Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 2, 2010, стр. 51-66.

ВЫРОЖДЕНИЕ ПОЛУЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

Г. А. КАРАПЕТЯН, О. Г. ТАНАНЯН

Российско-Армянский (Славянский) университет
E-mail: *HTananyan@yahoo.com*

Аннотация. В работе описывается алгоритм асимптотического разложения по ε ($\varepsilon > 0$) решения u_ε задачи Дирихле для линейного дифференциального полуэллиптического уравнения $L_\varepsilon u_\varepsilon = h$ с малым параметром ε при старших производных в прямоугольном параллелепипеде, исходя из решения вырожденной (при $\varepsilon \to 0$) задачи Дирихле для полуэллиптического уравнения более низкого порядка $L_0 u = h$. Доказаны теоремы равномерной разрешимости и регулярного вырождения.

MSC2000 number: 35H10, 35B25

Ключевые слова: полуэллиптический оператор, малый параметр, функция типа погранслоя, регулярное вырождение, равномерная разрешимость, асимптотическое разложение.

1. Введение

В работе [1] предложен метод построения асимптотического разложения решений линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных в областях с гладкой границей. В работах [2 – 5] исследована аналогичная задача для эллиптических уравнений в областях, имеющих угловые точки. В данной работе, опираясь на метод в [1], приводится алгоритм построения асимптотического разложения решений для одного класса полуэллиптических уравнений в прямоугольном параллелепипеде, с малым параметром при старших производных.

Ниже использованы следующие стандартные обозначения: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел, $\mathtt{i}$ – мнимая единица. Для $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n) \in \mathbb{N}^n$ и $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ положим

$$|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n, \quad x^{(j)} = (x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n), \quad 1 \le j \le n,$$

$$|x| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\alpha : \mu) = \frac{\alpha_1}{\mu_1} + ... + \frac{\alpha_n}{\mu_n}, \quad \xi^\alpha = \xi_1^\alpha ... \xi_n^\alpha, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n},$$

где $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $1 \leq j \leq n$.

Через $\mathbb{C}(G)$ обозначим пространство равномерно непрерывных в области G функций f с нормой

$$\|f\|_{\mathbb{C}(G)} \equiv \sup_{x \in G} |f(x)|.$$

Для вектора $l = (l_1, ..., l_n) \in \mathbb{N}^n$ и области $G \subset \mathbb{R}^n$ положим

$$W_2^l(G) := \left\{ f \in L_2(G) : \|f\|_{W_2^l(G)} := \|f\|_{L_2(G)} + \sum_{j=1}^{n} \|D_j^{l_j} f\|_{L_2(G)} < \infty \right\}.$$

Определение 1. *(см. [1, стр. 7]). Пусть $v_\varepsilon(x) = v_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n)$ – s раз дифференцируемая функция ($s \in \mathbb{N}$) в области $Q \subset \mathbb{R}^n$. Функция v_ε типа погранслоя порядка k ($k < s$), если:*

(1) *функция v_ε и ее частные производные, до порядка s включительно, равномерно стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$ на любом замкнутом подмножестве Q, не содержащем точек ∂Q (граница области Q);*
(2) *частные производные k-го порядка функции v_ε ограничены в Q при $\varepsilon \to 0$;*
(3) *частные производные j-го порядка функции v_ε (при $j < k$) равномерно (при $\varepsilon \to 0$) стремятся к нулю на $\overline{Q}$.*

Пример 1. *На положительной полуоси типичными примерами функций типа погранслоя порядка k являются функции:*

$$\varepsilon^k e^{-\frac{\lambda t}{\varepsilon}}, \qquad \varepsilon^k P\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) e^{-\frac{\lambda t}{\varepsilon}},$$

где $\lambda > 0$, а P – многочлен.

Определение 2. *(см. [6, стр. 142]). Линейный дифференциальный оператор*

$$P(D) = \sum_{(\alpha:\mu) \leq 1} p_\alpha D^\alpha \qquad (\mu \in \mathbb{N}^n)$$

называется полуэллиптическим, если

$$P_0(\xi) \equiv \sum_{(\alpha:\mu) \leq 1} p_\alpha (\mathtt{i}\xi)^\alpha \neq 0, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad |\xi| \neq 0.$$

2. Постановка задачи

2.1. Пусть

$$L_0 = \sum_{j=1}^{n} a_{0,j} \frac{\partial^{2k_j}}{\partial x_j^{2k_j}}, \qquad k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{N}^n,$$

и

$$L_\varepsilon = L_0 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{2l_j} \varepsilon^s a_{s,j} \frac{\partial^{2k_j+s}}{\partial x_j^{2k_j+s}}, \qquad l = (l_1, ..., l_n) \in \mathbb{N}^n \tag{2.1}$$

– линейные дифференциальные операторы с вещественными коэффициентами ($\varepsilon > 0$ – малый параметр) для которых:

$$(-1)^{k_j+s} a_{2s,j} \geq 0, \qquad a_{0,j} \neq 0, \qquad a_{2l_j,j} \neq 0, \quad s = 1, ..., l_j;\ j = 1, ..., n \tag{2.2}$$

(очевидно, что в силу условия (2.2) операторы L_0 и L_ε полуэллиптические), а E, E_1 и E_2 – некоторые банаховые пространства функций определенные на $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_j < 1,\ j = 1, ..., n\}$.

