

Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 2, 2010, стр. 67-76.

ПОСТРОЕНИЕ НЕТРИВИАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Х. А. ХАЧАТРЯН

Институт математики НАН Армении
E-mail: *Khach82@rambler.ru*

Аннотация. В статье изучена система нелинейных векторных интегро-дифференциальных уравнений с суммарно-разностным ядром, обладающая тривиальным (нулевым) решением. Построено нетривиальное решение этой системы в пространстве Соболева $\mathbf{W}_{\infty,2}^{\times n}(0, +\infty)$.

MSC2000 number: 35XX, 35G55, 35G50

Ключевые слова: Факторизация, пространство Соболева, сходимость итераций, нетривиальное решение.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается следующая система нелинейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка:

$$(1.1) \quad -\frac{d^2\varphi_i}{dx^2} + \lambda_i\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^n \left[\int_0^{+\infty} K_{ij}(x-t)G(\varphi_j(t))dt + \right. \\ \left. + \int_0^{+\infty} K_{ij}^\circ(x+t)G_0(\varphi_j(t))dt \right], \quad x \in (0, +\infty), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

относительно искомой вектор-функции $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))^T$ (T -знак транспонирования) с неотрицательными компонентами и начальным условием в нуле:

$$(1.2) \quad \varphi_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь λ_i -положительные числовые параметры ($i = 1, 2, \dots, n$). $K_{ij}(x)$, $\overset{\circ}{K}_{ij}(x)$ – непрерывные функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} &0 \leq K_{ij} \in L_1(-\infty, +\infty), \quad 0 \leq \overset{\circ}{K}_{ij} \in L_1(0, +\infty), \\ &\int_x^\infty e^{-\alpha\tau} \overset{\circ}{K}_{ij}(\tau) d\tau \leq \int_x^\infty e^{-\alpha\tau} K_{ij}(\tau) d\tau, \quad x \in (0, \infty), \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \\ &\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\lambda_i}. \end{aligned}$$

$$(1.4) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} = \lambda_i, \quad \text{где} \quad a_{ij} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} K_{ij}(x) dx, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$(1.5) \quad \nu(K_{ij}) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x K_{ij}(x) dx \leq 0,$$

причем существуют $i_0, j_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$, для которых $\nu(K_{i_0, j_0}) < 0$. G и G_0 – заданные непрерывные функции на некотором интервале $[0, \eta]$; $\eta > 0$, причем

$$(1.6) \quad G(x) \geq x, \quad G_0(x) \geq 0, \quad x \in [0, \eta],$$

$$(1.7) \quad \text{функции } G, G_0 \text{ – возрастают на интервале } [0, \eta],$$

$$(1.8) \quad G(\eta) = G_0(\eta) = \eta; \quad G(0) = G_0(0) = 0.$$

Решение задачи ищется в пространстве Соболева $\mathbf{W}_{\infty, 2}^{\times n}(0, +\infty)$, где

$$\mathbf{W}_{p, N}(0, \infty) \equiv \{f : f^{(k)} \in L_p(0, \infty), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N, \quad 1 \leq p \leq +\infty\},$$

$$\mathbf{W}_{p, N}^{\times n}(0, \infty) \equiv \mathbf{W}_{p, N}(0, \infty) \times \mathbf{W}_{p, N}(0, \infty) \times \dots \times \mathbf{W}_{p, N}(0, \infty).$$

Исследованию системы линейных интегральных уравнений с суммарно-разностным ядром (т.е. системы (1.1) без производной и при условии, что $G(x) \equiv G_0(x) = x$) были посвящены многочисленные работы (см. [1-3] и ссылки в них).

В настоящей работе рассматриваются вопросы существования и построения решения однородной задачи (1.1) - (1.2). Доказывается, что при выполнении условий (1.3) - (1.8), задача (1.1) - (1.2) в пространстве Соболева $\mathbf{W}_{\infty,2}^{\times n}(0, +\infty)$ обладает нетривиальным ограниченным и покомпонентно неотрицательным решением вида:

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))^T, \quad \varphi_i(x) = \int_0^x e^{-\alpha(x-t)} f_i(t) dt \in \mathbf{W}_{\infty,2}(0, +\infty),$$

где $0 \leq f_i(\tau) \leq \alpha\eta$, $f_i(\tau) \not\equiv 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. В конце работы приведены примеры функций G и G_0 .

