Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 3, 2010, стр. 11-24.

О ЖАДНОМ АЛГОРИТМЕ ПО СИСТЕМЕ ХААРА

А. АЛЕКСАНЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *haik_alexanyan@yahoo.com*

Аннотация. В работе изучается равномерная и почти всюду сходимость жадного (гриди) алгоритма по системе Хаара. Получены необходимые и достаточные условия для нормирования функций системы Хаара, которые гарантируют равномерную сходимость для функций из $\mathrm{C}[0,1]$ и сходимость почти всюду для функций из $L^1[0,1]$.

MSC2000 number: 42C15, 42C20

Ключевые слова: жадный (гриди) алгоритм, система Хаара, равномерная сходимость.

1. Введение

Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом в банаховом пространстве X и $\inf\limits_n ||\varphi_n||_X > 0$. Тогда любой элемент $f \in \mathrm{X}$ единственным образом разлагается в ряд по системе Φ, который сходится к f по норме пространства X:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\varphi_n,$$

где $c_n(f)$ коэффиценты разложения, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n(f) = 0$.
Обозначим через Λ_N множество из N индексов для которых

$$\min_{k\in\Lambda_N} |c_k(f)| \geq \max_{k\notin\Lambda_N} |c_k(f)|.$$

Тогда

$$\mathrm{G}_N(f) := \mathrm{G}_N(f,\Phi) := \sum_{k\in\Lambda_N} c_k(f)\varphi_k$$

называется N-тым жадным (гриди) аппроксимантом элемента f по системе Φ. Этот метод приближения называется жадным алгоритмом.
Базис Φ називается *квази-гриди* базисом, если существует константа C такая, что для любого $f \in \mathrm{X}$

$$||\mathrm{G}_N(f,\Phi)|| \leq C||f||, \ N = 1, 2... \ .$$

В работе [2] Войтащик доказал, что базис Φ является квази-гриди базисом тогда и только тогда, когда для любого $f \in \mathrm{X}$

$$\lim_{N\to\infty} ||f - \mathrm{G}_N(f,\Phi)|| = 0.$$

Сходимость жадного алгоритма для конкретных систем была рассмотрена многими авторами. Т. Кернер, ответив на вопрос поставленный Л. Карлесоном и Р. Койфманом, построил в [3] функцию из $L^2(\mathbb{T})$, а затем в [4] непрерывную функцию, жадные алгоритмы которых по тригонометрической системе расходятся почти всюду.

В работе [5] В. Темлякова доказано существование функции из L^p, $1 \le p < 2$, жадный алгоритм которой по тригонометрической системе не сходится по мере, и непрерывной фукнции, жадный алгоритм которой по тригонометрической системе не сходится в L^p, $p > 2$. С другой стороны в работе [6] С. В. Конягина и В. Н. Темлякова были получены достаточные условия для сходимости жадного алгоритма. Аналогичные результаты о сходимости и расходимости жадного алгоритма по системе Уолша были получены Г. Амирханяном (см. [11]).

М. Григоряном и А. Саргсяном в работе [12] был построен пример непрерывной функции, жадный алгоритм которой по системе Фабера-Шаудера расходится по мере.

В работе [7] С. Костюковский и А. Олевский построили ортонормированный базис для $L^2(0,1)$, состоящий из равномерно ограниченных функций, такой что для любой функции из $L^2(0,1)$ жадный алгоритм по этой системе сходится почти всюду, а в работе [8] М. Нильсена была построена равномерно ограниченная ортонормированная система, которая является квази-гриди базисом в $L^p(0,1)$ при всех $1 < p < \infty$.

Пусть $\Gamma = \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ убывающая последовательность положительных чисел. Для $f \in \mathrm{X}$ рассмотрим убывающую по модулю перестановку ненулевых коэффицентов с весом γ_n:

$$|\gamma_{\sigma(1)} c_{\sigma(1)}(f)| \ge |\gamma_{\sigma(2)} c_{\sigma(2)}(f)| \ge ... |\gamma_{\sigma(n)} c_{\sigma(n)}(f)| \ge ..., \tag{1.1}$$

и положим

$$G_N(f,\Phi,\Gamma) := \sum_{n=1}^{N} c_{\sigma(n)}(f)\varphi_{\sigma(n)},\ N = 1,2,... \tag{1.2}$$

Множество перестановок σ с условием (1.1) обозначим через $D(f,\Phi,\Gamma)$. Легко видеть, что (1.2) совпадает с жадным аппроксимантом по перенормированной

системе Φ:

$$G_N(f,\Phi,\Gamma) = G_N\left(f, \left\{\frac{1}{\gamma_n}\varphi_n\right\}\right),\ N = 1,2,... \tag{1.3}$$

В работе С. Конягина и В. Темлякова ([10]) доказано что для любого нормированного базиса Φ в банаховом пространстве X, при $\Gamma = \{2^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ для любого $f \in \mathrm{X}$

$$\lim_{N\to\infty} ||G_N(f,\Phi,\Gamma) - f||_{\mathrm{X}} = 0.$$

Пусть $\mathrm{H}_p = \{h_{n,p}\}_{n=1}^{\infty}$ - система Хаара, нормированная в $L^p(0,1)$, $1 \le p \le \infty$ и пусть $\Gamma_p = \{\gamma_{n,p}\}_{n=1}^{\infty}$, где $\gamma_{n,p} = 2^{-\frac{k}{p}}$, если $n = 2^k + i$, $i = 1,2,..,2^k$.

