Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 2, 2010, стр. 37-50.

ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ С ДОМИНИРУЮЩИМИ СМЕШАННЫМИ СВОЙСТВАМИ ГЛАДКОСТИ КАК “B–ПРОИЗВЕДЕНИЯ”

А. Г. БАГДАСАРЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *angen@arminco.com*

Аннотация. В статье доказывается, что некоторые известные функциональные пространства (например, пространства $S^s_{p,q}B$ и $S^s_{p,q}F$ функций с доминирующими смешанными свойствами гладкости и аппроксимационные пространства $A^s_{p,q}$) характеризуются в терминах пространств типа Соболева-Лиувилля, Никольского-Бесова и, так называемых, “B-произведений”. Доказываются теоремы о представлениях пространств $S^s_{p,q}B$ посредством B-произведений и метода покрытий. Устанавливается, что пространство $S^s_{p,q}B$ является интерполяционным пространством “вещественного” метода для пары соответствующих пространств типа Никольского-Бесова.

MSC2000 number: 46E35

Ключевые слова: Пространства типа Никольского-Бесова, пространства типа Соболева-Лиувилля, B-произведения, аппроксимационные пространства, интерполяция.

Введение

Сущность функционального подхода при изучении различных вопросов в теории дифференциальных уравнений с частными производными заключается в том, что дифференциальное уравнение вместе с граничными условиями реализуется как оператор, действующий в специально подобранном пространстве. В этой связи возникает круг вопросов, связанных с определением и изучением свойств соответствующих пространств. Исходя из поставленных задач, в прошлом веке было введено и изучено множество функциональных пространств. Как оказалось, довольно широкое многообразие пространств, встречающихся в приложениях, укладывается в рамках двух основных семейств пространств $B^s_{p,q}$ Никольского-Бесова и $F^s_{p,q}$ Лизоркина-Трибеля (см [1]).

Однако многие задачи для определенного семейства функциональных пространств не находят своего окончательного решения в терминах этого семейства. Приходится вводить и рассматривать функциональные пространства принципиально иного типа. Так, исследование следов функций из классических пространств Соболева привело к необходимости введения пространств Бесова (см.

[2], [3]). Такое развитие привело к различным обобщениям классических пространств Никольского-Бесова (см. например, [4] - [8]). Как оказывается, обобщенные пространства типа Никольского-Бесова из [7], [8], в качестве частных реализаций, содержат в себе некоторые известные пространства (Теорема 8), которые были рассмотрены ранее с иных точек зрения (см. Введение в [8]).

Для характеризации интерполяционных пространств "вещественного" метода для пар анизотропных пространств Никольского-Бесова с разными анизотропиями (Теорема 4) в [9], [10] были введены и исследованы, так называемые, "B-произведения".

В настоящей статье мы доказываем, что в терминах "B-произведений" характеризуются пространства $S^s_{p,q}B$ функций с доминирующими смешанными свойствами гладкости (см. [11] - [14]), а сами "B-произведения", вообще говоря, не укладываются в рамки рассматриваемых пространств типа Никольского-Бесова (Следствие 3).

1. Определения рассматриваемых пространств

Будем пользоваться следующими обозначениями:

$\mathbb{R}^n$ - n-мерное евклидово пространство,

Z^+_n - множество мультииндексов, то есть векторов с неотрицательными целыми компонентами,

F - оператор преобразования Фурье,

F^{-1} - оператор обратного преобразования Фурье,

F_1 - одномерный оператор преобразования Фурье,

C^∞ - множество бесконечно дифференцируемых функций,

S - класс Шварца быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций,

S' - пространство медленно растущих обобщенных функций,

M_p - пространство мультипликаторов Фурье типа (p,p),

$A_0 + A_1$ - сумма Банаховых пространств A_0 и A_1 в смысле теории интерполяции,

$(A_0, A_1)_{\vartheta,q}$ - интерполяционное пространство "вещественного" метода.

Знак "$\sim$" означает двустороннюю оценку.

Там, где это не вызывает недоразумения, значок пространства $\mathbb{R}^2$ будем опускать и полагать $H^s_p(\mu) \equiv H^s_p(\mu;\mathbb{R}^2)$, $B^s_{p,q}(\mu) \equiv B^s_{p,q}(\mu;\mathbb{R}^2)$, $\Phi(\mu) \equiv \Phi(\mu;\mathbb{R}^2)$. Если же опущен значок функции μ (например, $H^s_p(\mathbb{R}^2)$, $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^2)$, $\Phi(\mathbb{R}^1)$, $\Phi(\mathbb{R}^2)$), то рассматривается классический случай.

Буквой c будем обозначать, вообще говоря, разные константы.