Рассмотрим следующие краевые задачи:

Задача A_0**:** Найти решение $u \in E_1$ уравнения

$$L_0 u = h \qquad (h \in E), \tag{2.3}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\left. \frac{\partial^s u}{\partial x_r^s} \right|_{x_r = p} = 0, \qquad s = 0, 1, ..., k_r - 1;\ r = 1, ..., n;\ p = 0, 1. \tag{2.4}$$

Задача A_ε**:** Найти решение $u_\varepsilon \in E_2$ уравнения

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = h \qquad (h \in E), \tag{2.5}$$

удовлетворяющее граничным условиям (2.4) и

$$\left. \frac{\partial^{k_r+s} u_\varepsilon}{\partial x_r^{k_r+s}} \right|_{x_r = p} = 0, \qquad s = 0, 1, ..., l_r - 1;\ r = 1, ..., n;\ p = 0, 1. \tag{2.6}$$

2.2. Пусть $1 \leq r \leq n$, $p \in \{0, 1\}$ и $t_{r,p} = \frac{p + (-1)^p x_r}{\varepsilon}$. Так как

$$\frac{\partial^s}{\partial x_r^s} = (-1)^{ps} \varepsilon^{-s} \frac{\partial^s}{\partial t_{r,p}^s} \qquad (s \geq 1),$$

то оператор L_ε можно представить в следующем виде:

$$\varepsilon^{2k_r} L_\varepsilon u = \sum_{s=0}^{2l_r} (-1)^{ps} a_{s,r} \frac{\partial^{2k_r+s} u}{\partial t_{r,p}^{2k_r+s}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^{n} \sum_{s=1}^{2l_j} \varepsilon^{2k_r+s} a_{s,j} \frac{\partial^{2k_j+s} u}{\partial x_j^{2k_j+s}}.$$

Отсюда, соединяя члены с одинаковыми степенями по ε, получаем:

$$\varepsilon^{2k_r} L_\varepsilon u = M_{r,p}u + \sum_{s=2k_r}^{N_r} \varepsilon^s R_{r,s} u \qquad \left(N_r = 2k_r + 2 \max_{\substack{1\le i\le n \\ i\neq r}} l_i \right), \tag{2.7}$$

где

$$M_{r,p}u = \sum_{s=0}^{2l_r} (-1)^{ps} \, a_{s,r} \frac{\partial^{2k_r+s} u}{\partial t_{r,p}^{2k_r+s}}, \tag{2.8}$$

$$R_{r,s}u = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq r \\ s-2k_r\le 2l_j}}^{n} a_{s-2k_r,j} \frac{\partial^{2k_j+s-2k_r} u}{\partial x_j^{2k_j+s-2k_r}}, & \text{при } 2k_r \le s \le N_r, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{2.9}$$

Введем следующее уравнение (которое является характеристическим уравнением оператора $M_{r,p}$):

$$\lambda^{2k_r} Q_{r,p}(\lambda) := \lambda^{2k_r} \sum_{s=0}^{2l_r} (-1)^{ps} \, a_{s,r} \lambda^s = 0. \tag{2.10}$$

Следуя терминологии работы [1], введем следующие определения:

Определение 3. *Вырождение задачи A_ε в задачу A_0 назовем регулярным, если при $r = 1, \dots, n$ каждый из характеристических многочленов $Q_{r,0}(\lambda)$ и $Q_{r,1}(\lambda)$ имеет ровно l_r попарно различных корней с отрицательными вещественными частями.*

Определение 4. *Задача A_0 называется разрешимой, если для любого $h \in E$ уравнение (2.1) при граничных условиях (2.4) имеет решение $w_0 \in E_1$, при этом существует постоянная $C > 0$ такая, что*

$$\|w_0\|_{E_1} \le C \|h\|_E, \qquad h \in E.$$

Определение 5. *Задача A_ε называется равномерно разрешимой, если существует число $\varepsilon_0 > 0$, при котором*

а) задача A_ε разрешима при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, т.е. для любого $h \in E$ уравнение (2.5) при граничных условиях (2.4) и (2.6) имеет решение $u_\varepsilon \in E_2$;

б) существуют число $C_1 > 0$, и функциональные пространства с нормами $\|.\|_B$ и $\|.\|_{B_\varepsilon}$ такие, что для всех $u_\varepsilon \in E_2$, удовлетворяющих граничным условиям (2.4) и (2.6), выполняется неравенство

$$\|u_\varepsilon\|_{B_\varepsilon} \le C_1 \|L_\varepsilon u_\varepsilon\|_B, \qquad 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0.$$

Для нижеприводимого алгоритма (для построения асимптотического разложения решения задачи A_ε необходимо выполнение следующих условий (см. [1]):

I. Задача A_0 разрешима;

II. Вырождение задачи A_ε в задачу A_0 регулярное;

III. Задача A_ε равномерно разрешима;

IV. Решение задачи A_0 при достаточно гладкой правой части достаточно гладко.

В следующих двух замечаниях приведены достаточные условия для выполнения условий I и IV, а достаточные условия для выполнения условий II и III приведены в следующем параграфе.

В гильбертовом пространстве H скалярное произведение обозначим через $(.,.)_H$.

Замечание 1. *(см. [7] и [8]). Пусть $E \equiv L_2(\Omega)$, $E_1 \equiv W_2^k(\Omega)$ и $E_2 \equiv W_2^{k+l}(\Omega)$. Тогда*

1) если существует число $\gamma_1 > 0$ такое, что при всех $w \in W_2^k(\Omega)$, удовлетворяющих условиям (2.4), $(L_0 w, w)_{L_2(\Omega)} \geq \gamma_1 (w,w)_{W_2^k(\Omega)}$, то задача A_0 разрешима,

2) если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\gamma_2(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $u \in W_2^{k+l}(\Omega)$, удовлетворяющих условиям (2.4) и (2.6), $(L_\varepsilon u, u)_{L_2(\Omega)} \geq \gamma_2 (u,u)_{W_2^{k+l}(\Omega)}$, то задача A_ε разрешима.

Замечание 2. *Если $h \in \mathbb{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$, то для любого $\mu \in \mathbb{N}$ решение w задачи A_0 принадлежит классу $W_2^\mu(\Omega)$ (см. [9]), следовательно, в силу теоремы вложения (см. [10, стр. 129]), $D^\alpha w \in \mathbb{C}\left(\overline{\Omega}\right)$ для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.*

3. Условия регулярного вырождения и равномерной разрешимости

Оператор L_ε представим в следующем виде:

$$L_\varepsilon = L_0 + \Lambda_\varepsilon + M_\varepsilon, \tag{3.1}$$

где

$$\Lambda_\varepsilon \equiv \sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{l_j} \varepsilon^{2s} a_{2s,j} \frac{\partial^{2(k_j+s)}}{\partial x_j^{2(k_j+s)}}, \qquad M_\varepsilon \equiv \sum_{j=1}^{n}\sum_{s=0}^{l_j-1} \varepsilon^{2s+1} a_{2s+1,j} \frac{\partial^{2(k_j+s)+1}}{\partial x_j^{2(k_j+s)+1}}.$$

Для краткости записи положим $\|.\| \equiv \|.\|_{L_2(\Omega)}$ и $(.,.) \equiv (.,.)_{L_2(\Omega)}$.