2. ЗАДАЧА ФАКТОРИЗАЦИИ

Пусть E - одно из следующих банаховых пространств:

- i) $L_p(0, +\infty)$, $1 \leq p < +\infty$,
- ii) $M(0, +\infty)$,
- iii) $C_M(0, +\infty)$ — пространство непрерывных и ограниченных на $(0, +\infty)$ функций.

Обозначим через

$$E^{\times n} = E \times E \times E \times \dots \times E.$$

Введем классы Ω и Ω_0 следующих нелинейных матричных интегральных операторов:

$$\mathbf{K}_G \in \Omega, \quad \text{если} \quad (\mathbf{K}_G f)_i(x) = \sum_{j=1}^n \int_0^\infty K_{ij}(x-t) G(f_j(t)) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\mathring{\mathbf{K}}_{G_0} \in \Omega_0, \quad \text{если} \quad (\mathring{\mathbf{K}}_{G_0} f)_i(x) = \sum_{j=1}^n \int_0^\infty \mathring{K}_{ij}(x+t) G_0(f_j(t)) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$f \in E^{\times n}$, где $0 \leq K_{ij} \in L_1(-\infty, \infty)$, $0 \leq \mathring{K}_{ij} \in L_1(0, +\infty)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, а функции G и G_0 удовлетворяют условиям (1.6) - (1.8).

Используя результаты работы [3] и учитывая свойства функции G , нетрудно убедиться, что операторы из Ω не являются вполне непрерывными в банаховых пространствах $E^{\times n}$. В случае, когда $G_0(x) = x$, операторы из Ω_0 являются вполне непрерывными в $E^{\times n}$ (см. [3]). Обозначим через $\Omega^\pm$ - классы следующих

интегральных операторов типа Вольтерра: $V_{\pm} \in \Omega^{\pm}$, если

$$(V_+ f)_i(x) = \sum_{j=1}^n \int_0^x v_{ij}^+(x-t) f_j(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$(V_- f)_i(x) = \sum_{j=1}^n \int_x^{\infty} v_{ij}^-(t-x) f_j(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T \in E^{\times n}, \quad 0 \leq v_{ij}^{\pm} \in L_1(0, +\infty).$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие легко проверяемые утверждения: если $V_{\pm} \in \Omega^{\pm}$, $\mathbf{K}_G \in \Omega$, $\mathring{\mathbf{K}}_{G_0} \in \Omega_0$, то

- 1) $V_- \mathbf{K}_G \in \Omega$,
- 2) $V_- \mathring{\mathbf{K}}_{G_0} \in \Omega_0$,
- 3) если $G(x) \equiv x$, то $\mathbf{K}_G V_+ \in \Omega$,
- 4) если $G_0(x) \equiv x$, то $\mathring{\mathbf{K}}_{G_0} V_+ \in \Omega_0$.

Пусть $\mathbb{J}_{\alpha}$ - обратный оператор матричного дифференциального оператора $\alpha \mathbb{I} - \mathbf{D}$ в $\mathbf{W}_{\infty,1}^{\times n}(0, +\infty)$, где $\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\lambda_i}$, $\mathbb{I} = \text{diag}(I, I, \dots, I)$, I -единичный оператор, $\mathbf{D} = \text{diag}(D, D, \dots, D)$, $(D\varphi)(x) = \varphi'(x)$ - оператор дифференцирования.

