1) теперь получим

$$x \cdot \lambda_i(y, z) \cdot \theta u = x \cdot \theta(y \cdot \lambda_i(z, u)),$$

откуда

$$\lambda_i(y, z) \cdot \theta u = \theta(y \cdot \lambda_i(z, u))$$

и при $u = e$, имеем

$$\lambda_i(y, z) = \theta y \cdot \theta(\lambda_i(z, e)) = \theta y \cdot \mu_i z,$$

где $\mu_i : Q \rightarrow Q$ – биекция, поскольку $\mu_i(z) = \theta(\lambda_i(z, e))$. Итак,

$$A_i(x, y, z) = x \cdot \lambda_i(y, z) = x \cdot \theta y \cdot \mu_i z.$$

Следовательно,

$$\theta y \cdot \mu_i z \cdot \theta u = \theta y \cdot \theta(\theta z \cdot \mu_i u) = \theta y \cdot \theta^2 z \cdot \theta(\mu_i u) = \theta y \cdot c \cdot z \cdot c^{-1} \cdot \theta(\mu_i u)$$

и при $u = e$, получаем

$$\mu_i z = c \cdot z \cdot c^{-1} \cdot \theta(\mu_i e) = c \cdot z \cdot t_i,$$

где $t_i = c^{-1} \cdot \theta(\mu_i e) \in Q$, т.е.

$$\lambda_i(y, z) = \theta y \cdot c \cdot z \cdot t_i,$$

$$A_i(x, y, z) = x \cdot \theta y \cdot c \cdot z \cdot t_i.$$

Теперь возвращаясь к равенству (1.1) получим

$$x \cdot \theta y \cdot c \cdot z \cdot t_i \cdot \theta u = x \cdot \theta (y \cdot \theta z \cdot c \cdot u \cdot t_i) = x \cdot \theta y \cdot \theta^2 z \cdot \theta c \cdot \theta u \cdot \theta t_i = x \cdot \theta y \cdot c \cdot z \cdot c^{-1} \cdot \theta u \cdot \theta t_i,$$

т.е.

$$t_i \cdot \theta u = \theta u \cdot \theta t_i.$$

Отсюда, при $u = e$ получим $t_i = \theta t_i$. Следовательно, $t_i \cdot \theta u = \theta u \cdot t_i$, т.е. $t_i \in Z(Q)$ – центр группы $Q(\cdot)$. $\square$

Теорема 2.2. Пусть в обратимой $\{2, 3\}$ -алгебре $Q(\Sigma)$ существует тернарная операция $A \in \Sigma$ такая, что $Q(A)$ – тернарная группа. Тогда в алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется сверхтождество (1.2) тогда и только тогда, когда существует бинарная группа $Q(\cdot)$ такая, что каждая бинарная квазигрупповая операция $B_j \in \Sigma$ определяется по правилу:

$$B_j(x, y) = x \cdot t_j \cdot y,$$

где $t_j \in Q$, $t_j = t \cdot z_j$, $z_j \in Z(Q)$ – центр группы $Q(\cdot)$, t – фиксированный элемент множества Q , а каждая тернарная квазигрупповая операция $A_i \in \Sigma$ определяется по правилу:

$$A_i(x, y, z) = \lambda_i(t^{-1} \cdot x \cdot t \cdot y, z),$$

где $\lambda_i : Q^2 \rightarrow Q$ – бинарные квазигрупповые операции.

Доказательство. Достаточность устанавливается непосредственным вычислением левой и правой частей равенства (1.2):

$$Y(X(x, y), u, v) = \lambda_i(t^{-1} \cdot X(x, y) \cdot t \cdot u, v) = \lambda_i(t^{-1} \cdot x \cdot t_j \cdot y \cdot t \cdot u, v),$$

$$Y(x, X(y, u), v) = \lambda_i(t^{-1} \cdot x \cdot t \cdot X(y, u), v) = \lambda_i(t^{-1} \cdot x \cdot t \cdot y \cdot t_j \cdot u, v),$$

Докажем необходимость. Пусть в данной алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется сверхтождество (1.2). По теореме Глускина-Хоссу, существует такая группа $Q(\cdot)$, что

$$A(x, y, z) = x \cdot \theta y \cdot c \cdot z,$$

где $Q(\cdot)$ – группа, θ – ее автоморфизм, $c \in Q$, $\theta c = c$, $\theta^2(x) = c \cdot x \cdot c^{-1}$. Если в (1.2) положить $X = B_j$, $Y = A$, тогда получим:

$$B_j(x \cdot y) \cdot \theta u \cdot c \cdot v = x \cdot \theta B_j(y, u) \cdot c \cdot v.$$