Замечание 1. *Пусть $f \in L^1(0,1)$, а $\{c_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ - коэффиценты разложения f по системе H_∞. Если $f \in \mathrm{C}[0,1]$, то $c_n(f) \to 0$ и тогда перестановка σ, удовлетворяющая условию* (1.1) *существует. Но условие $f \in L^1(0,1)$ не гарантирует, что $c_n(f) \to 0$, т.е., в зависимости от f и Γ, перестановки, удовлетворяющей условию* (1.1)*, может и не существовать. В этом случае коэффиценты разбиваются на две части*

$$A := \{n \in \mathbb{N} :\ |c_n(f)| \le 1\},\ B := \mathbb{N} \setminus A.$$

После этого рассматриваются те перестановки σ ненулевых коэффицентов, для которых

$$|\gamma_{\sigma(n)} c_{\sigma(n)}(f)| \ge |\gamma_{\sigma(n+1)} c_{\sigma(n+1)}(f)|,\ \text{где } n \in A, \tag{1.4}$$

а часть B может перестанавливаться произвольным образом. В этом случае сходимость жадных аппроксимантов понимается уже для таких перестановок.

Заметим, что для Γ стремящихся к нулю, перестановка, удовлетворяющая (1.4) всегда существует, а для последовательностей, не стремящихся к нулю, рассматриваются только функнции, для которых перестановка удовлетворяющая (1.4) существует, что, как будет видно ниже, не ограничивает общности.
В дальнейшем множества $D(f,\Phi,\Gamma)$ и аппроксиманты (1.2) будем понимать с учетом замечания 1.
Следующую теорему Т. Тао мы приводим в несколько иной, но эквивалентной формулировке.

Теорема. *(Т. Тао* [9]*). а) Если $1 < p < \infty$, тогда для любой функции $f \in L^p(0,1)$*

$$\lim_{N\to\infty} G_N(f,\mathrm{H}_\infty,\Gamma_p)(x) = f(x)\ \text{п.в. на } [0,1].$$

б) существует функция $f \in \bigcap_{1<p<\infty} L^p(0,1)$ *такая, что*

$$\lim_{N\to\infty} \sup |G_N(f, \mathrm{H}_\infty, \Gamma_\infty)(x)| = +\infty, \ x \in [0,1].$$

Заметим, что в силу (1.2) и (1.3) имеем $G_N(f, \mathrm{H}_\infty, \Gamma_p) \equiv G_N(f, \mathrm{H}_p)$, $1 \le p \le \infty$. Для последовательности $\Gamma = \{\gamma_n\}$ обозначим

$$\tau(\Gamma) = \sup_{m>n} \left\{ \frac{m}{n} : \ \frac{\gamma_n}{\gamma_m} \le 2 \right\}. \tag{1.5}$$

Пример 1. *Для произвольного* $p > 0$ *имеет место* $\tau(\{n^{-p}\}_{n=1}^\infty) < \infty$, *тогда как* $\tau(\{(\ln n)^{-1}\}_{n=2}^\infty) = \infty$.

Пример 2. *Пусть для* $\Gamma = \{\gamma_n\}_{n=1}^\infty$ *имеет место* $\tau(\Gamma) < +\infty$. *Заметим, что из условия* $\tau(\Gamma) < +\infty$ *следует, что* $\gamma_n \to 0$. *Рассмотрим последовательность*

$$\widetilde{\Gamma} = \left\{ \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{i} \right) \gamma_{n_k} \right\}_{i=2}^{k} \right\}_{k=2}^{\infty}, \ \text{где } n_2 < n_3 < \ldots$$

Легко видеть, что $\tau(\widetilde{\Gamma}) = +\infty$ *и если выбрать числа* n_k, $k = 2, 3, \ldots$ *достаточно быстро стремящиеся к* $+\infty$, *то получим, что последовательность* $\widetilde{\Gamma}$ *может стремится к нулю сколь угодно быстро.*

С. Гогян [13] доказал, что система H_1 является квази-гриди базисом в пространстве $L^1(0,1)$ тогда и только тогда, когда $\tau(\Gamma) < +\infty$.
В настоящей работе доказаны следующие теоремы

Теорема 1. *1) Если* $\tau(\Gamma) < +\infty$, *тогда для любой функции* $f \in \mathrm{C}[0,1]$ *и любой перестановки* $\sigma \in D(f, \mathrm{H}_\infty, \Gamma)$

$$\lim_{N\to\infty} ||f - G_N(f, \mathrm{H}_\infty, \Gamma)||_{\mathrm{C}} = 0.$$

2) Если $\tau(\Gamma) = \infty$, *тогда существует функция* $f \in \mathrm{C}[0,1]$ *такая, что для любой перестановки* $\sigma \in D(f, \mathrm{H}_\infty, \Gamma)$

$$\lim_{N\to\infty} \sup |G_N(f, \mathrm{H}_\infty, \Gamma)(x)| = +\infty \ \textit{п.в. на } [0,1]$$

Теорема 2. *Для того, чтобы* $\lim_{N\to\infty} G_N(f, \mathrm{H}_\infty, \Gamma)(x) = f(x)$ *п.в. на* $[0,1]$, *для любой функции* $f \in L^1(0,1)$ *и любой перестановки* $\sigma \in D(f, \mathrm{H}_\infty, \Gamma)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\tau(\Gamma) < +\infty$.

Так как $\tau(\Gamma_p) < +\infty$, $1 \le p < +\infty$ и $\tau(\Gamma_\infty) = \infty$, то теорема Т. Тао следует из теорем 1 и 2.