Теорема 1. *Пусть: а) существует постоянная* $\gamma_1 > 0$ *такая, что для всех* $w \in W_2^k(\Omega)$, *удовлетворяющих условиям (2.4), имеет место оценка*

$$(L_0 w, w)_{L_2(\Omega)} \geq \gamma_1 \left(\sum_{j=1}^{n} \left\| D_j^{k_j} w \right\|^2 + \|w\|^2 \right), \tag{3.2}$$

б) существуют постоянные $\varepsilon_0 > 0$ *и* $\gamma_2 > 0$ *такие, что*

$$\begin{aligned} \Lambda_\varepsilon(\mathtt{i}\xi) &:= \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{l_j} \varepsilon^{2s} a_{2s,j} (\mathtt{i}\xi)^{2(k_j+s)} \\ &\geq \gamma_2 \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^{2l_j} |\xi_j|^{2(k_j+l_j)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Тогда существуют постоянные $C_1 > 0$ *и* $C_2 > 0$ *такие, что для всех* $u \in W_2^{2k+2l}(\Omega)$, *удовлетворяющих условиям (2.4) и (2.6), справедлива оценка:*

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^{2l_j} \left\| D_j^{k_j+l_j} u \right\|^2 + \sum_{j=1}^{n} \left\| D_j^{k_j} u \right\|^2 + \|u\|^2 & \\ \leq C_1 (L_\varepsilon u, u) \leq C_2 \|L_\varepsilon u\|^2, &\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \end{aligned} \tag{3.4}$$

Доказательство. Пусть $\widetilde{u}$ – преобразование Фурье функции $u \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. В силу равенства Парсеваля, из оценки (3.3), имеем:

$$(\Lambda_\varepsilon u, u) = (\Lambda_\varepsilon(\mathtt{i}\xi)\widetilde{u}(\xi), \widetilde{u}(\xi)) \geq \gamma_2 \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^{2l_j} \left(|\xi_j|^{2(k_j+l_j)} \widetilde{u}(\xi), \widetilde{u}(\xi) \right) =$$

$$= \gamma_2 \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^{2l_j} \left\| D_j^{k_j+l_j} u \right\|^2, \qquad u \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Отсюда непосредственно следует, что для всех $u \in W_2^{2k+2l}(\Omega)$, удовлетворяющих условиям (2.4) и (2.6), справедлива оценка

$$(\Lambda_\varepsilon u, u) \geq \gamma_2 \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^{2l_j} \left\| D_j^{k_j+l_j} u \right\|^2, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Очевидно, что если функция $u \in W_2^{2k+2l}(\Omega)$ удовлетворяет условиям (2.4) и (2.6), то $(M_\varepsilon u, u) = 0$.

Используя представление (3.1), в силу вышесказанного и оценки (3.2), получаем первое неравенство в (3.4). Так как для любого числа $\omega > 0$

$$(L_\varepsilon u, u) \leq \frac{1}{2} \left(\omega^2 \|u\|^2 + \frac{1}{\omega^2} \|L_\varepsilon u\|^2 \right), \quad u \in W_2^{2k+2l}(\Omega), \tag{3.5}$$

то, используя уже доказанную часть оценки (3.4), получаем второе неравенство в (3.4). Теорема доказана. □

Через

$$L_\varepsilon\left(\mathtt{i}\xi\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=0}^{2l_j}\varepsilon^s a_{s,j}\left(\mathtt{i}\xi\right)^{2k_j+s}$$

обозначим полный символ оператора L_ε.

Теорема 2. *Пусть существуют положительные числа $C_1,...,C_n$ такие, что при всех $\xi\in\mathbb{R}^n$ и $\varepsilon>0$*

$$ReL_\varepsilon\left(0,...,0,\mathtt{i}\xi_j,0,...,0\right)\geq C_j\sum_{s=0}^{l_j}\varepsilon^{2s}\left|\xi_j\right|^{2(k_j+s)},\quad j=1,...,n. \tag{3.6}$$

Тогда вырождение задачи A_ε в задачу A_0 регулярно.

Доказательство. Пусть $1\leq j\leq n$. Так как

$$L_\varepsilon\left(0,...,0,\mathtt{i}\xi_j,0,...,0\right)=\sum_{s=0}^{2l_j}\varepsilon^s a_{s,j}\left(\mathtt{i}\xi_j\right)^{2k_j+s}=\left(\mathtt{i}\xi_j\right)^{2k_j}Q_{j,0}\left(\mathtt{i}\varepsilon\xi_j\right),$$

где $Q_{j,0}$ определено в (2.10), то из условия (3.6), в силу леммы 4 работы [1], непосредственно следует, что многочлен $Q_{j,0}$ имеет ровно l_j корней с отрицательными вещественными частями. Аналогичное утверждение верно и для многочлена $Q_{j,1}$. Теорема доказана. □

Следствие 1. *Если $h\in\mathbb{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$, то условия $I-IV$ выполняются.*

Доказательство. Из полуэллиптичности операторов L_0 и L_ε (точнее из условия (2.2)) непосредственно следуют оценки (3.2), (3.3) и (3.6). Отсюда в силу теорем 1 и 2 следует выполнение условий II и III, а из замечаний 1 и 2 следуют условия I и IV. □

4. Алгоритм построения асимптотического разложения решения задачи A_ε

Решение уравнения (2.5) при условиях (2.4) и (2.6) можно представить как сумму частного решения $\overline{w}_\varepsilon$ уравнения

$$L_\varepsilon\overline{w}_\varepsilon=h \tag{4.1}$$

и такого решения $\overline{v}_\varepsilon$ однородного уравнения

$$L_\varepsilon\overline{v}_\varepsilon=0, \tag{4.2}$$

чтобы $\overline{w}_\varepsilon+\overline{v}_\varepsilon$ удовлетворяла граничным условиям (2.4) и (2.6).

