Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 3, 2010, стр. 25-34.

СОПРЯЖЁННЫЕ ГОЛОМОРФНЫХ ПРОСТРАНСТВ БЕСОВА НА ПОЛИДИСКАХ И ДИАГОНАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

А. В. АРУТЮНЯН, В. ЛУСКИ

Ереванский государственный университет, Университет Падерборна
E-mails: *anahit@ysu.am, lusky@uni-paderborn.de*

Аннотация. Пусть U^n – единичный полидиск в C^n, а S – пространство функций регулярной вариации. Пусть $1 \le p < \infty$, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, $\omega_j \in S (1 \le j \le n)$ и $f \in H(U^n)$. Функция f принадлежит голоморфному пространству Бесова $B_p(\omega)$, если

$$\|f\|^p_{B_p(\omega)} = \int_{U^n} |Df(z)|^p \prod_{j=1}^{n} \frac{\omega_j(1-|z_j|)}{(1-|z_j|^2)^{2-p}} dm_{2n}(z) < +\infty$$

где $dm_{2n}(z)$ – $2n$-мерная мера Лебега на U^n, а D означает дробное дифференцирование функции f. Работа дает полное описание дуальных пространств $(B_p(\omega))^*$. Полностью решена также задача диагонального отображения.

MSC2000 number: 32C37, 47B38, 47B06, 46T25, 46E15

Ключевые слова: весовые пространства Бесова, полидиск, проекция, диагональное отображение.

1. Введение

Много авторов внесли свой вклад в теорию голоморфного пространства Бесова для единичного круга в C и для единичного шара в C^n, см. К. Жу [9], К. Строетоф [8], Арази-Фишер-Петре [1], О. Бласко [2]. В работе [5] введены обобщенные ω-весовые голоморфные пространства Бесова на единичном полидиске. В настоящей работе мы продолжаем исследование этих пространств. В этом параграфе мы вводим весовые пространства Бесова, весовые пространства Блоха и соответствующие понятия для широкого класса весов, а также формулируем вспомогательные результаты. В §2 мы даем точные описания сопряженных пространств к этим пространствам. Последний параграф нашей статьи посвящен диагональным отображениям на ω-весовых голоморфных пространствах Бесова. Пусть $U^n = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in C^n, \ |z_j| < 1, \ 1 \le j \le n\}$ – единичный полидиск в n-мерном комплексном пространстве C^n, а $T^n = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in C^n, \ |z_i| = 1, \ 1 \le i \le n\}$ – его тор.

Далее, пусть S – класс всех неотрицательных измеримых функций ω на $(0,1)$ таких, что существуют измеримая ограниченная функция $\epsilon(u)$ на $(0,1)$ и действительное число η такие,что

$$w(x) = \exp\left(\eta + \int_x^1 \frac{\epsilon(u)}{u} du\right).$$

Предположим, что существуют постоянные $\beta_\omega < 0$ и α_ω такие, что

$$-\alpha_\omega \le \epsilon(u) \le \beta_\omega \qquad \text{для всех} \quad u \in (0,1).$$

Элементы S называются *функциями регулярной вариации* (см. [7]).

Пример 1. *(i)* $\omega(x) = x^\gamma$ *для некоторого* $\gamma > 0$. *Здесь* $\epsilon(u) = -\gamma$ *и* $\eta = 0$

$$(ii) \quad \omega(x) = \begin{cases} -\log(1-x), & 0 < x \le 1 - 1/e \\ x, & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь

$$\epsilon(u) = \begin{cases} \frac{u}{(1-u)\log(1-u)}, & 0 < u \le 1 - 1/e \\ -1, & \textit{в противном случае,} \end{cases}$$

и $\eta = 0$.

(iii) $\omega(x) = \sin x$. *Здесь*

$$\epsilon(u) = -\frac{u}{\sin u}\cos u \quad \textit{и} \quad \eta = \log\sin 1.$$

Пусть $\omega(t) = (\omega_1(t), \dots, \omega_n(t))$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Всюду в статье мы предполагаем, что $\omega_j \in S$, $1 \le j \le n$. Далее, для $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n)$, $z = (z_1, ..., z_n)$ мы используем следующий мультииндексные обозначения:

$$\omega(1-|z|) = \prod_{j=1}^n \omega_j(1-|z_j|),$$

$$(1-|z|)^\alpha = \prod_{j=1}^n (1-|z_j|)^{\alpha_j}, \quad (1-\overline{\zeta}z)^\alpha = \prod_{j=1}^n (1-\overline{\zeta}_j z_j)^{\alpha_j}, \quad z^k = z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n}.$$

Кроме того, для любых функций f и g обозначение $f \preceq g$ ($f \succeq g$) означает, что $|f(z)| \le C|g(z)|$ ($|g(z)| \le C|f(z)|$), а обозначение $f \asymp g$ означает, что $C_1|f(z)| \le |g(z)| \le C_2|f(z)|$ для некоторых положительных постоянных C, C_1, C_2, независящих от z.