Откуда, при $u = e$ – единица группы $Q(\cdot)$, имеем:

$$B_j(x, y) = x \cdot \theta B_j(y, e) = x \cdot \alpha_j(y),$$

где $\lambda_j(y) = \theta B_j(y, e)$. Поэтому, получаем

$$x \cdot \alpha_j(y) \cdot \theta u = x \cdot \theta (y \cdot \alpha_j(u)) = x \cdot \theta y \cdot \theta (\alpha_j(u)).$$

Если здесь $u = e$, тогда

$$\alpha_j(y) = \theta y \cdot \theta(\alpha_j(e)) = \theta y \cdot t_j,$$

где $t_i = \theta(\alpha_j e)$. Следовательно,

$$B_j(x, y) = x \cdot \alpha_j(y) = x \cdot \theta y \cdot t_j.$$

Из равенства (1.2) теперь следует

$$\theta y \cdot t_j \cdot \theta u = \theta y \cdot \theta(\theta u \cdot t_j) = \theta y \cdot \theta^2 u \cdot \theta t_j,$$

а при $u = e$ имеем $t_j = \theta t_j$. Итак,

$$t_j \cdot \theta u = \theta^2 u \cdot t_j,$$

т.е.

$$\theta^2 u = t_j \cdot \theta u \cdot t_j^{-1}.$$

Откуда, при $x = \theta u$ имеем $\theta x = t_j \cdot x \cdot t_j^{-1} = t_i \cdot x \cdot t_i^{-1}$ и $t_i^{-1} \cdot t_j \cdot x = x \cdot t_i^{-1} \cdot t_j$, т.е. $t_i^{-1} \cdot t_j \in Z(Q)$ – центр группы $Q(\cdot)$. При фиксированном значении $t_i = t \in Q$ получим $t^{-1} \cdot t_j = z_j \in Z(Q)$, т.е. $t_j = t \cdot z_j$, где $z_j \in Z(Q)$. Таким образом,

$$B_j(x, y) = x \cdot \theta y \cdot t_j = x \cdot t_j \cdot y \cdot t_j^{-1} \cdot t_j = x \cdot t_j \cdot y = x \cdot t \cdot z_j \cdot y.$$

Теперь с учетом равенства (1.2) получаем

$$A_i(x \cdot t_j \cdot y, u, v) = A_i(x, y \cdot t_j \cdot u, v),$$

а при $x = e$ имеем:

$$A_i(t_j \cdot y, u, v) = A_i(e, y \cdot t_j \cdot u, v).$$

Откуда, при $y = t_j^{-1} \cdot x$ имеем:

$$A_i(x, u, v) = A_i(e, t_j^{-1} \cdot x \cdot t_j \cdot u, v) = \lambda_i(t_j^{-1} \cdot x \cdot t_j \cdot u, v) = \lambda_i(t^{-1} \cdot x \cdot t \cdot u, v),$$

где $\lambda_i(x, y) = A_i(e, x, y)$. □

Теорема 2.3. Пусть в обратимой $\{2, 3\}$ -алгебре $Q(\Sigma)$ существует тернарная операция $A \in \Sigma$ такая, что $Q(A)$ – тернарная группа. Тогда в алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется сверттождество (1.3) тогда и только тогда, когда существует бинарная группа $Q(\cdot)$ такая, что каждая бинарная квазигрупповая операция $B_j \in \Sigma$ определяется по правилу

$$B_j(x, y) = x \cdot t_j \cdot y,$$

где $t_j \in Q$, $t_j = t \cdot z_j$, $z_j \in Z(Q)$ – центр группы $Q(\cdot)$, t – фиксированный элемент множества Q , а каждая тернарная квазигрупповая операция $A_i \in \Sigma$ определяется по правилу

$$A_i(x, y, z) = \varphi_i(t^{-2} \cdot x \cdot t \cdot y \cdot t \cdot z),$$

где $\varphi_i : Q \rightarrow Q$ – биекции.