Суть нижеприводимого алгоритма состоит в следующем: решение уравнения (4.1) ищется в виде:

$$\overline{w}_\varepsilon \sim \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s w_s,$$

где w_s – решение задачи типа A_0, а решение уравнения (4.2) ищется в виде:

$$\overline{v}_\varepsilon \sim \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \left(v_s + \varepsilon \alpha_s\right),$$

где v_s – функция типа погранслоя, при этом функция $w_s + v_s$ удовлетворяет граничным условиям (2.6), $\varepsilon\alpha_s$ – такой многочлен, что $w_s + v_s + \varepsilon\alpha_s$ удовлетворяет всем граничным условиям задачи A_ε.

Исходя из сказанного, решение u_ε задачи A_ε будем искать в виде:

$$u_\varepsilon = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i w_i + \sum_{r=1}^{n} \sum_{p=0}^{1} \sum_{i=0}^{K_r} \varepsilon^i \left(v_{i,r,p} + \varepsilon \alpha_{i,r,p}\right) + z_m, \tag{4.3}$$

где z_m – остаточный член, а $K_r \geq m$, $1 \leq r \leq n$.

Пусть $\eta \in (0, 1/3]$, а $\phi(z)$ – бесконечно дифференцируемая функция одного переменного, которая равна 1 при $z \leq \frac{\eta}{2}$ и равна 0 при $z \geq \eta$.

Обозначим $v_{i,r,p}(x) = \phi\left(p + (-1)^p x_r\right) \varepsilon^{k_r} \overline{v}_{i,r,p}(x)$, $p \in \{0, 1\}$, $i > 0, 1 \leq r \leq n$,

$$\alpha_i \equiv \sum_{r=1}^{n} \sum_{p=0}^{1} \phi\left(p + (-1)^p x_r\right) \alpha_{i,r,p}, \qquad v_i \equiv \sum_{r=1}^{n} \sum_{p=0}^{1} v_{i,r,p}, \qquad i = 0, 1, \ldots.$$

Формальная подстановка (4.3) в (2.1), с учетом представления (2.7) оператора L_ε, дает:

$$\begin{aligned} h = L_\varepsilon u_\varepsilon = &\left\{ \left(L_0 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{2l_j} \varepsilon^s a_{s,j} \frac{\partial^{2k_j+s}}{\partial x_j^{2k_j+s}} \right) \left[\left(w_0 + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^i w_i \right) + \varepsilon \sum_{i=0}^{\max\limits_{1\leq r\leq n} K_r} \right] \right\} \\ &+ \left\{ \sum_{r=1}^{n} \sum_{p=0}^{1} \left[\varepsilon^{-k_r} \left(M_{r,p} + \sum_{s=1}^{N_r} \varepsilon^s R_{r,s} \right) \left(\sum_{i=0}^{K_r} \varepsilon^i \phi\left(p + (-1)^p x_r\right) \overline{v}_{i,r,p} \right) \right] \right\} + L_\varepsilon z_m. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Рассматривая сумму в первой фигурной скобке (4.4), как многочлен от ε, и приравнивая его коэффициент при ε^i $(i > 0)$ к нулю, получаем:

$$L_0 w_0 = h,$$

а для $i = 1, \ldots, m$, имеем

$$L_0 w_i = h_i := -\sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{\min\{i, 2l_j\}} a_{s,j} \frac{\partial^{2k_j+s} w_{i-s}}{\partial x_j^{2k_j+s}} - \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=0}^{\min\{i, 2l_j\}-1} a_{s,j} \frac{\partial^{2k_j+s} \alpha_{i-s-1}}{\partial x_j^{2k_j+s}}. \tag{4.5}$$

Из второй фигурной скобки (учитывая определение функции ϕ) в окрестности границы $\Gamma_{r,p} := \{x : x_r = 0,\ 0 \le x_j \le 1, 1 \le j \le n,\ j \ne r\}$ имеем:

$$(4.6)\quad \begin{aligned} M_{r,p}\overline{v}_{0,r,p} &= 0, \qquad r = 1,...,n;\ p = 0,1, \\ M_{r,p}\overline{v}_{i,r,p} &= -\sum_{s=0}^{i} R_{r,s+k_r}\overline{v}_{i-s,r,p}, \quad r = 1,...,n;\ p = 0,1;\ i = 1,2,.... \end{aligned}$$

Корни с отрицательными вещественными частями многочлена $Q_{r,p}$ обозначим через $-\lambda_{r,p,1},...,-\lambda_{r,p,l_r}$, где $r = 1,\dots,n$; $p = 0,1$. В силу определения 3 имеем, что

$$(4.7)\qquad \lambda_{r,p,q} \ne \lambda_{r,p,j} \qquad (1 \le q \ne j \le l_r;\ r = 1,...,n;\ p = 0,1)\,.$$

Пусть w_0 – решение задачи A_0. Тогда функцию $\overline{v}_{0,r,p}$, при $r = 1,\dots,n;\ p = 0,1$, будем искать в следующем виде:

(4.8)

$$\varepsilon^{k_r}\overline{v}_{0,r,p} = \varepsilon^{k_r}\sum_{s=1}^{l_r} c_{0,r,p,s}\left(x^{(r)}\right)e^{-\lambda_{r,p,s}t_{r,p}} = \varepsilon^{k_r}\sum_{s=1}^{l_r} c_{0,r,p,s}\left(x^{(r)}\right)e^{-\lambda_{r,p,s}\frac{p+(-1)^p x_r}{\varepsilon}},$$

так, чтобы $w_0 + \varepsilon^{k_r}\overline{v}_{0,r,p}$ удовлетворял условиям (2.6), т.е.

$$(4.9)\qquad \left.\frac{\partial^{k_r+s}\left(w_0 + \varepsilon^{k_r}\overline{v}_{0,r,p}\right)}{\partial x_r^{k_r+s}}\right|_{x_r=p} = 0, \qquad s = 0,1,...,l_r - 1.$$

Из системы (4.9), в силу условия IV и замечания 2, получаем:

$$(4.10)\qquad \left.\frac{\partial^{k_r+s}\varepsilon^{k_r}\overline{v}_{0,r,p}}{\partial x_r^{k_r+s}}\right|_{x_r=p} = -\left.\frac{\partial^{k_r+s}w_0}{\partial x_r^{k_r+s}}\right|_{x_r=p}, \qquad s = 0,1,...,l_r - 1,$$