2. Обозначения и вспомогательные результаты

Двоичным интервалом называется интервал вида $\left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right)$, где $i = 1, 2, ..., 2^k$, а $k = 0, 1, ...$ Для $n = 2^k + i$, $i = 1, 2, ..., 2^k$, $k = 0, 1, ...$ обозначим

$$\Delta_n = \Delta_k^i = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right); \ \overline{\Delta}_n = \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right];$$

$$\Delta_1 = \Delta_0^0 = (0, 1); \ \overline{\Delta}_1 = [0, 1].$$

Обозначим левые и правые половины двоичных интервалов через Δ_n^+ и Δ_n^-:

$$\Delta_n^+ = (\Delta_k^i)^+ = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) = \Delta_{k+1}^{2i-1},$$

$$\Delta_n^- = (\Delta_k^i)^- = \left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i-1}{2^k}\right) = \Delta_{k+1}^{2i}.$$

Середину интервала Δ_n обозначим через t_n, $t_n = \frac{2i-1}{2^{k+1}}$, если $n = 2^k + i$.

Обозначим через $\mathrm{H}_\infty = \{h_n\}_{n=1}^\infty$ систему Хаара нормированную по норме $||\cdot||_\infty$.

Для каждой перестановки $\sigma \in D(f, \mathrm{H}_\infty, \Gamma)$ определим множество

$$\Lambda_N(f) := \Lambda_N(f, \sigma) := \{\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(N)\}, \ N = 1, 2, ... \tag{2.1}$$

и мажоранту жадных операторов

(2.2)

$$G_N^*(f, x) := G_N^*(f, \sigma, x) := \sup_{1 \le n \le N} \left| \sum_{k=1}^n c_{\sigma(k)}(f) h_{\sigma(k)}(x) \right|, \ x \in [0, 1], \ N = 1, 2, ...$$

Положим также

$$\mathrm{sp} f := \{n \in \mathbb{N} : \ c_n(f) \neq 0\}. \tag{2.3}$$

Выражение $a \asymp b$ означает двойное неравенство $C_1 a \le b \le C_2 a$, где C_1 и C_2 абсолютные положительные постоянные.

В дальнейшем через C обозначим абсолютную константу, которая может быть разной в разных формулах.

Для системы Хаара известны следующие результаты

Лемма 1. *([14], стр. 88) Пусть $A_0 = \{(0, 1), \ \emptyset\}$, $A_j = \{(0, 1), \ \emptyset, \ \Delta_n^+, \ \Delta_n^- : \ n = 1, 2, ..., j\}$ и $\mathcal{F}_j$ – семейство всех множеств, представимых в виде объединения какого-то числа интервалов из A_j $(j = 0, 1, ...)$. Пусть, далее, $\alpha(x), \ x \in [0, 1]$, – функция, принимающая значения $0, 1, ..., \infty$ и такая, что*

$$e_j \equiv \{x \in (0, 1) : \ \alpha(x) = j\} \in \mathcal{F}_j, \ j = 0, 1, ...$$

Тогда можно найти такую последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$, $\varepsilon_n = 0$ или 1, что

$$\varepsilon_n h_n(x) = \begin{cases} h_n(x), & \text{если } n \le \alpha(x), \\ 0, & \text{если } n > \alpha(x) \ , \end{cases} \quad x \in (0, 1) \setminus R_2, \ n = 1, 2, ...,$$

где $R_2 = \{\{i/2^k\}_{i=1}^{2^k}\}_{k=0}^{\infty}$, *и, следовательно, для произвольных чисел* c_n, $n = 1, 2, ...,$

$$\sum_{n=1}^{\alpha(x)} c_n h_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n c_n h_n(x), \quad x \in (0,1) \setminus R_2$$

(*здесь* $\sum\limits_{n=1}^{0} \equiv 0$).

Лемма 2. *(*[14], *стр. 105) Для любого полинома вида*

$$\sum_{n=M}^{N} a_n h_n(x), \ 1 < M < N,$$

найдется такая перестановка $\{\sigma(n)\}_{n=M}^{N}$ *чисел* $M, M+1, ..., N$ *что для любого* $x \in [0,1]$

$$\max_{M \le p \le q \le N} \left| \sum_{n=p}^{q} a_{\sigma(n)} h_{\sigma(n)}(x) \right| \ge \frac{1}{4} \sum_{n=M}^{N} |a_n h_n(x)|.$$

Замечание 2. *Из доказательства леммы* 2 *следует, что если все коэффиценты* a_n *одного знака, то перестановку* σ *можно выбрать из условия*

$$0 < t_{\sigma(M)} < t_{\sigma(M+1)} < ... < t_{\sigma(N)} < 1, \tag{2.4}$$

где t_n *– середина интервала* Δ_n, *а вместо* $1/4$ *в лемме можно взять* $1/2$.

Нам понадобится также следующее утверждение.

Теорема 3. *(*[14], *стр. 97) Для того, чтобы ряд по системе Хаара*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n(x)$$

сходился п.в. на множестве $E \subset (0,1)$, $\mu(E) > 0$, *необходимо и достаточно, чтобы для п.в.* $x \in E$ *была конечна сумма ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 h_n^2(x).$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть* $\Gamma = \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ *убывающая последовательность положительных чисел, а натуральные числа* $m, p > 1$, $A < B$ *таковы, что*

$$\left[2^{p+1}, 2^{p+m^7+1}\right] \subset [A, B] \quad \text{и} \quad \frac{\gamma_A}{\gamma_B} \le 2. \tag{2.5}$$

Тогда для произвольной последовательности $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$, $|\xi_i| \le m^{-8}$, $i = 1, 2, ...,$ *существует функция* $f \in \mathrm{C}[0,1]$ *и множество* $L \subset \mathrm{sp} f$, *такие, что*