Определение 1. *Пусть* $1 \le p < \infty$. *Обозначим через* $L_p(\omega)$ *множество всех измеримых функций на* U^n, *для которых*

$$\|f\|^p_{L_p(\omega)} = \int_{U^n} |f(z)|^p \frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|^2)^2} dm_{2n}(z) < +\infty.$$

Следующее определение поясняет понятие дробного дифференцирования.

Определение 2. *Для голоморфной функции* $f(z)=\sum\limits_{(k)=(0)}^{(\infty)} a_k z^k, \quad z\in U^n$, *и для* $\beta=(\beta_1,...,\beta_n),\ \beta_j>-1,\ 1\le j\le n,$

(i) определим дробное дифференцирование D^β *следующим образом:*

$$D^\beta f(z)=\sum_{(k)=(0)}^{(\infty)}\prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma(\beta_j+1+k_j)}{\Gamma(\beta_j+1)\Gamma(k_j+1)}a_k z^k,\ \ k=(k_1,...,k_n),\quad z\in U^n,$$

где $\Gamma(.)$ *– Гамма функция, а* $\sum\limits_{(k)=(0)}^{(\infty)}=\sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\dots\sum\limits_{k_n=0}^{\infty}$.

(ii) Пусть $D^{-\beta}$ *– обратный оператор:* $D^{-\beta}D^\beta f(z)=f(z)$, $z\in U^n$.

В частности, если $\beta_j\in N,\ 1\le j\le n$, то

$$D^\beta f(z)=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(\beta_j+1)}\frac{\partial^{\beta_1+\ldots+\beta_n}(f(z)z^\beta)}{\partial z_1^{\beta_1}...\partial z_n^{\beta_n}}.$$

Положим $Df(z)=D^\beta f(z)$, если $\beta=(1,\dots,1)$.
Пусть $H(U^n)$ – пространство голоморфных функций на U^n. Определим теперь голоморфные пространства Бесова на полидиске (см. [5]).

Определение 3. *Пусть* $1\le p<\infty$ *и* $f\in H(U^n)$. *Будем говорить, что функция* f *принадлежит* $B_p(\omega)$, *если*

$$\|f\|^p_{B_p(\omega)}=\int_{U^n}|Df(z)|^p\frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|^2)^{2-p}}dm_{2n}(z)<+\infty$$

Согласно определению D, выражение $||\cdot||_{B_p(\omega)}$ является нормой, а $B_p(\omega)$ – банахово пространство относительно $\|\cdot\|_{B_p(\omega)}$.
Чтобы описать сопряженные пространства в случае $p=1$, нам необходимо определение ω-весового пространства Блоха [4].

Определение 4. *Функция* $f\in H(U^n)$ *принадлежит пространству Блоха* B_ω, *если*

$$||f||_{B_\omega}=\sup_{z\in U^n}\left\{\frac{(1-|z|^2)}{\omega(1-|z|^2)}|Df(z)|\right\}<+\infty.$$

Определение 4 можно считать как определение пространства Бесова $B_p(\omega)$ в случае $p=\infty$ (т.е. $B_\infty(\omega)=B_\omega$).
Пусть $1\le p<\infty$, $f\in B_p(\omega)$ и $(Tf)(z)=(1-|z|^2)Df(z)$. Из определений 1 и 3 легко следует, что T является изоморфизмом из $B_p(\omega)$ в некоторое подпространство пространства $L_p(\omega)$. Это наблюдение может быть обобщено следующим образом:

Теорема 1. *Пусть* $f \in H(U^n)$, $\beta_j > 1$, $1 \le j \le n$. *Тогда* $f \in B_p(\omega)$ *тогда и только тогда, когда* $g \in L_p(\omega)$, *где* $g(z) = (1-|z|^2)^\beta D^\beta f(z)$, $z \in U^n$. *Кроме того,* $\|f\|_{B_p(\omega)} \asymp \|g\|_{L^p(\omega)}$.