1.1. **Обобщенные пространства типа Соболева-Лиувилля.**
Скажем, что положительная функция $\mu \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ полиномиального роста принадлежит множеству G^+, если существует постоянная $c > 0$ такая, что для любого мультииндекса (α_1, α_2) с компонентами из множества $\{0;1\}$ и любого вектора $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, $\xi_1 \cdot \xi_2 \neq 0$ имеет место неравенство

$$\left|\xi^{\alpha_1}\xi^{\alpha_2} D^{(\alpha_1,\alpha_2)}\,\mu(\xi_1,\xi_2)\right| \leq c\,\mu(\xi_1,\xi_2), \quad c > 0. \tag{1.1}$$

Функции из G^+ рассматривались в [4]. Примером функции из G^+ может служить следующая функция:

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{2} \xi_i^{2a_i}\right)^{s/2} \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^{2} \xi_j^{2b_j}\right)^{r/2},$$

где a_i, b_j - целые неотрицательные числа и $-\infty < s, r < \infty$.

Замечание 1. *Основным свойством функций из G^+ является тот факт, что если функция $\mu \in G^+$ ограничена, то она принадлежит M_p. Это свойство непосредственно следует из* (1.1) *и теоремы П. И. Лизоркина о мультипликаторах Фурье (см.* [15]*).*

Определение 1. *Пусть $1 < p < \infty$, $-\infty < s < \infty$, $\mu \in G^+$. Положим*

$$H_p^s(\mu) \equiv H_p^s(\mu;\mathbb{R}^2) = \left\{ f \in S';\ \|f\|_{H_p^s(\mu)} = \left\|F^{-1}\{\mu^s F f\}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} < \infty \right\}.$$

Пространства $H_p^s(\mu)$ рассматривались в [16], [7], [8]. Если положить

$$I_\mu^s \equiv I_{\mu^s} = F^{-1}\{\mu^{-s} F\}, \quad \mu \in G^+, \quad -\infty < s < \infty, \tag{1.2}$$

то определение пространств $H_p^s(\mu)$ типа Соболева-Лиувилля можно записать в виде

$$H_p^s(\mu) = I_{\mu^s}\, L_p. \tag{1.3}$$

1.2. **Обобщенные пространства типа Никольского-Бесова.**
Рассматриваемые обобщения пространств Никольского-Бесова определяются посредством "вещественной" интерполяции пар соответствующих пространств типа Соболева-Лиувилля.

Определение 2. *Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $-\infty < s < \infty$, $\mu \in G^+$. Положим*

$$B_{p,q}^0(\mu) \equiv B_{p,q}^0(\mu,\mathbb{R}^2) = \left(H_p^1(\mu), H_p^{-1}(\mu)\right)_{\frac{1}{2},q}, \quad B_{p,q}^s(\mu) = I_{\mu^s}\, B_{p,q}^0(\mu).$$

Пространства $B_{p,q}^s(\mu)$ введены и рассмотрены в [8], [17].

Замечание 2. *При* $\mu(\xi_1, \xi_2) = (1 + \xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}$ *пространства* $H_p^s(\mu)$ *и* $B_{p,q}^s(\mu)$ *Определений 1, 2 совпадают с классическими пространствами Соболева-Лиувилля и Никольского-Бесова соответственно. Если в Определении 2 положить* $\mu = 1$, *то для произвольного* q $(1 \le q \le \infty)$ *получим* $B_{p,q}^0(1) = L_p$.

Для рассматриваемых пространств имеет место следующий аналог известной формулы "вещественной" интерполяции (см. [8]).

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $0 < \theta < 1$, $-\infty < s_0 \ne s_1 < \infty$, $s = (1-\theta)s_0 + \theta\, s_1$, $\mu \in G^+$. *Тогда*

$$B_{p,q}^s(\mu) = \left(H_p^{s_0}(\mu),\, H_p^{s_1}(\mu)\right)_{\theta,q}.$$

Там же в [8] доказана следующая теорема о представлении рассматриваемых пространств типа Никольского-Бесова.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $-\infty < s < \infty$, $\mu \in G^+$. *Тогда*

$$B_{p,q}^s(\mu) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^2);\ \|f\|_{B_{p,q}^s(\mu)} = \left(\int_0^\infty \left\| F^{-1}\left(\frac{t^{1/2}\mu^{1+s}}{\mu^2 + t} Ff \right) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \right\},$$

(с обычными видоизменениями при $q = \infty$*).*

1.3. **Пространства, порожденные многоугольниками.**

Определение 3. *Многоугольник* $\mathfrak{R}$ *из первой координатной четверти называется полным, если начало координат является вершиной* $\mathfrak{R}$ *и* $\mathfrak{R}$ *имеет отличные от начала координат вершины на каждой оси координат. Полный многоугольник* $\mathfrak{R}$ *называется правильным, если внешние нормали некоординатных сторон многоугольника* $\mathfrak{R}$ *имеют неотрицательные компоненты.*