1. $||f||_{\mathrm{C}} \le C$,

2. $c_j(f) = 0$ *для любого* $j \le p$,
3. $\frac{1}{4m^4} < c_j(f) < \frac{4}{m^4}$, *если* $i, j \in L$,
4. *для* $\overline{f} := f + \sum\limits_{n \in L} \xi_n h_n$ *и любого* $\sigma \in D(\overline{f}, \mathrm{H}_\infty, \Gamma)$, *если* $\Lambda_q(\overline{f}) \supset L$, *то*

$$\mu\left\{x \in [0,1] : \ G_q^*(\overline{f}, x) \ge \frac{1}{12} m^3\right\} \ge 1 - \frac{C}{m},$$

Доказательство. Рассмотрим следующий полином

$$P(x) = \frac{1}{m^4} \sum_{k=p+1}^{p+m^7} \sum_{i=1}^{2^k} \tau_k^i h_k^i(x), \tag{2.6}$$

где все числа τ_k^i из интервала $[\frac{1}{3}, 3]$ и будут выбраны ниже. Очевидно, что

$$\frac{1}{m^4} \sum_{k=p+1}^{p+m^7} \sum_{i=1}^{2^k} \tau_k^i |h_k^i(x)| \asymp m^3 \text{ п.в. на } [0,1] \text{ и } ||P||_2 \asymp \frac{1}{\sqrt{m}}, \tag{2.7}$$

независимо от выбора чисел $\{\tau_k^i\}$. Пусть $\mathrm{sp}P = \{M_i\}_{i=1}^v$ где $M_1 < M_2 < ... < M_v$, а σ - перестановка множества $\mathrm{sp}P$, удовлетворяющая условию (2.4). Выберем числа $\{\tau_k^i\}$ следующим образом

$$\tau_{M_i} = \frac{\gamma_{\sigma^{-1}(M_i)}}{\gamma_{M_i}}, \ i = 1, 2, ..., v. \tag{2.8}$$

Из монотонности Γ и условия (2.5) имеем, что $\frac{1}{2} \le \tau_n \le 2$ для любого $n \in \mathrm{sp}P$, а учитывая выбор перестановки σ получаем, что $\sigma \in D(P, \mathrm{H}_\infty, \Gamma)$. Поскольку $\frac{1}{3} < \tau_n < 3$, $n \in \mathrm{sp}P$, то незначительными изменениями чисел τ_n мы можем добиться того, чтобы величины $|\gamma_n c_n(P)|$ были попарно различными и $\frac{1}{3} \le \tau_n \le 3$, $n \in \mathrm{sp}P$, сохранив, при этом отмеченные свойства полинома P и перестановки σ. Поэтому можем считать, что $\#D(P, \mathrm{H}_\infty, \Gamma) = 1$.

Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \sup\limits_{N: x \in \Delta_N} ||S_N(P)||_{\mathrm{C}} \le 1, \\ \inf\{N : ||S_{N+1}(P)||_{\mathrm{C}(\Delta_{N+1})} > 1, \ x \in \Delta_{N+1}\}, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Обозначим $e_j := \{x \in [0,1] : \ \alpha(x) = j\}$, $j = 0, 1, 2....$ Из определения функции $\alpha(x)$ следует, что если $e_j \ne \emptyset$, то $e_j = \Delta_{j+1}$, $j = 0, 1, ...$, т.е. функция $\alpha(x)$ удовлетворяет условиям леммы 1, следовательно существует последовательность $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$, $n = 1, 2, ...$, такая, что

$$Q(x) := \sum_{n=1}^{\alpha(x)} c_n(P) h_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n c_n(P) h_n(x), \ x \in [0,1] \setminus R_2. \tag{2.9}$$

Ясно, что $Q(x)$ является полиномом по системе Хаара, а также

$$||Q||_{\mathrm{C}} \le 1, \ ||Q||_2 \le C \frac{1}{\sqrt{m}}. \tag{2.10}$$

Обозначим

$$E := \{x \in [0,1] : \ \alpha(x) = +\infty\} \text{ и } S^*(P,x) := \sup_{1 \le N < \infty} \left| \sum_{n=1}^{N} c_n(P) h_n(x) \right|, \ x \in [0,1].$$

Известна следующая оценка (см. [14], стр. 88)

$$||S^*(f)||_p \asymp ||f||_p, \ 1 < p < \infty. \tag{2.11}$$

Имеем $\{x \in [0,1] : \alpha(x) < +\infty\} = \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} e_j$ и если $e_j \neq \emptyset$, то $e_j = \Delta_{j+1}$. Заметим, что функция $S_{j+1}(P,x)$ постоянна на интервалах Δ_{j+1}^+ и Δ_{j+1}^-, следовательно либо Δ_{j+1}^+ либо Δ_{j+1}^- содержится в множестве $\{x \in [0,1] : \ S^*(P,x) > 1\}$. Так как множества e_j не пересекаются, получаем

$$\mu\{x \in [0,1] : \ \alpha(x) < +\infty\} \le 2\mu\{x \in [0,1] : \ S^*(P,x) > 1\}. \tag{2.12}$$

Из (2.12), неравенства Чебышева и (2.11) следует, что

$$\mu\{x \in [0,1] : \ \alpha(x) < +\infty\} \le 2||S^*(P)||_2^2 \le C||P||_2^2 \le \frac{C}{m}.$$

Окончательно, имеем

$$\mu(E) \ge 1 - \frac{C}{m}, \tag{2.13}$$

и согласно (2.7),

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(Q) h_n(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(P) h_n(x)| \asymp m^3, \ x \in E. \tag{2.14}$$