Для доказательства см. [5] (Теорема 3). Мы воспользуемся теоремой 1 в §3. Доказательства основных теорем §2 опираются на следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть* $n = 1$, $\omega \in S$, $a + 1 - \beta_\omega > 0$, $b > 1$ *и* $b - a - 2 > \alpha_\omega$. *Тогда*

$$\int_U \frac{(1-|\zeta|^2)^a \omega(1-|\zeta|^2)}{|1-z\bar{\zeta}|^b} dm_2(\zeta) \le \frac{\omega(1-|z|^2)}{(1-|z|^2)^{b-a-2}}$$

Доказательство см. в [4] (лемма 1.6).

2. Дуальные пространства к пространствам $B_p(\omega)$

В этом параграфе мы опишем дуальные пространства к пространству $B_p(\omega)$. Сперва докажем две леммы.

Лемма 2. *Пусть* $1 < q < +\infty$ *и* $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $\gamma_j > p + \alpha_{\omega_j} - 2$ $(1 \le j \le n)$. *Для* $h \in L_q(\omega)$ *положим*

$$h_1(z) = \int_{U^n} \frac{h(\zeta)\omega(1-|\zeta|)}{(1-\bar{\zeta}z)^{\gamma+2}(1-|\zeta|^2)} dm_{2n}(\zeta).$$

Тогда $h_1 \in B_q(\omega^*)$ *и* $\|h_1\|_{B_q(\omega^*)} \preceq \|h\|_{B_q(\omega)}$, *где* $\omega_j^*(t) = t^{(\gamma_j+1)q}\omega_j^{-q/p}(t)$ $(1 \le j \le n)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Доказательство. В силу неравенства Гёлдера, леммы 1 (с $a = -1$) и факта, что $\omega(1-|z|) \asymp \omega(1-|z|^2)$, получим

$$|Dh_1(z)|^q \le \int_{U^n} \frac{|h(\zeta)|^q \omega(1-|\zeta|)}{|1-\bar{\zeta}z|^{\gamma+3}(1-|\zeta|^2)} dm_{2n}(\zeta) \times \frac{\omega^{q/p}(1-|z|)}{(1-|z|^2)^{(\gamma+2)q/p}}.$$

Следовательно,

$$\|h_1\|^q_{B_q(\omega^*)} = \int_{U^n} |Dh_1(z)|^q (1-|z|^2)^{q(\gamma+2)-2} \omega^{-q/p}(1-|z|) dm_{2n}(z) \le$$

$$\int_{U^n} \frac{\omega(1-|\zeta|)}{(1-|\zeta|^2)} |h(\zeta)|^q \int_{U^n} \frac{(1-|z|^2)^{q(\gamma+2)-2-(\gamma+2)q/p}}{|1-\bar{z}\zeta|^{\gamma+3}} dm_{2n}(z) dm_{2n}(\zeta) \preceq$$

$$\int_{U^n} \frac{\omega(1-|\zeta|)}{(1-|\zeta|^2)^2} |h(\zeta)|^q dm_{2n}(\zeta) = \|h\|_{L_q(\omega)} < \infty$$

Итак имеем $\|h_1\|_{B_q(\omega^*)} \preceq \|h\|_{B_q(\omega)}$, что доказывает наше утверждение. □

Лемма 3. *Пусть* $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $\gamma_j > \alpha_{\omega_j} - 2$ $(1 \le j \le n)$. *Для* $h \in L^\infty(U^n)$ *положим*

$$h_1(z) = \int_{U^n} \frac{h(\zeta)\omega(1-|\zeta|)}{(1-\bar{\zeta}z)^{\gamma+2}(1-|\zeta|^2)} dm_{2n}(\zeta).$$

Тогда $h_1 \in B_{\omega^*}$ *и* $\|h_1\|_{B_{\omega^*}} \preceq \|h\|_{L^\infty}$, *где* $\omega_j^*(t) = t^{-\gamma_j-1}\omega_j(t)$, $1 \le j \le n$.

Доказательство. Используя лемму 1, получаем

$$|Dh_1(z)| \leq \int_{U^n} \frac{|h(\zeta)|\omega(1-|\zeta|)}{|1-\overline{\zeta}z|^{\gamma+3}(1-|\zeta|^2)} dm_{2n}(zeta) \leq \|h\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|)^{\gamma+2}}.$$

Тогда, из определения 4 следует $\|h_1\|_{B_{\omega^*}} \preceq \|h\|_\infty$. □

Теперь мы можем доказать теоремы, описывающие пространства $(B_p(\omega))^*$.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_j > \alpha_{\omega_j} + p - 2$, $1 \leq j \leq n$. *Тогда дуальное пространство к пространству* $B_p(\omega)$ *относительно образования пар*

$$< f, g >= \int_{U^n} Df(\zeta)\overline{Dg(\zeta)}(1-|\zeta|^2)^\alpha dm_{2n}(\zeta) \tag{2.1}$$

изоморфно пространству $B_q(\widetilde{\omega})$, *где* $1/p + 1/q = 1$ *и* $\widetilde{\omega}_j(t) = t^{\alpha_j q}\omega_j^{-q/p}(t)$ $(1 \leq j \leq n)$.