Нетрудно убедиться, что $\mathbb{J}_{\alpha} \in \Omega^{-}$ и

$$(\mathbb{J}_{\alpha} f)_i(x) = \int_x^{\infty} e^{-\alpha(t-x)} f_i(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Из утверждений 1) и 2) следует, что если $\mathbf{K}_G \in \Omega$, $\mathring{\mathbf{K}}_{G_0} \in \Omega_0$, то

$$\mathbf{R}_G \equiv \mathbb{J}_{\alpha} \mathbf{K}_G \in \Omega, \quad \mathring{\mathbf{R}}_{G_0} \equiv \mathbb{J}_{\alpha} \mathring{\mathbf{K}}_{G_0} \in \Omega_0,$$

а ядра задаются посредством следующих формул:

$$R_{ij}(x) = \int_0^{\infty} K_{ij}(x+t) e^{-\alpha t} dt, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\mathring{R}_{ij}(x) = \int_0^{\infty} \mathring{K}_{ij}(x+t) e^{-\alpha t} dt, \quad x \in (0, +\infty), \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

С учетом вышесказанного, оператор $\mathbf{D}^2 - \mathbf{\Lambda} + \mathbf{K}_G + \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{G_0}$ (где $(\mathbf{\Lambda}f)_i(x) = \lambda_i f_i(x)$, $f \in E^{\times n}$) представим в следующем виде:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{D}^2 - \mathbf{\Lambda} + \mathbf{K}_G + \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{G_0} &= \mathbf{D}^2 - \alpha^2 \mathbb{I} + \alpha^2 \mathbb{I} - \mathbf{\Lambda} + \mathbf{K}_G + \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{G_0} = \\ &= (\mathbf{D} - \alpha \mathbb{I})(\mathbf{D} + \alpha \mathbb{I} - (\alpha^2 \mathbb{I} - \mathbf{\Lambda}) \mathbb{J}_\alpha - \mathbf{R}_G - \overset{\circ}{\mathbf{R}}_{G_0}). \end{aligned}$$

Так как $K_{ij} \in L_1(-\infty, +\infty)$, $\overset{\circ}{K}_{ij} \in L_1(0, +\infty)$, то представляя ядра R_{ij} и $\overset{\circ}{R}_{ij}$ в следующих видах

$$R_{ij}(x) = \int_x^\infty e^{-\alpha(z-x)} K_{ij}(z) dz, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad \overset{\circ}{R}_{ij}(x) = \int_x^\infty e^{-\alpha(z-x)} \overset{\circ}{K}_{ij}(z) dz,$$

$x \in (0, +\infty)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ и используя теорему Фубини нетрудно убедиться, что

$$(2.2) \quad R_{ij} \in \mathbf{W}_{1,1}(0, +\infty), \quad \overset{\circ}{R}_{ij} \in \mathbf{W}_{1,1}(0, +\infty), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$(2.3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ij}(\tau) d\tau = \frac{a_{ij}}{\alpha}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\text{если } \nu(K_{ij}) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \tau K_{ij}(\tau) d\tau < +\infty, \quad \text{то } \nu(R_{ij}) < +\infty \quad \text{и}$$

$$(2.4) \quad \nu(R_{ij}) = \frac{\nu(K_{ij})}{\alpha} - \frac{a_{ij}}{\alpha^2}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Итак, на основе вышесказанного можно утверждать, что справедлива

Лемма 1. *Оператор $\mathbf{D}^2 - \mathbf{\Lambda} + \mathbf{K}_G + \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{G_0}$ допускает факторизацию вида (2.1) и имеют место формулы (2.2) - (2.4).*

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 1. *Пусть условия (1.3) - (1.8) выполнены. Тогда задача (1.1) - (1.2) в пространстве Соболева $\mathbf{W}_{\infty,2}^{\times n}(0, +\infty)$ имеет нетривиальное неотрицательное решение вида:*

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))^T, \quad \varphi_j(x) = \int_0^x e^{-\alpha(x-t)} f_j(t) dt \in \mathbf{W}_{\infty,2}(0, +\infty),$$

где функции

$$0 \leq f_i(x) \leq \alpha \eta, \quad f_i(x) \not\equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\lambda_i}.$$

Доказательство. Уравнение (1.1) запишем в операторной форме:

$$(3.1) \quad (\mathbf{D}^2 - \mathbf{A} + \mathbf{K}_G + \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{G_0})\varphi = 0.$$