Обозначим $L := \mathrm{sp} Q$ и $\overline{Q}(x) := \sum\limits_{n \in L} (c_n(Q) - \xi_n) h_n(x)$, и пусть $0 < x_1 < x_2 < ... < x_r < 1$ есть точки разрыва полинома $\overline{Q}$. Выберем число $k > p + m^7 + 1$ настолько большим, чтобы выполнялись неравенства

$$0 < x_1 - \frac{1}{2^{k+1}} < x_r + \frac{1}{2^{k+1}} < 1 \tag{2.15}$$

и

$$x_i + \frac{1}{2^{k+1}} < x_{i+1} - \frac{1}{2^{k+1}}, \ i = 1, 2, ..., r-1. \tag{2.16}$$

Положим

$$f(x) = \begin{cases} \overline{Q}(x), & \text{если } x \in [0,1] \setminus (x_i - \frac{3}{2^{k+3}}, x_i + \frac{3}{2^{k+3}}) \text{ и } x = x_i \pm \frac{j}{2^{k+3}}, \ j = 1,3, \\ \frac{3}{2}\overline{Q}(x_i \pm 0), & \text{если } x = x_i \pm \frac{2}{2^{k+3}}, \\ 0, & \text{если } x = x_i, \end{cases}$$

где $1 \le i \le r$, а в каждом из оставшихся интервалов, где f неопределена, определим как линейную и непрерывную. Согласно определению имеем, что функция f непрерывна на $[0,1]$ и

$$c_n(f) = c_n(\overline{Q}), \ n \le 2^k. \tag{2.17}$$

Покажем, что функция f и множество L удовлетворяют требованиям леммы 3. По определению имеем $f \in C[0,1]$ и $||f||_{\mathrm{C}} \leq 3$, что является первым пунктом леммы. Второй пункт леммы следует из (2.6), (2.9) и (2.17), а учитывая что $|\xi_n| \leq m^{-8}$, $n = 1, 2, ...$ убеждаемся в справедливости третьего пункта.
Пусть теперь $\overline{f} := f + \sum\limits_{n \in L} \xi_n h_n$. Из (2.6), (2.9) и (2.17) имеем

$$c_n(\overline{f}) = c_n(Q) = c_n(P), \text{ для } n \in L. \tag{2.18}$$

Поскольку $\#D(P, \mathrm{H}_\infty, \Gamma) = 1$, то вместе с (2.8) и (2.18) получаем, что при любой перестановке $\sigma \in D(\overline{f}, \mathrm{H}_\infty, \Gamma)$ множество $\mathrm{sp}P$ переставляется по правилу (2.4), что вместе с (2.13), (2.14) и леммой 2 дает последный пункт леммы. Лемма доказана. □

3. Доказательства теорем

Доказательство первой части теоремы 1. Пусть $\tau(\Gamma) < +\infty$, $f \in \mathrm{C}[0,1]$ и число $\varepsilon > 0$ фиксировано. Обозначим

$$T_\varepsilon(f)(x) := \sum_{n:\ |c_n(f)\gamma_n| > \varepsilon} c_n(f) h_n(x),\ x \in [0,1],$$

и

$$N(\varepsilon) = \min\{N \in \mathbb{N} :\ |c_n(f)\gamma_n| \leq \varepsilon,\ \forall n \geq N\}.$$

Тогда

$$\{n \in \mathbb{N} :\ |c_n(f)\gamma_n| > \varepsilon\} \subset \{1, 2, ..., N(\varepsilon)\}, \tag{3.1}$$

$$\frac{\varepsilon}{\gamma_{N(\varepsilon)}} \leq |c_{N(\varepsilon)}| \to 0, \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{3.2}$$

Оценим следующую разность

(3.3)

$$||S_{N(\varepsilon)}(f) - T_\varepsilon(f)||_{\mathrm{C}} = \left|\left| \sum_{n \leq N(\varepsilon),\ |c_n(f)\gamma_n| \leq \varepsilon} c_n(f) h_n(x) \right|\right|_{\mathrm{C}} \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{[\log_2 N(\varepsilon)]-1} \frac{1}{\gamma_{n_k}} + \frac{\varepsilon}{\gamma_{N(\varepsilon)}},$$

где $n_k = 2^{k+1}$. Если $l_0 := [\log_2 \tau(\Gamma)] + 1$, тогда

$$\frac{n_{k+l_0}}{n_k} > \tau,\ k = 0, 1, ..., [\log_2 N(\varepsilon)] - l_0 - 1, \tag{3.4}$$

откуда следует, что

$$\frac{\gamma_{n_k}}{\gamma_{n_{k+l_0}}} > 2,\ k = 0, 1, ..., [\log_2 N(\varepsilon)] - l_0 - 1. \tag{3.5}$$

Учитивая (3.5), получим

$$\sum_{k=0}^{[\log_2 N(\varepsilon)]-1} \frac{1}{\gamma_{n_k}} \leq \sum_{r=0}^{l_0-1} \sum_{k \equiv r (mod\ l_0)} \frac{1}{\gamma_{n_k}} \leq$$

$$\sum_{k=0}^{l_0-1}\left(\frac{1}{2^{i_r}}+\frac{1}{2^{i_r-1}}+...+1\right)\frac{1}{\gamma_{N(\varepsilon)}}\le\frac{C}{\gamma_{N(\varepsilon)}}, \tag{3.6}$$

для некоторых индексов i_r, $r=0,1,...,l_0-1$.