Доказательство. Пусть $\Phi \in (B_p(\omega))^*$. Согласно замечанию после определения 4, мы можем рассматривать $B_p(\omega)$ как подпространство пространства $L_p(\omega)$. Тогда, по теореме Хана-Банаха, мы можем предположить, что $\Phi \in L_p(\omega)^*$ и существует $h \in L_q(\omega),\ 1/p + 1/q = 1$ такое, что

$$\Phi(F) = \int_{U^n} F(\zeta)\overline{h(\zeta)} \frac{\omega(1-|\zeta|)}{(1-|\zeta|^2)^2} dm_{2n}(\zeta),\ \|\Phi\| = \|h\|_{L_q(\omega)}.$$

В частности, если $F(z) = (1-|z|^2)Df(z),\ f \in B_p(\omega)$, то имеем

$$\Phi(F) = \int_{U^n} Df(\zeta)\overline{h(\zeta)} \frac{\omega(1-|\zeta|)}{(1-|\zeta|^2)} dm_{2n}(\zeta).$$

Используя результаты работы [3], получаем

$$Df(z) = C(\alpha) \int_{U^n} \frac{(1-|v|^2)^\alpha}{(1-\overline{v}z)^{\alpha+2}} Df(v) dm_{2n}(v)$$

для некоторой постоянной $C(\alpha)$, независящей от f.

Следовательно,

$$\Phi(F) = \int_{U^n} (1-|v|^2)^\alpha Df(v) \times \tag{2.2}$$

$$\times \int_{U^n} C(\alpha) \frac{\omega(1-|\zeta|)}{(1-\overline{\zeta}v)^{\alpha+2}} \frac{\overline{h(\zeta)} dm_{2n}(v)}{(1-|\zeta|^2)} dm_{2n}(\zeta) dm_{2n}(v).$$

Пусть h_1 – внутренный интеграл в (2.2). По лемме 2, h_1 является элементом пространства $B_q(\omega^*)$, где $\omega_j^*(t) = t^{(\alpha_j+1)q}\omega_j^{-q/p}(t)$ $(1 \leq j \leq n)$ и $\|h_1\|_{B_q(\omega^*)} \preceq \|h\|_{L_q(\omega)}$.

Пусть $Dg(z) = h_1(z)$. Тогда легко проверить, что $g \in B_q(\widetilde{\omega})$ и $\|g\|_{B_q(\widetilde{\omega})} \asymp \|h_1\|_{B_q(\omega^*)}$, где $\widetilde{\omega}_j(t) = t^{\alpha_j q}\omega_j^{-q/p}(t)$ $(1 \leq j \leq n)$. Итак имеем

$$\Phi(F) = \int_{U^n} Df(\zeta)\overline{Dg(\zeta)}(1-|\zeta|^2)^\alpha dm_{2n}(\zeta),\ \text{and}\ \|g\|_{B_q(\widetilde{\omega})} \preceq \|\Phi\|,$$

что доказывает первую часть теоремы 2.
Далее предположим, что $g \in B_q(\widetilde{\omega})$. Тогда любой функционал Φ вида (2.1) ограничен на $B_p(\omega)$. Для этого воспользуемся неравенством Гёлдера

$$|\Phi(f)| \leq \left(\int_{U^n} |Df(\zeta)|^p \frac{\omega(1-|\zeta|)}{1-|\zeta|^2)^{2-p}} dm_{2n}(\zeta)\right)^{1/p} \times$$

$$\left(\int_{U^n} |Dg(\zeta)|^q \frac{(1-|\zeta|^2)^{\alpha q+q-2}}{\omega^{q/p}(1-|\zeta|)} dm_{2n}(\zeta)\right)^{1/q} = \|f\|_{B_p(\omega)} \|g\|_{B_q(\widetilde{\omega})}.$$

Следовательно $\|\Phi\| \preceq \|g\|_{B_q(\widetilde{\omega})}$. □

Перейдем к случаю $p = 1$.

Теорема 3. *Пусть $\alpha_j > \alpha_{\omega_j} - 1$ $(1 \leq j \leq n)$. Тогда дуальное пространство к пространству $B_1(\omega)$ относительно образования пар*

$$< f, g >= \int_{U^n} Df(\zeta)\overline{Dg(\zeta)}(1-|\zeta|^2)^\alpha dm_{2n}(\zeta)$$

изоморфно пространству $B_{\widetilde{\omega}}$, где $\widetilde{\omega}_j(t) = \omega_j(t)t^{1-\alpha_j}$ $(1 \leq j \leq n)$.