Пусть $\mathfrak{R}$ - правильный многоугольник с вершинами $(0,\,0)$, $(\alpha_1^j, \alpha_2^j) \in Z_2^+$, $j = 1, \dots, N$. Сопоставим многоугольнику $\mathfrak{R}$ следующие функции:

$$(1.4)\quad \mu_0(\xi_1, \xi_2) = \left(\sum_{j=1}^N \xi_1^{2\alpha_1^j}\, \xi_2^{2\alpha_2^j} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \nu(\xi_1, \xi_2) = \left(1 + \mu_0^2(\xi_1, \xi_2)\right)^{\frac{1}{2}},\ (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Ясно, что $\nu \in G^+$. Однако если вершины правильного многоугольника $\mathfrak{R}$ не мультииндексы, а векторы из первой координатной четверти ($\alpha_1^j, \alpha_2^j \ge 0$, $j = 1, \dots, N$), то функция ν из (1.4) не является бесконечно дифференцируемой. Тогда вместо функций ν будем рассматривать функцию

$$\mu(\xi_1, \xi_2) = \left(1 + \sum_{j=1}^N (1 + \xi_1^2)^{\alpha_1^j}\, (1 + \xi_2^2)^{\alpha_2^j} \right)^{\frac{1}{2}},$$

которая эквивалентна функции $\nu(\xi_1,\xi_2) : \nu \sim \mu$. Ясно, что $\mu \in G^+$. Как следует из теоремы П. И. Лизоркина из [15], с учетом (1.1), H и B-пространства из 1.1 и 1.2, порожденные эквивалентными функциями, совпадают.

Определение 4. *Пусть* $1 < p < \infty$. *Обозначим через* $\Phi(\mu) \equiv \Phi(\mu, \mathbb{R}^2)$ *множество систем функций* $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$, *обладающих следующими свойствами:*

a) $\varphi_k \in S(\mathbb{R}^2)$, $(F\,\varphi_k)(\xi_1,\xi_2) \geq 0$, $k = 0, 1, \ldots$,

b) ***supp*** $F\,\varphi_k \subset \Omega_k \equiv \big\{(\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2;\ 2^{k-1} \leq \mu_0(\xi_1,\xi_2) \leq 2^{k+1}\big\}$, $k = 1, \ldots$,
supp $F\,\varphi_0 \subset \Omega_0 \equiv \big\{(\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2;\ \mu_0(\xi_1,\xi_2) \leq 2\big\}$,

c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (F\,\varphi_k)(\xi_1,\xi_2) = 1, \quad (\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2$,

d) существует $c > 0$ *такая, что* $\|F\,\varphi_k\|_{M_p} \leq c$, $k = 1, \ldots$.

Пример системы из $\Phi(\mu, \mathbb{R}^n)$ приведен в [7]. При $n = 1$ (тогда вместо функции μ_0 надо рассматривать длину вектора $\mu_0(\xi) = |\xi|$, $\xi \in \mathbb{R}^1$) системы из $\Phi(\mu, \mathbb{R}^1) \equiv \Phi(\mathbb{R}^1)$ совпадают с изотропными системами из [1] - [18].

Теперь B-пространства типа Никольского-Бесова определяются, как обычно.

Определение 5. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $-\infty < s < \infty$, $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi(\mu, \mathbb{R}^2)$. *Положим*

$$B^s_{p,q}(\mu) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^2);\ \|f\|^{(1)}_{B^s_{p,q}(\mu)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksq} \left\| F^{-1}\{F\,\varphi_k\, Ff\} \right\|^q_{L_p(\mathbb{R}^2)} \right)^{1/q} < \infty \right\}$$

(с обычными видоизменениями при $q = \infty$*).*

Пространства $B^s_{p,q}(\mu)$ введены и рассмотрены в [7].

Замечание 3. *Если правильный многоугольник* $\mathfrak{R}$ *не имеет вершин вне координатных осей, т.е. является прямоугольным треугольником, с катетами на координатных осях, то соответствующие* H *и* B*-пространства совпадают с классическими пространствами Соболева-Лиувилля и Никольского-Бесова соответственно. Поскольку* B*-пространства являются интерполяционными пространствами "вещественного" метода для пар пространств типа Соболева-Лиувилля, то для функций* $\mu \in G^+$, *порожденных правильными многоугольниками, пространства* $B^s_{p,q}(\mu)$ *типа Никольского-Бесова из определений 2 и 5 совпадают (см.* [7], [8]*).*

1.4. "B-произведения" пространств типа Никольского-Бесова.

Для описания интерполяционных пространств "вещественного" метода для пар пространств типа Никольского-Бесова с разными анизотропиями, в [9], [10] были введены, так называемые, "B-произведения".