Из оценок (3.3), (3.6) и (3.2) следует, что

$$||S_{N(\varepsilon)}(f)-T_\varepsilon(f)||_{\mathrm{C}}\to 0,\ \text{при}\ \varepsilon\to 0. \tag{3.7}$$

Поскольку $\lim\limits_{N\to\infty}||f-S_N(f)||_C=0$, получим, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}||f-T_\varepsilon(f)||_C=0. \tag{3.8}$$

Если множество $D(f,\mathrm{H}_\infty,\Gamma)$ состоит из одного элемента, то для любого $N\in\mathbb{N}$ существует $\varepsilon=\varepsilon(N)>0$, для которого $G_N(f)\equiv T_\varepsilon(f)$ и, следовательно, имеем

$$\lim_{N\to\infty}||f-G_N(f)||_C=0.$$

В случае $\#D(f,\mathrm{H}_\infty,\Gamma)>1$, обозначим

$$\Omega_0=\emptyset,\ \Omega_n=\{k\in\mathbb{N}\setminus(\Omega_1\cup...\cup\Omega_{n-1}):\ |\gamma_k c_k(f)|=|\gamma_n c_n(f)|\},\ n=1,2,... \tag{3.9}$$

и если $\Omega_n\ne\emptyset$, то положим $\omega_n=\max\Omega_n$. Теперь если $\#\Omega_n>1$, то теми же рассуждениями как и при доказательстве оценки (3.6), получим

$$\sum_{k\in\Omega_n}|c_k(f)h_k(x)|=|\gamma_{\omega_n}c_{\omega_n}(f)|\sum_{k\in\Omega_n}\frac{1}{\gamma_k}|h_k(x)|\le$$

$$|\gamma_{\omega_n}c_{\omega_n}(f)|\sum_{k=1}^{\omega_n}\frac{1}{\gamma_k}|h_k(x)|\le C|c_{\omega_n}(f)|,\ x\in[0,1],$$

что вместе с (3.8) доказывает первый пункт теоремы.

Доказательство второй части теоремы 1. Пусть $\tau(\Gamma)=+\infty$. Тогда для любых натуральных чисел k и m, существуют индексы $B>A>m$, такие, что

$$\frac{B}{A}>k\ \text{и}\ \frac{\gamma_A}{\gamma_B}\le 2. \tag{3.10}$$

Индукцией по $n=1,2,...$ построим последовательность функций $f_n\in\mathrm{C}[0,1]$, множество индексов L_n и индексы q_n, а также вспомогательные индексы p_n, A_n, B_n и последовательности $\{\xi_i^n\}_{i=1}^\infty$, удовлетворяющие следующим условиям:

a) $||f_n||_{\mathrm{C}}\le\frac{C}{n^2}$,
b) $\max L_n<\min L_{n+1}$ и $q_n<q_{n+1}$,
c) $c_j(f_n)=0$, если $j<\min L_n$,
d) если $F_n=\sum\limits_{k=1}^n f_k$, то $\max\limits_{j\in L_{k+1}}|\gamma_j c_j(F_n)|<\min\limits_{j\in L_k}|\gamma_j c_j(F_n)|$ где $k=1,2,...,n-1$,
e) $\mu\{x\in[0,1]:\ G^*_{q_n}(F_n,\sigma,x)\ge\frac{1}{12}n\}\ge 1-\frac{C}{n}$, для любого $\sigma\in D(F_n,\mathrm{H}_\infty,\Gamma)$, если q_n выбрано так, чтобы $\Lambda_{q_n}(F_n,\sigma)\supset L_n$.

Пусть $n = 1$, $m_1 = 2n$ и числа $B_1 > A_1 > 1$ выбраны так, чтобы

$$\frac{B_1}{A_1} > 2^{m_1^7+3} \text{ и } \frac{\gamma_{A_1}}{\gamma_{B_1}} \le 2. \tag{3.11}$$

Возможность такого выбора следует из (3.10). Возьмем $p_1 = [\log_2 A_1] + 1$ и $\{\xi_i^1\}_{i=1}^\infty = (0, 0, ...)$. Из выбора p_1 и условия (3.11) следует, что $[2^{p_1}, 2^{p_1+m_1^7+2}] \subset [A_1, B_1]$. Пусть g_1 непрерывная функция на $[0, 1]$, а L_1 множество индексов, которые удовлетворяют условиям леммы 3 при начальных условиях m_1, p_1, A_1, B_1 и $\{\xi_i^1\}_{i=1}^\infty$. Обозначим $f_1 := g_1$ и $F_1 := f_1$. Пусть далее индекс q_1 выбран так, чтобы $\Lambda_{q_1}(F_1) \supset L_1$. Очевидно условия $a)$, $c)$ и $e)$ удовлетворяются.

Теперь возьмем $n = 2$ и $m_2 = 2n$. Поскольку $c_k(F_1) \to 0$, то существует индекс $K_0 > q_1$, такой что $|c_k(F_1)| < m_2^{-10}$, для любого $k \ge K_0$. Выберем натуральные числа $B_2 > A_2$ так, чтобы

$$A_2 > \max\{B_1, 2^{K_0+2}\},\ \frac{B_2}{A_2} > 2^{m_2^7+3} \text{ и } \frac{\gamma_{A_2}}{\gamma_{B_2}} \le 2. \tag{3.12}$$

Далее возьмем $p_2 = [\log_2 A_2] + 1$ и учитывая (3.12), получим $[2^{p_2}, 2^{p_2+m_2^7+2}] \subset [A_2, B_2]$. Потом выберем последовательность $\{\xi_i^2\}_{i=1}^\infty$ следующим образом:

$$\xi_i^2 = 0, \text{ если } i \le p_2 \text{ и } \xi_i^2 = m_2^2 c_i(F_1), \text{ если } i \ge p_2.$$

Пусть теперь $g_2 \in C[0, 1]$ - функция, а L_2 - множество индексов удовлетворяющие лемме 3, с условиями m_2, p_2, A_2, B_2 и $\{\xi_i^2\}_{i=1}^\infty$. Обозначим $f_2 := \frac{1}{2^2} g_2$ и $F_2 := F_1 + f_2$. Пусть далее индекс q_2 выбран так, чтобы $\Lambda_{q_2}(F_2) \supset L_2$. Из пунктов $1 - 4$ леммы 3, выбора индексов m_1, m_2, p_1, p_2, q_1, q_2 и функций f_1, f_2 следует выполнение условий a) – e).