или

$$(4.11)\qquad \left.\frac{\partial^{k_r+s}\overline{v}_{0,r,p}}{\partial t_{r,p}^{k_r+s}}\right|_{t_{r,p}=0} = -(-1)^{sp}\,\varepsilon^s\left.\frac{\partial^{k_r+s}w_0}{\partial x_r^{k_r+s}}\right|_{x_r=p}, \qquad s = 0,1,...,l_r - 1.$$

Подставляя представление (4.8) функции $\overline{v}_{0,r,p}$ в (4.11), получаем систему l_r линейных уравнений относительно l_r неизвестных $c_{0,r,p,q} \equiv c_{0,r,p,q}\left(x^{(r)}\right)$:

$$(4.12)\quad \sum_{q=1}^{l_r}\left(-\lambda_{r,p,s}\right)^{k_r+s}c_{0,r,p,q} = -(-1)^{sp}\,\varepsilon^s\left.\frac{\partial^{k_r+s}w_0}{\partial x_r^{k_r+s}}\right|_{x_r=p}, \qquad s = 0,1,...,l_r - 1.$$

Детерминант этой системы (типа Вандермонда), в силу условий (4.7), отличен от нуля, следовательно, система (4.12) имеет, при этом единственное решение. При $r = 1,\dots,n$ и $p = 0,1$ положим

$$\varepsilon\alpha_{0,r,p} \equiv -\phi\left(\varepsilon t_{r,p}\right)\varepsilon^{k_r}\sum_{q=1}^{l_r} c_{0,r,p,q}\left(x^{(r)}\right)\sum_{s=0}^{k_r-1}\frac{\left(-\lambda_{r,p,q}t_{r,p}\right)^s}{s!} =$$

$$(4.13)\quad = -\phi\left(p+(-1)^p x_r\right)\varepsilon\sum_{q=1}^{l_r} c_{0,r,p,q}\left(x^{(r)}\right)\sum_{s=0}^{k_r-1}\varepsilon^{k_r-1-s}\frac{\left(-\lambda_{r,p,q}\left(p+(-1)^p x_r\right)\right)^s}{s!}.$$

Предложение 1. *Пусть $1 \le r \le n$ и $p \in \{0,1\}$. Тогда функция $w_0+v_{0,r,p}+\varepsilon\alpha_{0,r,p}$ удовлетворяет граничным условиям (2.4) и (2.6).*

Доказательство. Так как функция $-\varepsilon\alpha_{0,r,p}$ является суммой первых k_r членов ряда Тейлора функции $v_{0,r,p}$ в окрестности $x_r = p$, то функция $v_{0,r,p}+\varepsilon\alpha_{0,r,p}$ удовлетворяет граничным условиям (2.4). С другой стороны, так как $\varepsilon\alpha_{0,r,p}$ многочлен степени k_r-1 от x_r (или $t_{r,p}$), то условия (2.6) для него выполняются автоматически. Следовательно, так как w_0 удовлетворяет граничным условиям (2.4), а $w_0+v_{0,r,p}$ удовлетворяет граничным условиям (2.6), то функция $w_0+v_{0,r,p}+\varepsilon\alpha_{0,r,p}$ удовлетворяет граничным условиям (2.4) и (2.6). Предложение доказано. □

Замечание 3. *Пусть $r = 1,\dots,n$; $p = 0,1$, а $d_{r,p,1},\dots,d_{r,p,l_r}$ – решение системы*

$$\begin{cases} \sum\limits_{q=1}^{l_r}\left(-\lambda_{r,p,s}\right)^{k_r} d_{r,p,q} = -\left.\frac{\partial^{k_r} w_0}{\partial x_r^{k_r}}\right|_{x_r=p}, \\ \sum\limits_{q=1}^{l_r}\left(-\lambda_{r,p,s}\right)^{k_r+s} d_{r,p,q} = 0, \quad s = 1,\dots,l_r-1. \end{cases}$$

Тогда нетрудно видеть, что решение $c_{0,r,p,1},\dots,c_{0,r,p,l_r}$ системы (4.12) можно представить в следующем виде:

$$c_{0,r,p,q}\left(x^{(r)}\right) = d_{r,p,q}\left(x^{(r)}\right) + \sum_{s=1}^{l_r-1} g_{r,p,q,s}\left(x^{(r)}\right)\varepsilon^s,$$

где $g_{r,p,q,s}$, $q = 1,\dots,l_r$, некоторая функция (не зависящая от ε).

Для $t \in R$ и $1 \le j \le n$ положим $\left(x^{(j)},t\right) \equiv \left(x_1,\dots,x_{j-1},t,x_{j+1},\dots,x_n\right)$.

Пусть $w_i\,(i \le m)$ – решение уравнения (4.5), удовлетворяющее граничным условиям (2.4). Тогда функцию $\overline{v}_{i,r,p}$, при $r = 1,\dots,n$; $p = 0,1$ и $i = 1,2\dots$, будем искать как решение уравнения (4.6) типа погранслоя, т.е. в виде:

$$(4.14)\qquad \varepsilon^{k_r}\overline{v}_{i,r,p} = \varepsilon^{k_r}\sum_{q=1}^{l_r} c_{i,r,p,q}\left(x^{(r)},t_{r,p}\right)e^{-\lambda_{r,p,q}t_{r,p}},$$

так, чтобы $w_i + \varepsilon^{k_r}\overline{v}_{i,r,p}$ удовлетворяло граничным условиям (2.6), т. е.

$$(4.15)\qquad \left.\frac{\partial^{k_r+s}\overline{v}_{i,r,p}}{\partial t_{r,p}^{k_r+s}}\right|_{t_{r,p}=0} = -(-1)^{sp}\,\varepsilon^s\left.\frac{\partial^{k_r+s}w_i}{\partial x_r^{k_r+s}}\right|_{x_r=p}, \quad s = 0,1,\dots,l_r-1,$$

где полагаем $w_i = 0$ при $i > m$.