Доказательство. Пусть Φ – произвольный ограниченный, линейный функционал на $B_1(\omega)$. Как и раньше, мы можем рассматривать $B_1(\omega)$ как подпространство пространства $L_1(\omega)$. В силу теоремы Хана-Банаха, Φ можно рассматривать как элемент $L_1(\omega)^*$. Поэтому существует $h \in L_\infty(U^n)$ такая, что

$$\Phi(F) = \int_{U^n} F(\zeta)\overline{h(\zeta)} \frac{\omega(1-|\zeta|)}{(1-|\zeta|^2)^2} dm_{2n}(\zeta) \quad \text{и} \quad \|\Phi\| = \|h\|_{L_\infty(\omega)}.$$

В частности, для $F(z) = (1-|z|^2)Df(z),\ f \in B_1(\omega)$ получаем

$$\Phi(F) = \int_{U^n} Df(\zeta)\overline{h(\zeta)} \frac{\omega(1-|\zeta|)}{(1-|\zeta|^2)} dm_{2n}(\zeta).$$

Согласно [3], существует постоянная $C(\alpha)$ такая, что

$$Df(z) = C(\alpha) \int_{U^n} \frac{(1-|v|^2)^\alpha}{(1-\overline{v}z)^{\alpha+2}} Df(v) dm_{2n}(v).$$

Поэтому

$$\Phi(F) = \int_{U^n} (1-|v|^2)^\alpha Df(v) \int_{U^n} C(\alpha \frac{\omega(1-|\zeta|)}{(1-\bar{\zeta}v)^{\alpha+2}} \frac{\overline{h(\zeta)} dm_{2n}(v)}{(1-|\zeta|^2)} dm_{2n}(\zeta) dm_{2n}(v) =$$

$$= \int_{U^n} (1-|v|^2)^\alpha Df(v)\overline{h_1(v)} dm_{2n}(v),$$

где h_1 – внутренный интеграл, который, согласно лемме 3, является элементом B_{ω^*}, где $\omega_j^*(t) = \omega_j(t)t^{-\alpha_j-1}$ $(1 \leq j \leq n)$ и $\|h_1\|_{B_{\omega^*}} \preceq \|h\|_{L^\infty}$.

Пусть $Dg(z) = h_1(z)$. Тогда используя теорему 4.1 из [4], получаем $g \in B_{\widetilde{\omega}}$ и $\|g\|_{B_{\widetilde{\omega}}} \asymp \|h_1\|_{B_1(\omega^*)}$, где $\widetilde{\omega}_j(t) = \omega_j(t)t^{-\alpha_j}$ $(1 \le j \le n)$. Следовательно, мы имеем

$$\Phi(F) = \int_{U^n} Df(\zeta)\overline{Dg(\zeta)}(1-|\zeta|^2)^{\alpha}dm_{2n}(\zeta), \ \|\Phi\| \le C_2\|g\|_{B_{\widetilde{\omega}}}$$

Обратно, пусть $g \in B_{\widetilde{\omega}}$, $f \in B_1(\omega)$ и Φ – функционал, порожденный этой функцией: $\Phi(f) =< f, g >$. Тогда

$$|\Phi(f)| \le \int_{U^n} |Df(\zeta)| \frac{\omega(1-|\zeta|)}{(1-|\zeta|^2)} dm_{2n}(\zeta) \times \sup_{\zeta \in U^n} \left\{ |Dg(\zeta)| \frac{(1-|\zeta|^2)^{\alpha+1}}{\omega(1-|\zeta|)} \right\} =$$
$$\|f\|_{B_1(\omega)}\|g\|_{B_{\widetilde{\omega}}},$$

и получаем $\|\Phi\| \le \|g\|_{B_{\widetilde{\omega}}}$, что завершает доказательство. □

3. Диагональные отображения на $B_p(\omega)$

Сформулируем задачи касающиеся диагональных отображений на $B_p(\omega)$.
Пусть f – функция из $B_p(\omega)$. Тогда функция $Diagf(z) = f(z, \dots, z)$ голоморфна на единичном диске. Обсудим следующие два вопроса:
Задача 1. Какому подпространству голоморфных на U функций принадлежит функция $Diagf(z)$?
Задача 2. Описать все голоморфные функции g в U, для которых существует функция $f \in B_p(\omega)$ такая, что $g = Diagf(z)$.
Следующая теорема дает исчерпывающие ответы на эти задачи.