Доказательство. Достаточность устанавливается непосредственной проверкой:

$$\begin{aligned} Y(X(x, y), u, v) &= \varphi_i(t^{-2} \cdot X(x, y) \cdot t \cdot u \cdot t \cdot v) = \varphi_i(t^{-2} \cdot x \cdot t_j \cdot y \cdot t \cdot u \cdot t \cdot v), \\ Y(x, y, X(u, v)) &= \varphi_i(t^{-2} \cdot x \cdot t \cdot y \cdot t \cdot X(u, v)) = \varphi_i(t^{-2} \cdot x \cdot t \cdot y \cdot t \cdot u \cdot t_j \cdot v). \end{aligned}$$

Докажем необходимость. Пусть в данной алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется сверхтождество (1.3). По теореме Глускина-Хоссу имеем

$$A(x, y, z) = x \cdot \theta y \cdot c \cdot z,$$

где $Q(\cdot)$ – группа, θ – ее автоморфизм, $c \in Q$, $\theta^2(x) = c \cdot x \cdot c^{-1}$. Пусть в равенстве (1.3) $X = B_j$, $Y = A$, тогда

$$B_j(x \cdot y) \cdot \theta u \cdot c \cdot v = x \cdot \theta y \cdot c \cdot B_j(u, v),$$

а при $u = e$ и $v = c^{-1}$ получим

$$B_j(x, y) = x \cdot \theta y \cdot c \cdot B_j(e, c^{-1}) = x \cdot \theta y \cdot t_j,$$

где $t_j = c \cdot B_j(e, c^{-1}) \in Q$. Следовательно,

$$x \cdot \theta y \cdot t_j \cdot \theta u \cdot c \cdot v = x \cdot \theta y \cdot c \cdot u \cdot \theta v \cdot t_j,$$

т.е.

$$t_j \cdot \theta u \cdot c \cdot v = c \cdot u \cdot \theta v \cdot t_j,$$

а при $u = e$

$$t_j \cdot c \cdot v = c \cdot \theta v \cdot t_j.$$

Откуда, при $v = e$ имеем $t_j \cdot c = c \cdot t_j$ или $c^{-1} \cdot t_j \cdot c = t_j$ и

$$\theta v = c^{-1} \cdot t_j \cdot c \cdot v \cdot t_j^{-1} = t_j \cdot v \cdot t_j^{-1} = t_i \cdot v \cdot t_i^{-1}.$$

Поэтому $t_i^{-1} \cdot t_j = z_{i,j} \in Z(Q)$ – центр группы $Q(\cdot)$, а при фиксированном значении $t_i = t \in Q$ получим $t_j = t \cdot z_j$, где $z_j \in Z(Q)$. Итак,

$$B_j(x, y) = x \cdot \theta y \cdot t_j = x \cdot t_j \cdot y \cdot t_j^{-1} \cdot t_j = x \cdot t_j \cdot y.$$

Далее, согласно равенству (1.2)

$$A_i(x \cdot t_j \cdot y, u, v) = A_i(x, y, u \cdot t_j \cdot v),$$

а при $x = e$ имеем

$$A_i(t_j \cdot y, u, v) = A_i(e, y, u \cdot t_j \cdot v).$$

Если здесь положить $y = t_j^{-1} \cdot x$ получим

$$A_i(x, u, v) = A_i(e, t_j^{-1} \cdot x, u \cdot t_j \cdot v) = \mu_i(t_j^{-1} \cdot x, u \cdot t_j \cdot v) = \mu_i(t^{-1} \cdot x, u \cdot t \cdot v),$$

где $\mu_i(x, y) = A_i(e, x, y)$. Следовательно,

$$\mu_i(t^{-1}B_j(x, y), u \cdot t \cdot v) = \mu_i(t^{-1} \cdot x, y \cdot t \cdot B_j(u, v)),$$

$$\mu_i(t^{-1} \cdot x \cdot t_j \cdot y, u \cdot t \cdot v) = \mu_i(t^{-1} \cdot x, y \cdot t \cdot u \cdot t_j \cdot v),$$

т.е.

$$\mu_i(x \cdot t_j \cdot y, u \cdot t \cdot v) = \mu_i(x, y \cdot t \cdot u \cdot t_j \cdot v),$$

а при $x = e, y = t_j^{-1} \cdot w$ получим:

$$\mu_i(w, u \cdot t \cdot v) = \mu_i(e, t_j^{-1} \cdot w \cdot t \cdot u \cdot t_j \cdot v).$$

Пусть $v = e$, тогда

$$\mu_i(w, u \cdot t) = \mu_i(e, t_j^{-1} \cdot w \cdot t \cdot u \cdot t_j),$$

т.е.

$$\begin{aligned} \mu_i(w, u) &= \mu_i(e, t_j^{-1} \cdot w \cdot t \cdot u \cdot t^{-1} \cdot t_j) = \varphi_i(t_j^{-1} \cdot w \cdot t \cdot u \cdot t^{-1} \cdot t_j) = \\ &= \varphi_i(t^{-1} \cdot w \cdot t \cdot u), \end{aligned}$$

где $\varphi_i(x) = \mu_i(e, x)$. Таким образом

$$\begin{aligned} A_i(x, u, v) &= \mu_i(t^{-1} \cdot x, u \cdot t \cdot v) = \varphi_i(t^{-1} \cdot t^{-1} \cdot x \cdot t \cdot u \cdot t \cdot v) = \\ &= \varphi_i(t^{-2} \cdot x \cdot t \cdot u \cdot t \cdot v). \end{aligned}$$

□

Аналогично доказываются следующие результаты.