С учетом факторизации (2.1) уравнение (3.1) примет следующий вид:

$$(\mathbf{D} - \alpha\mathbb{I})(\mathbf{D} + \alpha\mathbb{I} - [(\alpha^2\mathbb{I} - \mathbf{A})\mathbb{J}_\alpha + \mathbf{R}_G + \overset{\circ}{\mathbf{R}}_{G_0}])\varphi = 0.$$

Обозначим

$$(3.2) \quad \psi \equiv (\mathbf{D} + \alpha\mathbb{I} - [(\alpha^2\mathbb{I} - \mathbf{A})\mathbb{J}_\alpha + \mathbf{R}_G + \overset{\circ}{\mathbf{R}}_{G_0}])\varphi.$$

Тогда вектор-функция ψ будет удовлетворять уравнению:

$$(3.3) \quad (\mathbf{D} - \alpha\mathbb{I})\psi = 0.$$

Так как решение задачи (1.1) - (1.2) ищется в пространстве Соболева $\mathbf{W}_{\infty,2}^{\times n}(0, +\infty)$, то из (3.2), с учетом (2.2), следует, что функция ψ должна принадлежать пространству $\mathbf{W}_{\infty,1}^{\times n}(0, +\infty)$. А уравнение (3.3) в пространстве $\mathbf{W}_{\infty,1}^{\times n}(0, +\infty)$ имеет лишь тривиальное решение: $\psi \equiv (0, 0, 0, \dots, 0)^T$. Перейдем к изучению уравнения (3.2). Обозначая

$$(3.4) \quad (\mathbf{D} + \alpha\mathbb{I})\varphi = f,$$

с учетом (1.2) мы приходим к следующей нелинейной системе интегральных уравнений:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} f_i(x) = & (\alpha^2 - \lambda_i) \int_x^\infty e^{-\alpha(t-x)} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f_i(\tau) d\tau dt + \\ & + \sum_{j=1}^n \left[\int_0^\infty R_{ij}(x-t) G \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f_j(\tau) d\tau \right) dt + \right. \\ & \left. + \int_0^\infty \overset{\circ}{R}_{ij}(x+t) G_0 \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f_j(\tau) d\tau \right) dt \right], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad x \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

Наряду с уравнением (3.5) рассмотрим следующую вспомогательную систему интегральных уравнений Винера-Хопфа:

$$(3.6) \quad S_i(x) = \sum_{j=1}^n \int_0^\infty T_{ij}(x-t) S_j(t) dt, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad x \in (0, +\infty),$$

где

$$(3.7) \quad 0 \leq T_{ij}(x) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha z} R_{ij}(x-z) dz + \frac{\alpha^2 - \lambda_i}{2\alpha} e^{-\alpha x} \theta(x) \delta_{ij} + \frac{\alpha^2 - \lambda_i}{2\alpha} e^{\alpha x} \theta(-x) \delta_{ij},$$

$i, j = 1, 2, \dots, n$, $x \in (-\infty, +\infty)$, δ_{ij} - символ Кронекера, а $\theta(x)$ - функция Хевисайда.

Известно, что если

$$(3.8) \quad r(C) = 1, \quad C = (C_{ij})_{i,j=1}^{n \times n}, \quad C_{ij} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} T_{ij}(\tau) d\tau, \quad \nu(T_{ij}) \leq 0$$

и существуют $i_0, j_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ такие, что $\nu(T_{i_0, j_0}) < 0$, (где $r(C)$ -спектральный радиус матрицы C), то система уравнений имеет покомпонентно положительное, возрастающее и ограниченное решение $S(x) = (S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x))^T$ (см. [4-5]).

Из (3.7), (3.8) сразу следует, что

$$C_{ij} = \frac{a_{ij}}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2 - \lambda_i}{\alpha^2} \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно, с учетом (1.4), имеем $r(C) = 1$. Из (2.4), (3.7), с учетом теоремы Фубини, получим

$$\nu(T_{ij}) = \frac{\nu(K_{ij})}{\alpha^2}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно, условие (3.8) также выполняется. Пусть $S(x)$ - ограниченное решение системы (3.6).