Теперь предположим, что построены величины f_k, F_k, L_k, p_k, q_k, A_k, B_k и $\{\xi_i^k\}_{i=1}^\infty$, $k = 1, 2, ..., n$, для которых выполнены соотношения $a) - e)$ и пусть $m_{n+1} = 2(n + 1)$. Поскольку $c_k(F_n) \to 0$, $k \to \infty$, то найдется индекс $K_0 > q_n$ такой, что $|c_k(F_n)| < m_{n+1}^{-10}$, для любого $k \ge K_0$. Далее выберем индексы $B_{n+1} > A_{n+1}$ так, чтобы

$$A_{n+1} > \max\{B_n, 2^{K_0+2}\},\ \frac{B_{n+1}}{A_{n+1}} > 2^{m_{n+1}^7+3} \text{ и } \frac{\gamma_{A_{n+1}}}{\gamma_{B_{n+1}}} \le 2. \tag{3.13}$$

Обозначив $p_{n+1} = [\log_2 A_{n+1}] + 1$, из (3.13) получим $[2^{p_{n+1}}, 2^{m_{n+1}^7+p_{n+1}+1}] \subset [A_{n+1}, B_{n+1}]$. Выберем последовательность $\{\xi_i^{n+1}\}_{i=1}^\infty$ следующим образом:

$$\xi_i^{n+1} = 0, \text{ если } i \le p_{n+1} \text{ и } \xi_i^{n+1} = m_{n+1}^2 c_i(F_n), \text{ если } i \ge p_{n+1}.$$

Применим теперь лемму 3 для начальных условий m_{n+1}, p_{n+1}, A_{n+1}, B_{n+1} и $\{\xi_i^{n+1}\}_{i=1}^\infty$ и пусть g_{n+1} - функция, а L_{n+1} - множество индексов, удовлетворяющие условиям леммы. Обозначим $f_{n+1} := \frac{1}{(n+1)^2} g_{n+1}$ и $F_{n+1} := F_n + f_{n+1}$ и

выберем индекс q_{n+1} так, чтобы $\Lambda_{q_{n+1}}(F_{n+1}) \supset L_{n+1}$. Выполнение условий $a)-e)$ очевидно.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in [0,1]$ и покажем, что f удовлетворяет второй части теоремы 1. Прежде всего из $a)$ следует, что $f \in \mathrm{C}[0,1]$. Возмем произвольную перестановку $\sigma \in D(f, \mathrm{H}_\infty, \Gamma)$ и заметим, что из условий $b)$, $c)$ и $d)$ следует, что величины $|c_n(f)\gamma_n|$ переставляются по порядку убывания в любом блоке L_n, и если $m > k$, то все величины $|c_n(f)\gamma_n|$ из блока L_k строго больше чем величины $|c_n(f)\gamma_n|$ из блока L_m. Из сказанного вытекает, что если подобрать индексы $q_n^{'}$ таким образом, чтобы $\Lambda_{q_n^{'}}(f,\sigma) \supset L_n$, $n = 1, 2, ...$, то учитывая $e)$, получим

$$\mu\{x \in [0,1] : \ G^*_{q_n^{'}}(f,\sigma,x) \geq \frac{1}{12}n\} \geq 1 - \frac{C}{n}, \tag{3.14}$$

что означает расходимость к $+\infty$ п.в. последовательности $G_N(f,\sigma,x)$. Теорема 1 доказана. □

Доказательство теоремы 2. Необходимость, очевидным образом, следует из второй части теоремы 1. Докажем достаточность. Напомним, что из условия $\tau(\Gamma) < +\infty$ следует, что $\gamma_n \searrow 0$ и в этом случае множества $D(f, \mathrm{H}_\infty, \Gamma)$ для $f \in L^1(0,1)$ понимаются с учетом замечания 1.

Поскольку условие $f \in L^1(0,1)$ не гарантирует стремление коэффицентов к нулю, то рассуждения из теоремы 1 не проходят. Поэтому поступим следующим образом. Обозначим

$$A_0 = \emptyset, \ A_n = \left\{ k \in \mathbb{N} \setminus (A_1 \cup ... \cup A_{n-1}) : \ |c_k(f)| \geq \frac{1}{n} \right\}, \ n = 1, 2, ...$$

Нас интересуют только бесконечные множества A_n. Для этого рассмотрим функцию

$$\psi(n) = \begin{cases} 0, & \text{если} \ \ \#A_n < \infty, \\ n, & \text{если} \ \ \#A_n = \infty. \end{cases}$$

Из определения $\psi(n)$ следует, что множество $A_{\psi(n)}$ либо пусто, либо бесконечно. Используя теорему 3 и тот факт, что ряд Фурье-Хаара функции f сходится к f п.в., получаем

$$\sum_{k \in A_{\psi(n)}} |c_k(f) h_k(x)| \leq n^2 \sum_{k \in A_{\psi(n)}} |c_k(f)|^2 |h_k(x)|^2 < +\infty \text{ п.в. }, n = 1, 2, ...$$

т.е. сходимость в блоках $A_{\psi(n)}$ абсолютна.