Теорема 4. *Положим $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{n} \omega_j(t)$ и пусть $B_p^1(\Omega)$ означает Ω-весовое пространство Бесова для одной переменной. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. Если $f \in B_p(\omega)$, то $Diagf \in B_p^1(\Omega)$ и $\|Diagf\|_{B_p^1(\Omega)} \preceq \|f\|_{B_p(\omega)}$.

2.Для любой функции $g \in B_p^1(\Omega)$ существует функция $f \in B_p(\omega)$ такая, что $Diagf = g$ и $\|f\|_{B_p(\omega)} \preceq \|g\|_{B_p^1(\Omega)}$.

Доказательство. Нам необходимо разбиение полидисков на двоичные четырехугольники.
Пусть $k = (k_1, \dots, k_n)$ $(k_j \ge 0)$и пусть l_j – целые числа такие, что $-2^{k_j} \le l_j \le 2^{k_j+1} - 1$ $(1 \le j \le n)$. Положим

$$\Delta_{k_j,l_j} = \left\{ z_j \in U : 1 - \frac{1}{2^{k_j}} \le |z_j| < 1 - \frac{1}{2^{k_j+1}}, \ \frac{\pi l_j}{2^{k_j}} \le \arg z_j < \pi\frac{(l_j+1)}{2^{k_j}} \right\}$$

и $\quad \Delta_{k,l}(n) = \Delta_{k_1,l_1} \times \ldots \times \Delta_{k_n,l_n}$.
$\{\Delta_{k,l}(n)\}$ называется системой *двоичных четырехугольников* (см. [6]). Нетрудно заметить, что если ζ_{k_j,l_j} является центром Δ_{k_j,l_j}, $1 \le j \le n$, то

$$(3.1) \qquad 1 - |\zeta_{k_j,l_j}| \asymp 1 - |\zeta_j| \quad \zeta_j \in \Delta_{k_j,l_j}; \quad (1-|\zeta_{k_j,l_j}|)^2 \asymp |\Delta_{k_j,l_j}| \quad 1 \le j \le n.$$

Наконец, положим $2^k = (2^{k_1}, \ldots, 2^{k_n})$.

Доказательство пункта 1. Пусть $f \in B_p(\omega)$. Тогда, используя лемму 4 из [6], получаем

$$\sum_{(k)=(0)}^{(\infty)} \sum_{(l)=(-2^k)}^{(2^k-1)} \max_{\zeta \in \Delta_{k,l}(n)} |Df(\zeta)|^p (1-|\zeta_{k,l}(n)|^2)^{p-2} |\Delta_{k,l}(n)| \omega(1-|\zeta_{k,l}(n)|) \le$$

$$\int_{U^n} |Df(z)|^p \omega(1-|z|)(1-|z|^2)^{p-2} dm_{2n}(z) = \|f\|_{B_p(\omega)} < \infty$$

где $\zeta_{k,l}(n)$ – центр четырехугольника $\Delta_{k,l}(n)$.

Пусть теперь k и l – целые числа и рассмотрим $\Delta_{(k,\ldots,k),(l,\ldots,l)}(n)$. Имеем

$$|\Delta_{(k,\ldots,k),(l,\ldots,l)}(n)| = |\Delta_{k,l}|^n \quad \text{и} \quad \zeta_{(k,\ldots,k),(l,\ldots,l)}(n) = (\zeta_{k,l}, \ldots, \zeta_{k,l}),$$

где $\zeta_{k,l}$ – центр четырехугольника $\Delta_{k,l}$.

Суммируя только по индексам $(k, \ldots, k)$ и $(l, \ldots, l)$ и беря максимум по диагонали, используя (3.1), получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \max_{\zeta \in \Delta_{k,l}} \left| \frac{\partial^n (Diagf(\zeta)\zeta^n)}{\partial \zeta^n} \right|^p (1-|\zeta_{k,l}|^2)^{n(p-2)} |\Delta_{k,l}|^n \prod_{j=1}^n \omega_j(1-|\zeta_{k,l}|) \asymp$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \max_{\zeta \in \Delta_{k,l}} \left| \frac{\partial^n (Diagf(\zeta)\zeta^n)}{\partial \zeta^n} \right|^p (1-|\zeta_{k,l}|^2)^{n(p-2)} (1-|\zeta_{k,l}|^2)^{2n} \prod_{j=1}^n \omega_j(1-|\zeta_{k,l}|) =: I$$

Положим $g = Diagf$. Напомним, что

$$D^n g(z) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n (g(z)z^n)}{\partial z^n} = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n (Diagf(z)z^n)}{\partial z^n}, \ z \in U.$$