При $r = 1, \ldots, n$ и $p = 0, 1$ положим

$$\varepsilon\alpha_{i,r,p} = -\phi\left(\varepsilon t_{r,p}\right)\varepsilon^{k_r}\sum_{q=1}^{l_r} c_{i,r,p,q}\left(x^{(r)}, t_{r,p}\right)\sum_{s=0}^{k_r-1}\frac{\left(-\lambda_{r,p,q}t_{r,p}\right)^s}{s!} =$$

(4.16)

$$= -\phi\left(p + (-1)^p x_r\right)\varepsilon\sum_{q=1}^{l_r} c_{i,r,p,q}\left(x^{(r)}, t_{r,p}\right)\sum_{s=0}^{k_r-1}\varepsilon^{k_r-1-s}\frac{\left(-\lambda_{r,p,q}\left(p + (-1)^p x_r\right)\right)^s}{s!}.$$

Предложение 2. *Пусть $1 \le r \le n$, $p \in \{0, 1\}$ и $i > 0$. Тогда функция $w_i + v_{i,r,p} + \varepsilon\alpha_{i,r,p}$ удовлетворяет граничным условиям (2.4) и (2.6).*

Доказательство проводится схожим методом, как и в предложении 1.
Обозначим

$$\widetilde{\Gamma} \equiv \bigcup_{r=1}^{n}\bigcup_{p=0}^{1}\left\{x : x_r = p,\, \eta \le x_j \le 1 - \eta,\, 1 \le j \le n,\, j \ne r\right\}.$$

Теорема 3. *Пусть $1 \le r \le n$, $1 \le q \le l_r$, $p \in \{0, 1\}$ и $i > 0$. Тогда*

1) функции w_i, α_i, $c_{i,r,p,q}$ и их производные любого порядка равномерно (по ε) ограниченны на Ω;

2) $c_{i,r,p,q}\left(x^{(r)}, t_{r,p}\right)$ – многочлены относительно $t_{r,p}$;

3) $v_{i,r,p}$ – функция типа погранслоя порядка k_r;

4) функция $w_i + v_i + \varepsilon\alpha_i$ удовлетворяет всем граничным условиям задачи A_ε на $\widetilde{\Gamma}$.

Прежде, чем доказать теорему, сформулируем следующую очевидную лемму:

Лемма 1. *Пусть Q – область в $\mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}_0$, $b_i(t) \in \mathbb{C}^p(Q)$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – матрица, для которой* $\det A \ne 0$. *Тогда*

а) система уравнений $A\left(x_1(t), \ldots, x_n(t)\right)^T = \left(b_1(t), \ldots, b_n(t)\right)$, имеет единственное решение такое, что $x_r(t) \in \mathbb{C}^p(Q)$ $(r = 1, \ldots, n)$,

б) если

$$\left.\frac{\partial^s}{\partial t^s}b_r(t)\right|_{t=t_0} = 0, \quad s = 0, ..., p;\ r = 1, ..., n,$$

то

$$\left.\frac{\partial^s}{\partial t^s}x_r(t)\right|_{t=t_0} = 0, \quad s = 0, ..., p;\ r = 1, ..., n.$$

Доказательство теоремы 1. Доказательство пунктов 1) и 2) проведем индукцией по i. Очевидно, что функция w_0 удовлетворяет условию пункта 1) (см. условия I и IV, замечание 2 и определение 4). Следовательно, в силу леммы

1, функция $c_{0,r,p,q}\left(x^{(r)},t_{r,p}\right)$ тоже удовлетворяет условию пункта 1), а значит и функция α_0 удовлетворяет условию пункта 1) (см. представление (4.13)).

Так как по предположению индукции все коэффициенты $c_{i-s,r,p,q}$ $(0<s\le i)$ – суть многочлены относительно $t_{r,p}$, все функции $\overline{v}_{i-s,r,p}$ $(0<s\le i)$ имеют вид (4.14), и оператор $R_{r,s+k_r}$ $(s>0)$ не зависит от D_r (или $\frac{\partial}{\partial t_{r,p}}$, см. формулу (2.9)), то правая часть (4.6) имеет следующий вид:

$$\sum_{s=1}^{l_r} F_s e^{-\lambda_{r,p,s}t_{r,p}},$$

где $F_s=F_s\left(x^{(r)},t_{r,p}\right)$ – многочлен относительно $t_{r,p}$. Следовательно, решение $\overline{v}_{i,r,p}$ уравнения (4.6) можно представить в виде $\overline{v}_{i,r,p}=\varphi_{i,r,p}+\theta_{i,r,p}$, где $\varphi_{i,r,p}=\varphi_{i,r,p}\left(x^{(r)},t_{r,p}\right)$ – частное решение неоднородного уравнения (4.6) (которое можно найти методом неопределенных коэффициентов, см. [11, стр. 62-65]) вида $\sum\limits_{s=1}^{l_r} K_s e^{-\lambda_{r,p,s}t_{r,p}}$ $\left(K_s=K_s\left(x^{(r)},t_{r,p}\right)\right.$ – многочлен относительно $t_{r,p}$ степени, на единицу больше чем порядок многочлена (по $t_{r,p}$) $F_s\left(x^{(r)},t_{r,p}\right)$, см. условие (4.7)), а $\theta_{i,r,p}=\theta_{i,r,p}\left(x^{(r)},t_{r,p}\right)$ – решение вида (4.14), соответствующего однородного уравнения, удовлетворяющее граничным условиям

$$\left.\frac{\partial^{kr+s}\theta_{i,r,p}}{\partial t_{r,p}^{k_r+s}}\right|_{t_{r,p}=0}=-\left(-1\right)^{sp}\varepsilon^s\left.\frac{\partial^{k_r+s}w_i}{\partial x_r^{k_r+s}}\right|_{x_r=p}-\left.\frac{\partial^{kr+s}\varphi_{i,r,p}}{\partial t_{r,p}^{k_r+s}}\right|_{t_{r,p}=0},\quad s=0,1,\ldots,l_r-1,$$

Следовательно, функция $v_{i,r,p}$ имеет вид (4.14).

Так как, по предположению индукции, при $0\le j<i$ функции w_j, α_j, $c_{j,r,p,q}$ удовлетворяют условию 1), то функция h_i (см. (4.5)) и ее производные любого порядка равномерно (по ε) ограниченны на Ω. Следовательно, в силу замечания 2, функция w_i удовлетворяет условию 1). Нетрудно заметить, что функции $c_{i,r,p,q}$ (см. лемму 1), а значит и α_i удовлетворяют условию 1).