Фиксируем $\delta > 0$ и пусть число $N_0 > 1$ выбрано так, чтобы $|c_k(f)| < \delta$, для любого $k \in A_{\psi(n)}$ и $n \geq N_0$. Обозначим $B := \mathbb{N} \setminus (A_{\psi(1)} \cup ... \cup A_{\psi(N_0)})$ и

$$N(\varepsilon) = \min\{N \in B : \ |c_n(f)\gamma_n| \leq \varepsilon, \ \forall n > N, \ n \in B\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Очевидно, что

$$\{n \in B : \ |c_n(f)\gamma_n| > \varepsilon\} \subset \{1, 2, ..., N(\varepsilon)\}, \tag{3.15}$$

$$\frac{\varepsilon}{\gamma_{N(\varepsilon)}} \leq |c_{N(\varepsilon)}| \leq \delta. \tag{3.16}$$

Суммы $T_\varepsilon(f)(x)$ и $S_{N(\varepsilon)}(f)(x)$ разделим на две части следующим образом:

$$T_\varepsilon(f)(x) = \sum_{n \in B: \ |c_n(f)\gamma_n| > \varepsilon} c_n(f)h_n(x) + \Sigma_1,$$

$$S_{N(\varepsilon)}(f)(x) = \sum_{n=1, \ n \in B}^{N(\varepsilon)} c_n(f)h_n(x) + \Sigma_2.$$

Имеем

$$|T_\varepsilon(f)(x) - S_{N(\varepsilon)}(f)(x)| \leq |\Sigma_1 - \Sigma_2| +$$

$$\left| \sum_{n \in B: \ |c_n(f)\gamma_n| > \varepsilon} c_n(f)h_n(x) - \sum_{n=1, \ n \in B}^{N(\varepsilon)} c_n(f)h_n(x) \right|.$$

Учитывая, что сходимость в блоках $A_{\psi(n)}$ абсолютна и что N_0 фиксировано, получим, что первая разность стремится к нулю п.в., когда $\varepsilon \to 0$. Как и при доказательстве первой части теоремы 1, можно показать, что вторая разность меньше $C|c_{N(\varepsilon)}(f)| \leq C \cdot \delta$. Поскольку δ произвольно, получим что $T_\varepsilon(f)(x)$ стремятся к $f(x)$ п.в..

Рассмотрим теперь множества Ω_n определенные в (3.9). Если $\Omega_n \neq \emptyset$, то из теоремы 3 получим

$$\sum_{k \in \Omega_n} |c_k(f)h_k(x)|^2 = \sum_{k \in \Omega_n} \frac{\gamma_n^2}{\gamma_k^2} |c_n(f)|^2 |h_k(x)|^2 =$$

$$\gamma_n^2 |c_n(f)|^2 \sum_{k \in \Omega_n} \frac{1}{\gamma_k^2} |h_k(x)|^2 < +\infty, \text{ п.в. на } [0, 1].$$

из чего следует, что

$$\sum_{k \in \Omega_n} |h_k(x)|^2 < +\infty, \text{ п.в. на } [0, 1]. \tag{3.17}$$

Из сходимости $T_\varepsilon(f)(x)$ и соотношения (3.17) вытекает сходимость жадных аппроксимантов $G_N(f, \sigma, x)$ к функции f п.в. на $[0, 1]$, для любого $\sigma \in D(f, \mathrm{H}_\infty, \Gamma)$. Теорема 2 доказана. □

Автор выражает благодарность профессору А. Саакяну и С. Гогяну за постановку задачи и за ценные замечания при написании настоящей работы.

Abstract. The paper investigates the uniform and almost everywhere convergence of the greedy algorithm by the Haar system. Necessary and sufficient conditions for norming the functions of Haar system are obtained, which guarantee the uniform convergence for functions from $\mathrm{C}[0,1]$ and almost everywhere convergence for functions from $L^1[0,1]$.

Список литературы

[1] S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, "A remark on greedy approximation in Banach spaces", East J. on Approx. **5**, 1 – 15 (1999).

[2] P. Wojtaszczyk, "Greedy algorithms for general systems", J. Approx. Theory, **107**, 293 – 314 (2000).

[3] T. W. Körner, "Divergence of decreasing rearranged Fourier series", Annals of Mathematics, **144**, 167 – 180 (1996).

[4] T. W. Körner, "Decreasing rearranged Fourier series", The J. Fourier Analysis and Applications, **5**, 1 – 19 (1999).

[5] V. N. Temlyakov, "Nonlinear methods of approximation", Foundations of Computational Mathematics, **3** (1), 33 – 107 (2003).

[6] S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, "Convergence of greedy approximation I. The Trigonomeric System", Studia Math. **159** (2), 161 – 184 (2003).

[7] S. Kostyukovsky, A. Olevskii, "Note on decreasing rearrangement of Fourier series", J. of Applied Analysis **3** (1), 137 – 142 (1997).

[8] M. Nielsen, "An Example of an Almost Greedy Uniformly Bounded Orthonormal Basis for $L^p(0,1)$", arXiv:math.FA/0611890 **1** (28) (2006).

[9] T. Tao, "On the almost everywhere convergence of wavelet summation methods", Applied and Computational Harmonic Analysis, 384 – 387 (1996).

[10] S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, "Convergence of greedy approximation I. General Systems", IMI Preprints, 2002:08

[11] Г. Амирханян, "О сходимости гриди алгоритма по системе Уолша в пространствах L_p", Изв. НАН Арм., Математика **43** (3), 3 – 12 (2008).

[12] М. Г. Григорян, А. А. Саргсян, "Нелинейная аппроксимация непрерывных функций по системе Фабера-Шаудера", Математический сборник, 199:5, 3 – 26 (2008).

[13] С. Гогян, "О жадном алгоритме в $L^1(0,1)$ по подсистемам ситемы Хаара и о ω-квази-гриди базисах", Математические заметки (в печати)

[14] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные ряды, Москва (1999).

Поступила 5 октября 2009