Получим

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \max_{\zeta \in \Delta_{k,l}} |D^n g(\zeta)|^p (1-|\zeta_{k,l}|^2)^{np-2} (1-|\zeta_{k,l}|^2)^2 \Omega(1-|\zeta_{k,l}|) \preceq \|f\|_{B_p(\omega)}$$

откуда вытекает, что (см. [6], лемма 4)

$$\int_U |D^n g(\zeta)|^p (1-|\zeta|^2)^{np} \frac{\Omega(1-|\zeta|)}{(1-|\zeta|)^2} dm_2(\zeta) \preceq \|f\|^p_{B_p(\omega)}.$$

По теореме 1, функция g принадлежит пространству $B^1_p(\Omega)$. Кроме того, $\|g\|_{B^1_p(\Omega)} \le \|f\|_{B_p(\omega)}$.

Доказательство пункта 2. Пусть $g \in B^1_p(\Omega)$. Наша цель - показать, что существует функция $f \in B_p(\omega)$ такая, что $Diagf(z) = g(z)$. Из предположения, что $g \in B^1_p(\Omega)$ вытекает (для подробностей см. [3])

$$D^n g(z) = C(\gamma) \int_U \frac{(1-|\zeta|^2)^{n(\gamma+2)-2}}{(1-\overline{\zeta}z)^{n(\gamma+2)}} D^n g(\zeta) dm_2(\zeta)$$

для некоторой достаточно большой γ и некоторой постоянной $C(\gamma)$, которая не зависит от g.

Из определения D следует, что существует функция f такая, что

$$Df(z) = n!C(\gamma)\int_U \frac{(1-|\zeta|^2)^{n(\gamma+2)-2}}{\prod_{j=1}^n(1-\overline{\zeta}z_j)^{\gamma+2}} D^n g(\zeta)dm_2(\zeta) \tag{3.2}$$

и $f(z) = D^-(Df(z))$. Пусть $Diag f(z) = g_1(z)$. Тогда имеем $D^n g_1(z) = D^n g(z)$ и из определения D получаем, что $g(z) = g_1(z)$, $z \in U$.

Осталось доказать, что $f \in B_p(\omega)$. Оценим соответствующий интеграл. Пусть $p = 1$. В силу леммы 1 (для $a = -1$) получаем

$$\begin{aligned}\int_{U^n}|Df(z)|\frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|)}dm_{2n}(z) \preceq \int_U (1-|\zeta|^2)^{n(\gamma+2)-2} \times \\ |D^n g(\zeta)|\int_{U^n}\frac{\omega(1-|z|)(1-|z|^2)^{-1}}{|1-\overline{\zeta}z|^{\gamma+2}}dm_{2n}(z)dm_2(\zeta) \preceq \\ \int_U (1-|\zeta|^2)^{n(\gamma+2)-2-n-n(\gamma+2)+2n}\Omega(1-|\zeta|)|D^n g(\zeta)|dm_2(\zeta) = \\ \int_U |D^n g(\zeta)|(1-|\zeta|^2)^n\frac{\Omega(1-|\zeta|)}{(1-|\zeta|^2)^2}dm_2(\zeta) \preceq \|g\|_{B_1^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Метод доказательства для случая $p > 1$ отличается от метода в случае $p = 1$. Достаточно доказать, что $F \in L_p(\omega)$, где $F(z) = (1-|z|^2)Df(z)$, $z \in U^n$. Хорошо известно, что

$$\begin{aligned}\|F\|_{L_p(\omega)} &= \sup_{\|G\|_{L_q(\omega)}\le 1}\int_{U^n}F(v)\overline{G}(v)\frac{\omega(1-|v|)}{(1-|v|^2)^2}dm_{2n}(v) \\ &= \sup_{\|G\|_{L_q(\omega)}\le 1}\int_{U^n}(1-|v|^2)Df(v)\overline{G}(v)\frac{\omega(1-|v|)}{(1-|v|^2)^2}dm_{2n}(v)\end{aligned} \tag{3.3}$$

при $p^{-1}+q^{-1} = 1$. Чтобы доказать $\|F\|_{L_p(\omega)} < \infty$ вычислим интеграл в (3.3). Положим

$$H(\zeta) = \int_{U^n}\frac{G(v)\omega(1-|v|)}{\prod_{j=1}^n(1-\overline{v}_j\zeta)^{\gamma+2}(1-|v|)}dm_{2n}(v).$$