Утверждение пункта 3) следует из пунктов 1) и 2), а утверждение пункта 4) непосредственно следует из предложения 2 и определения функции ϕ. Теорема доказана. □

5. Теоремы об асимптотическом разложении

4.1. Для любого числа $\delta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ обозначим

$$\Omega_\delta=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}\bigcup_{p=0}^{1}\bigcup_{q=0}^{1}\left\{x\in\overline{\Omega}:|x_i-p|\le\delta,\ |x_j-q|\le\delta\right\}.$$

Пусть $\eta \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ и $\widetilde{\Omega} = \Omega \backslash \Omega_{2\eta}$.

Теорема 4. *При условиях $I - IV$ решение u_ε задачи A_ε допускает асимптотическое представление:*

$$u_\varepsilon = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i w_i + \sum_{r=1}^{n} \sum_{p=0}^{1} \sum_{i=0}^{m+k_r} \varepsilon^i \left(v_{i,r,p} + \varepsilon \alpha_{i,r,p}\right) + z_m \qquad \left(m \in \mathbb{N}_0\right), \tag{5.1}$$

где w_0 – решение задачи A_0, w_i – решение задачи (4.5), (2.4), $v_{i,r,p} = \varepsilon^{k_j} \overline{v}_{i,r,p}$ – решение типа погранслоя порядка k_j в окрестности границы $\Gamma_{j,p}$ обыкновенного дифференциального уравнения (4.6), удовлетворяющее граничным условиям (4.15), многочлен $\varepsilon \alpha_{i,r,p}$ определен (по функции $v_{i,r,p}$) в (4.16), а для остаточного члена z_m справедлива оценка:

$$\left\| L_\varepsilon z_m \right\|_{L_2(\widetilde{\Omega})} = O\left(\varepsilon^{m+1}\right).$$

Доказательство. Применяя оператор L_ε к функции u_ε и учитывая (4.5) и (4.6), получаем

$$h = L_\varepsilon \left(\sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i w_i + \sum_{r=1}^{n} \sum_{p=0}^{1} \sum_{i=0}^{m+k_r} \varepsilon^i \left(v_{i,r,p} + \varepsilon \alpha_{i,r,p}\right) + z_m \right) = h + \left\{ \sum_{i=m}^{K} \varepsilon^{i+1} L_0 \alpha_i + \right.$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{2l_j} \left(\sum_{i=\max\{0,m-s+1\}}^{m} \varepsilon^{i+s} a_{s,j} \frac{\partial^{2k_j+s} w_{i-s}}{\partial x_j^{2k_j+s}} + \sum_{i=\max\{0,K-s\}}^{K} \varepsilon^{i+s+1} a_{s,j} \frac{\partial^{2k_j+s} \alpha_i}{\partial x_j^{2k_j+s}} \right) +$$
$$\left. \left(\sum_{r=1}^{n} \sum_{p=0}^{1} \sum_{s=1}^{N_r} \sum_{i=\max\{0,m+k_r-s\}}^{m+k_r} \varepsilon^{i+s-k_r} R_{r,s} \phi\left(p + (-1)^p x_r\right) \overline{v}_{i,r,p} \right) \right\} + L_\varepsilon z_m \equiv$$
$$\equiv h + \varepsilon^{m+1} g_m + L_\varepsilon z_m.$$

Так как $\left\| g_m \right\|_{L_2(\widetilde{\Omega})} = O(1)$ (в силу теоремы 3), то $\left\| L_\varepsilon z_m \right\|_{L_2(\widetilde{\Omega})} = O\left(\varepsilon^{m+1}\right)$. Теорема доказана. $\square$

4.2. Для получения асимптотического разложения в $\overline{\Omega}$ (включая и угловые точки), модифицируем некоторые шаги алгоритма предыдущего параграфа. Решение u_ε задачи A_ε ищется в виде

(5.2)

$$u_\varepsilon = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i W_i + \sum_{r=1}^{n} \sum_{p=0}^{1} \sum_{i=0}^{m+k_r} \varepsilon^i \left(V_{i,r,p} + \varepsilon \alpha_{i,r,p}\right) + Z_m \qquad \left(m \le k_0 := \min_{1 \le j \le n} k_j \right),$$

где W_0 – решение задачи A_0, W_i – решение уравнения

$$L_0 W_i = -\sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{\min\{i,2l_j\}} a_{s,j} \frac{\partial^{2k_j+s} W_{i-s}}{\partial x_j^{2k_j+s}} \qquad (i = 1, ..., m), \tag{5.3}$$

удовлетворяющее граничным условиям (2.4), а функция $\overline{V}_{i,r,p}$, при $r = 1, \ldots, n$; $p = 0, 1$ и $i = 0, \ldots, m + k_r$, ищется в виде (4.14) так, чтобы $W_i + \overline{V}_{i,r,p}$ удовлетворяло бы граничным условиям

$$(5.4) \qquad \left.\frac{\partial^{k_r+s}\overline{V}_{i,r,p}}{\partial t_{r,p}^{k_r+s}}\right|_{t_{r,p}=0} = -(-1)^{sp}\varepsilon^s \left.\frac{\partial^{k_r+s} y_{i,r-1}}{\partial x_r^{k_r+s}}\right|_{x_r=p}, \quad s = 0, 1, ..., l_r - 1,$$

где

$$y_{i,j} \equiv \begin{cases} W_i, & \text{при } j = 0, \\ W_i + \sum\limits_{q=1}^{j}\sum\limits_{p=0}^{1} \phi\left(p + (-1)^p x_q\right)\left(\overline{V}_{i,q,p} + \varepsilon\alpha_{i,q,p}\right), & \text{при } j = 1, ..., n, \end{cases}$$

а многочлен $\varepsilon\alpha_{i,r,p}$ имеет вид (4.16), и строится исходя из функции $V_{i,r,p}$).

Известна следующая

Лемма 2. *Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ – прямоугольний параллелепипед и $p \in \mathbb{N}_0$. Если функция $f(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^p\left(\overline{Q}\right)$, то для любого $a \in \overline{Q}$*

$$\frac{\partial^s}{\partial x_i^s} \lim_{x_j \to a_j} f(x_1, ..., x_n) = \lim_{x_j \to a_j} \frac{\partial^s}{\partial x_i^s} f(x_1, ..., x_n) \qquad (i \neq j),$$

где $0 < s \leq p$, $1 \leq i \leq n$ и $1 \leq j \leq n$.