Обозначим

$$c = \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{x \in (0, +\infty)} S_i(x).$$

Из линейности системы (3.6) следует, что функция

$$(3.9) \quad S^*(x) = (S_1^*(x), S_2^*(x), \dots, S_n^*(x))^T, \quad S_j^*(x) = \frac{\eta\alpha}{c} S_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

также удовлетворяет этой системе.

Рассмотрим следующие итерации:

$$(3.10) \quad f_i^{(p+1)}(x) = (\alpha^2 - \lambda_i) \int_x^{\infty} e^{-\alpha(t-x)} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f_i^{(p)}(\tau) d\tau dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \left[\int_0^\infty R_{ij}(x-t) G \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f_j^{(p)}(\tau) d\tau \right) dt + \right. \\ \left. + \int_0^\infty \mathring{R}_{ij}(x+t) G_0 \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f_j^{(p)}(\tau) d\tau \right) dt \right], \quad p = 0, 1, 2, \dots,$$

$$f_j^{(0)}(x) \equiv \alpha\eta, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Убедимся, что

$$\mathbf{i)} \quad S_i^*(x) \leq f_i^{(p)}(x) \leq \alpha\eta, \quad p = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\mathbf{ii)} \quad f_i^{(p)} \downarrow \text{ по } p, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Сперва докажем утверждение **i)**. В случае $p = 0$ утверждение **i)** сразу следует из (3.9), (3.10). Предположим, что неравенство **i)** справедливо для $p = k$ и убедимся в его достоверности в случае $p = k + 1$.

Из (3.10), с учетом (1.3) получим

$$f_i^{(k+1)}(x) \leq \frac{(\alpha^2 - \lambda_i)\alpha\eta}{\alpha^2} + \sum_{j=1}^n \left(\int_0^\infty R_{ij}(x-t) G(\eta) dt + \int_0^\infty \mathring{R}_{ij}(x+t) G_0(\eta) dt \right) = \\ = \left(1 - \frac{\lambda_i}{\alpha^2} \right) \alpha\eta + \eta \sum_{j=1}^n \left(\int_{-\infty}^x R_{ij}(y) dy + \int_x^\infty \mathring{R}_{ij}(y) dy \right) \leq \\ \leq \left(1 - \frac{\lambda_i}{\alpha^2} \right) \alpha\eta + \eta \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ij}(\tau) d\tau = \alpha\eta.$$

С другой стороны, имеем

$$f_i^{(k+1)}(x) \geq (\alpha^2 - \lambda_i) \int_x^\infty e^{-\alpha(t-x)} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} S_i^*(\tau) d\tau dt + \\ + \sum_{j=1}^n \left[\int_0^\infty R_{ij}(x-t) G \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} S_j^*(\tau) d\tau \right) dt + \right. \\ \left. + \int_0^\infty \mathring{R}_{ij}(x+t) G_0 \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} S_j^*(\tau) d\tau \right) dt \right] \geq \\ \geq \sum_{j=1}^n \left[\int_0^\infty R_{ij}(x-t) \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} S_j^*(\tau) d\tau dt + \int_0^\infty \mathring{R}_{ij}(x+t) \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} S_j^*(\tau) d\tau dt \right] +$$

$$+(\alpha^2 - \lambda_i) \int_x^\infty e^{-\alpha(t-x)} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} S_i^*(\tau) d\tau dt \geq \sum_{j=1}^n \int_0^\infty T_{ij}(x-t) S_j^*(t) dt = S_i^*(x).$$

Теперь докажем утверждение **ii**). При $p = 0$ имеем $f_i^{(1)}(x) \leq \alpha\eta = f_i^{(0)}$. Предположим, что $f_i^{(p)}(x) \leq f_i^{(p-1)}(x)$. Тогда из (3.10), с учетом (1.7) и утверждения **i**) получим

$$\begin{aligned} f_i^{(p+1)}(x) &\leq (\alpha^2 - \lambda_i) \int_x^\infty e^{-\alpha(t-x)} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f_i^{(p-1)}(\tau) d\tau dt + \\ &+ \sum_{j=1}^n \left[\int_0^\infty R_{ij}(x-t) G \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f_j^{(p-1)}(\tau) d\tau \right) dt + \right. \\ &\left. + \int_0^\infty \mathring{R}_{ij}(x+t) G_0 \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f_j^{(p-1)}(\tau) d\tau \right) dt \right] = f_i^{(p)}(x), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность вектор-функций $\{f_i^{(p)}(x)\}_0^\infty$ имеет точечный предел: $\lim_{p \rightarrow \infty} f^{(p)}(x) = f(x)$, где

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T, \quad S_i^*(x) \leq f_i(x) \leq \alpha\eta, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Согласно теореме Б. Леви (см.[6]) предельная вектор-функция удовлетворяет системе уравнений (3.5).