Теорема 2.4. Пусть в обратимой $\{2, 3\}$ -алгебре $Q(\Sigma)$ существует тернарная операция $A \in \Sigma$ такая, что $Q(A)$ – тернарная группа. Тогда в алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется сверттождество (1.4) тогда и только тогда, когда каждая бинарная квазигрупповая операция $B_j \in \Sigma$ определяется по правилу

$$B_j(x, y) = t_j \cdot \theta x \cdot c \cdot u,$$

а каждая тернарная квазигрупповая операция $A_i \in \Sigma$ определяется по правилу

$$A_i(x, y, z) = \ell_i \cdot x \cdot \theta y \cdot c \cdot z,$$

где $Q(\cdot)$ – группа, θ – ее автоморфизм, $c, \ell_i, t_j \in Q$, $\theta c = c$, $\theta^2 x = c \cdot x \cdot c^{-1}$, $t_j \cdot \theta \ell_i = \ell_i \cdot t_j$.

Теорема 2.5. Пусть в обратимой $\{2, 3\}$ -алгебре $Q(\Sigma)$ существует тернарная операция $A \in \Sigma$ такая, что $Q(A)$ – тернарная группа. Тогда в алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется сверхтождество (1.5) тогда и только тогда, когда каждая бинарная квазигрупповая операция $B_j \in \Sigma$ определяется по правилу

$$B_j(x, y) = x \cdot t_j \cdot y,$$

а каждая тернарная квазигрупповая операция $A_i \in \Sigma$ определяется по правилу

$$A_i(x, y, z) = q_i(x) \cdot y \cdot t \cdot z,$$

где $Q(\cdot)$ – группа, $t_j, t \in Q$, $t_j = t \cdot z_j$, причем $z_j \in Z(Q)$ – центр группы $Q(\cdot)$, t – фиксированный элемент множества Q , а $q_i : Q \rightarrow Q$ – биекция.

Теорема 2.6. Пусть в обратимой $\{2, 3\}$ -алгебре $Q(\Sigma)$ существует тернарная операция $A \in \Sigma$ такая, что $Q(A)$ – тернарная группа. Тогда в алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется сверхтождество (1.6) тогда и только тогда, когда каждая тернарная квазигрупповая операция $A_i \in \Sigma$ определяется по правилу

$$A_i(x, y, z) = \mu_i(x, y) \cdot u,$$

а каждая бинарная квазигрупповая операция $B_j \in \Sigma$ определяется по правилу:

$$B_j(x, y) = x \cdot \varphi_j(y),$$

где $Q(\cdot)$ – группа, $\mu_i : Q^2 \rightarrow Q$ – бинарная квазигрупповая операция, а $\varphi_j : Q \rightarrow Q$ – биекция.

Abstract. The paper gives a characterization of invertible $\{2, 3\}$ -algebras with a ternary group operation and balanced $\{2, 3\}$ -hyperidentities of the first genus and of the length 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В.Д. Белоусов, n -арные квазигруппы, Кишинев, “Штиинца” (1972).
- [2] J. Usan, “ n -groups in the light of the neutral operations”, Electronic version (2006).
- [3] А. И. Мальцев, Алгебраические Системы, М., Наука (1970).
- [4] Ю. М. Мовсисян, Введение в Теорию Алгебр со Сверхтождествами, Изд-во ЕГУ (1986).
- [5] Ю. М. Мовсисян, Сверхтождества и Сверхмногообразия в Алгебрах, Изд-во ЕГУ (1990).
- [6] Ю. М. Мовсисян, “Сверхтождества в алгебрах и многообразиях”, Успехи Мат. Наук, **53**, 1(319), 61 – 114 (1998).
- [7] Yu. M. Movsisyan, “Binary Representation of Algebras with At Most Two Binary Operations. A Cayley theorem for Distributive Lattices”, International Journal of Algebra and Computation, **18**(1), 97 – 106 (2009).
- [8] Г. Э. Гумашян, “Об обратимых $\{2, 3\}$ -алгебрах”, Ученые Записки ЕГУ, **1**, 141 – 142 (2008).

Поступила 27 марта 2009