Предложение 3. *Функция $W_0 + V_{0,1,0} + \varepsilon\alpha_{0,1,0}$ удовлетворяет граничным условиям (2.4) и (2.6) при $r = 1$, $p = 0$.*

Доказательство. Из построения функции $W_0 + V_{0,1,0} + \varepsilon\alpha_{0,1,0}$ следует, что оно удовлетворяет граничным условиям (2.4) и (2.6) при $r = 1, p = 0$. Так как функция W_0 достаточно гладкая (условие IV), то в силу леммы 4.1 имеем:

$$\left.\frac{\partial^r}{\partial x_j^r}\left(\left.\frac{\partial^{k_1+s} W_0}{\partial x_1^s}\right|_{x_1=0}\right)\right|_{x_j=0} = \left.\frac{\partial^{k_1+s}}{\partial x_1^s}\left(\left.\frac{\partial^r W_0}{\partial x_j^r}\right|_{x_j=0}\right)\right|_{x_1=0} = 0, \quad \begin{array}{l} s = 0, 1, ..., l_1 - 1, \\ r = 0, 1, ..., k_j - 1, \end{array}$$

где $1 < j \leq n$, т.е. правые части системы (4.12) удовлетворяют условиям леммы 1, следовательно, найденные коэффициенты $c_{0,1,0,q}$, $q = 1, \ldots, l_1$ также удовлетворяют соответствующим условиям этой леммы. Отсюда непосредственно следует, что функции $V_{0,1,0}$ и $\varepsilon\alpha_{0,1,0}$ удовлетворяют условиям (2.4), что и требовалось доказать. □

Легко доказать и более общее предложение:

Предложение 4. *Пусть $1 \leq j \leq n$ и $0 \leq i \leq m + k_r$. Тогда функция $y_{i,j}$ удовлетворяет граничным условиям (2.4) и (2.6) (при $r = 1, \ldots, j; p = 0, 1$).*

В силу предложения 4, приводя аналогичные рассуждения как при доказательстве теоремы 4, можно доказать следующее:

Теорема 5. *При условиях $I - IV$ решение u_ε задачи A_ε допускает асимптотическое представление (5.2), где W_0 – решение задачи A_0, W_i – решение задачи (5.3) и (2.4), $V_{i,r,p} = \varepsilon^{k_j}\overline{V}_{i,r,p}$ – решение, типа погранслоя порядка k_j в окрестности границы $\Gamma_{j,p}$ для обыкновенного однородного дифференциального уравнения (4.6), удовлетворяющее граничным условиям (5.4), многочлен $\varepsilon\alpha_{i,r,p}$ определяется по функции $V_{i,r,p}$ по формуле (4.16), а для остаточного члена Z_m справедливы оценки:*

$$\|L_\varepsilon Z_m\|_{L_2(\Omega)} = O\left(\varepsilon^{m+1}\right),$$

$$\|Z_m\|^2_{\varepsilon,\Omega} := \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^{2l_j} \left\|D_j^{k_j+l_j} Z_m\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{n} \left\|D_j^{k_j} Z_m\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \|Z_m\|^2_{L_2(\Omega)} \le O\left(\varepsilon^{2m+2}\right).$$

Доказательство. Так как функция Z_m удовлетворяет граничным условиям задачи A_ε, то из равномерной разрешимости задачи A_ε (см. условие III и теорему 1) следует оценка

$$\|Z_m\|^2_{\varepsilon,\Omega} \le C_1 \left(L_\varepsilon Z_m, Z_m\right)_{L_2(\Omega)} \le O\left(\varepsilon^{2m+2}\right),$$

где постоянная $C_1 > 0$ не зависит от ε. Теорема доказана. □

Abstract. The paper gives a description of an algorithm of asymptotic expansion in ε ($\varepsilon > 0$) of the solution u_ε of the Dirichlet problem for the linear differential semielliptic equation $L_\varepsilon u_\varepsilon = h$ in rectangular parallelepipeds, which contains higher derivatives with a small parameter ε. The algorithm is based on the solution of the degenerating as $\varepsilon \to 0$ Dirichlet problem for the semielliptic equation $L_0 u = h$ of lower order. Some theorems on uniform solvability and regular degeneracy are proved.

Список литературы

[1] М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, "Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром", Успехи мат. наук, **12**, 5, 3 – 122 (1957).

[2] В. Ф. Бутузов, "Асимптотика решения уравнения $\mu^2\Delta u - k^2(x,y)u = f(x,y)$ в прямоугольной области", Дифф. ур., **9**, 9, 1654 – 1660 (1973).

[3] С. А. Назаров, "Метод Вишика – Люстерника для эллиптических краевых задач в областях с коническими точками. 2. Задача в ограниченной области", Сиб. Мат. журн., **22**, 5, 132 – 152 (1981).

[4] L. P. Cook, G. S. S. Ludford, "The behavior as $\varepsilon \to 0$ of solutions to $\varepsilon\nabla^2 w = w_y$ on the rectangle $0 \le x \le l_1$, $|y| \le 1$", SIAM J. Mat. Anal., **4**,1 161 – 184 (1973).

[5] А. М. Ильин, Е. Ф. Леликова, "Метод сращивания асимптотических представлений для уравнения $\varepsilon\Delta u - a(x,y)u_y = f(x,y)$ в прямоугольнике", Мат. сб., **96**, 4, 568 – 583 (1975).

[6] Л. Хермандер, Линейные Ддифференциальные Операторы с Частными Производными, М. (1965).
[7] С. М. Никольский, "Первая краевая задачи для одного общего линейного уравнения", Доклады АН СССР, **146**, 4, 767 – 769 (1962).
[8] С. М. Никольский, "Доказательство единственности классического решения первой краевой задачи для одного общего линейного дифференциального уравнения в частных производных для выпуклой ограниченной области", Известия АН СССР, **27:5**, 1113 – 1134 (1963).
[9] E. Pehkonen, "Ein hypoelliptisches Diriclet Problem", Com. Mat. Phys., **48**, 3, 131 – 143 (1978).
[10] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные Представления Функций и Теоремы Вложения, М. (1996).
[11] Л. С. Понтрягин, Обыкновенные Дифференциальные Уравнения, М. (1982)

Поступила 25 мая 2009