Поскольку $h_{ij} = dR_{ij}/dx$; $\mathring{h}_{ij} = d\mathring{R}_{ij}/dx$ — непрерывные и суммируемые функции на множествах $(-\infty, +\infty)$ и $(0, +\infty)$ соответственно (ибо $R_{ij} \in \mathbf{W}_{1,1}(-\infty, +\infty)$, $\mathring{R}_{ij} \in \mathbf{W}_{1,1}(0, +\infty)$, а $K_{ij}, \mathring{K}_{ij}$ — непрерывные суммируемые функции), причем интегралы

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty h_{ij}(x-t) G \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f_j(\tau) d\tau \right) dt, \\ &\int_0^\infty \mathring{h}_{ij}(x+t) G_0 \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f_j(\tau) d\tau \right) dt, \end{aligned}$$

равномерно сходятся, а $f_i \in M(0, +\infty)$, следовательно, с учетом теоремы о дифференцировании под знаком интеграла (см.[7]), из (3.5) следует, что существует $\frac{df_i}{dx} \in M(0, +\infty)$, стало быть $f_i \in \mathbf{W}_{\infty,1}(0, +\infty)$. Решая уравнение (3.4), с учетом (1.2), приходим к завершению доказательства. $\square$

Ниже приведем несколько примеров функции G :

- (1) $G(x) = x^\alpha, \quad \eta = 1, \quad x \in (0, +\infty), \quad 0 < \alpha < 1,$
- (2) $G(x) = x + \sin x, \quad \eta = \pi, \quad x \in (0, +\infty),$

$$(3) \quad G(x) = x + \frac{1}{2\eta}(x - \eta)^2(1 - e^{-x}), \quad \eta > 0.$$

Поскольку условия, накладываемые на функцию G_0 более слабые по сравнению с условиями на функцию G , то в качестве G_0 можно взять, в частности, функцию G . Тем не менее приведем несколько примеров функции G_0 :

$$(1) \quad G_0(x) = x^\alpha, \quad \alpha \neq 1, \quad \alpha > 0, \quad \eta = 1,$$

$$(2) \quad G_0(x) = \eta \sin x, \quad \eta = \frac{\pi}{2},$$

$$(3) \quad G_0(x) = \eta \ln(x + 1), \quad \eta = e - 1,$$

$$(4) \quad G_0(x) = \eta \operatorname{tg} x, \quad \eta = \frac{\pi}{4}.$$

Автор выражает глубокую благодарность рецензенту за полезные замечания.

Abstract. The paper studies a system of nonlinear, vector integro-differential equations with sum and difference kernel and possessing the trivial solution. A nontrivial solution of the system in the Sobolev space $\mathbf{W}_{\infty,2}^{\times n}(0, +\infty)$ is constructed.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. С. Литвинчук. Краевые Задачи и Сингулярные Интегральные Уравнения со Сдвигом, Москва, Наука (1977).
- [2] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский, Интегральные Операторы в Пространствах Суммируемых Функций, Москва, Наука (1966).
- [3] Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский, Уравнения Типа Свертки, Москва, Наука (1978).
- [4] D. V. Lindley, "The theory of queue whith a single server", Proc Cambridge. Phil. Soc., **48**, 277 - 289 (1952).
- [5] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги науки и техники, Математический анализ, **22**, 175 - 244 (1984).
- [6] А. Н. Колмогоров, В. С. Фомин. Элементы Теории Функций и Функционального Анализа, Москва, Наука (1981).
- [7] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения Математической Физики, М. (1977).

Поступила 1 декабря 2008