Тогда H зависит только от одной переменной. Далее, положим

$$\begin{aligned}I &= \int_U(1-|\zeta|^2)^{n(\gamma+2)-2}D^n g(\zeta)\int_{U^n}\frac{\overline{G}(v)\omega(1-|v|)}{\prod_{j=1}^n(1-v_j\overline{\zeta})^{\gamma+2}(1-|v|)}dm_{2n}(v)dm_2(\zeta) \\ &= \int_U(1-|\zeta|^2)^{n(\gamma+2)-2}D^n g(\zeta)\overline{H}(\zeta)dm_2(\zeta).\end{aligned}$$

Используя лемму 2 получаем: если $G \in L_q(\omega)$, то $G_1 \in B_q(\omega^*)$, где

$$G_1(z) = \int_{U^n}\frac{G(v)\omega(1-|v|)}{(1-\overline{v}z)^{\gamma(n)+2}(1-|v|^2)}dm_{2n}(v),\ \omega_j^*(t) = \frac{t^{(\gamma+1)q}}{\omega_j^{q/p}(t)},\ 1\le j\le n$$

при $\gamma(n) = (\gamma,\dots,\gamma)$, (так как γ – достаточно большая).

Итак имеем $G_1 \in B_q(\omega^*)$ и легко проверить, что $H(\zeta) = DiagG_1(\zeta)$.
Из утверждения 1 теоремы 4 следует, что $H \in B_q^1(\Omega^*)$, где

$$\Omega^*(t) = t^{nq(\gamma+1)} \prod_{j=1}^{n} \omega_j^{-q/p}(t).$$

По теореме 1, используя также неравенство Гёлдера, получаем

$$|I| \le \left(\int_U |D^n g(\zeta)|^p (1-|\zeta|^2)^{np} \frac{\Omega(1-|\zeta|)}{(1-|\zeta|^2)^2} dm_2(\zeta) \right)^{1/p}$$

$$\left(\int_U |\overline{H}(\zeta)|^q \frac{\Omega^*(1-|\zeta|)}{(1-|\zeta|^2)^2)} dm_2(\zeta) \right)^{1/q} \preceq \|g\|_{B_p^1(\Omega)} \|G\|_{L_q(\omega)}.$$

Следовательно, используя (3.2) и меняя порядки интегрирования, получаем $\|F\|_{L_p(\omega)} < \infty$. Поэтому $f \in B_p(\omega)$ и $\|f\|_{B_p(\omega)} \preceq \|g\|_{B_p^1(\Omega)}$. □

Abstract. Let U^n be the unit polydisk in C^n and S be the space of functions of regular variation. Let $1 \le p < \infty$, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, $\omega_j \in S (1 \le j \le n)$ and $f \in H(U^n)$. The function f is said to be in holomorphic Besov space $B_p(\omega)$ if

$$\|f\|_{B_p(\omega)}^p = \int_{U^n} |Df(z)|^p \prod_{j=1}^{n} \frac{\omega_j(1-|z_j|)}{(1-|z_j|^2)^{2-p}} dm_{2n}(z) < +\infty$$

where $dm_{2n}(z)$ is the $2n$-dimensional Lebesgue measure on U^n and D stands for the fractional differentation of f. This work gives a complete description of $(B_p(\omega))^*$, where X^* means the dual space of X. Also the problem of diagonal mapping is completely solved.

Список литературы

[1] J. Arazy, S. Fisher, J. Peetre, “Möbius invariant function spaces”, J. Reine Angew. Math. **363**, 110 – 145 (1985).
[2] O. Blasco, “Multipliers on weighted Besov spaces of analytic functions”, Contemporary Mathematics, **144**, 23 – 33 (1993).
[3] M. M. Djrbashian, “On the representation problem of analytic functions”, Soobsh. Inst. Matem. Mekh. Akad. Nauk Arm. SSR, **2**, 3 – 40 (1948).
[4] A. V. Harutyunyan, “Weighted Bloch space in the polydisk”, Function spaces and its Applications, **5** (3), 3 – 21 (2007).
[5] A. V. Harutyunyan, W. Lusky, “$\omega-$ weighted holomorphic Besov spaces on polydisks”, (acc. in Function spaces and its Applications).
[6] Ф. Шамоян, “Диагональные отображения и вопросы представления в анизотропных пространствах в полудиске”, Сиб. мат. журнал, **3** (2), 197 – 215 (1990).
[7] Е. Сенета, Функции Постоянного Изменения, Наука, Москва (1985).
[8] K. Stroethoff, “Besov type characterisations for the Bloch space”, Bull. Australian Math. Soc. **39**, 405 – 420 (1989).
[9] K. Zhu, Operator Theory in Function Spaces, Marcel Dekker, New York (1990).

Поступила 9 июня 2009