Определение 6. *Пусть* $\mu, \nu \in G^+$, $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $-\infty < s, m < \infty$. *Пространство*

$$B^s_{p,q}(\mu) \cdot B^m_{p,q}(\nu) = I_{\mu^s \nu^m} \left[B^0_{p,q}(\mu) \cdot B^0_{p,q}(\nu)\right],$$

где

$$B^0_{p,q}(\mu) \cdot B^0_{p,q}(\nu) = \Big\{ f \in S'(\mathbb{R}^2);\ \|f\|^{(1)}_{B^0_{p,q}(\mu)\cdot B^0_{p,q}(\nu)} =$$

$$= \left(\int_0^\infty \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2}\mu}{\mu^2 + t} \cdot \frac{u^{1/2}\nu}{\nu^2 + u} Ff \right\|^q_{L_p(\mathbb{R}^n)} \frac{dt}{t} \frac{du}{u} \right)^{1/q} < \infty \Bigg\},$$

(с обычными видоизменениями при $q = \infty$) называется "B-произведением" пространств $B^s_{p,q}(\mu)$ и $B^m_{p,q}(\nu)$.

Замечание 4. *Ясно, что норма "B-произведения" пространств $B^0_{p,q}(\mu)$ и $B^0_{p,q}(\nu)$ эквивалентна каждому из следующих двух выражений:*

$$\left(\int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2}\mu}{\mu^2 + t} Ff \right\|^q_{B^0_{p,q}(\nu)} \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, \quad \left(\int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2}\nu}{\nu^2 + t} Ff \right\|^q_{B^0_{p,q}(\mu)} \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.$$

Важное свойство "B-произведений" описывается в следующей теореме (см. [9]).

Теорема 3. *Пусть* $\mu, \nu \in G^+$, $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$. *Тогда*

$$B^0_{p,q}(\mu) \cdot B^0_{p,q}(\nu) = B^0_{p,q}(\mu\,\nu) \cdot B^0_{p,q}(\mu + \nu).$$

Там же в [9] доказана следующая теорема об интерполяции пространств типа Никольского-Бесова с разными анизотропиями.

Теорема 4. *Пусть* $\mu, \nu \in G^+$, $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $0 < \theta < 1$. *Тогда*

$$\left(B^1_{p,q}(\mu), B^1_{p,q}(\nu)\right)_{\theta,q} = B^{1-\theta}_{p,q}(\mu) \cdot B^{\theta}_{p,q}(\nu).$$

1.5. **Пространства функций с доминирующими смешанными свойствами гладкости.**

Определение 7. *Пусть* $1 < p < \infty$, $-\infty < s < \infty$, $\{\varphi_k\} \in \Phi(\mathbb{R}^1)$.

a) Для $1 \le q \le \infty$ положим

$$S^s_{p,q}B(\mathbb{R}^2) = \Big\{ f \in S'(\mathbb{R}^2);\ \|f\|_{S^s_{p,q}B} =$$

$$= \left(\sum_{j=0}^\infty \sum_{k=0}^\infty 2^{sq(j+k)} \left\| F^{-1}\{F_1\varphi_k(\xi_1)\, F_1\varphi_j(\xi_2) Ff(\xi_1, \xi_2)\} \right\|^q_{L_p(\mathbb{R}^2)} \right)^{1/q} < \infty \Bigg\}$$

(с обычными видоизменениями при $q = \infty$)

b) Для $1 < q < \infty$ положим

$$S^s_{p,q}F(\mathbb{R}^2) = \Big\{ f \in S'(\mathbb{R}^2);\ \|f\|_{S^s_{p,q}F} =$$

$$= \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} 2^{sq(j+k)} \left| F^{-1}\{F_1\varphi_k(\xi_1)\, F_1\varphi_j(\xi_2) Ff(\xi_1,\xi_2)\} \right|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} < \infty \Bigg\}.$$

Пространства $S^s_{p,q}B(\mathbb{R}^2)$ и $S^s_{p,q}F(\mathbb{R}^2)$ рассмотрены в [13], [14].

Замечание 5. *Согласно* (1.3) *и определениям 2, 6, пространства из 1.1, 1.2 и 1.4 описываются с помощью оператора "поднятия"* (1.2). *В связи с этим особую важность приобретают пространства с нулевым верхним индексом.*

Нетрудно заметить, что сказанное относится и к пространствам $S^s_{p,q}B(\mathbb{R}^2)$. Положим

$$\mu_i = (1+\xi_i^2)^{1/2}, \quad i = 1, 2. \tag{1.5}$$

Тогда, используя свойства системы $\{\varphi_k\} \in \Phi(\mathbb{R}^1)$, имеем

$$\|f\|^q_{S^s_{p,q}B} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} 2^{sq(j+k)} \left\| F^{-1}\{F_1\varphi_k(\xi_1)\, F_1\varphi_j(\xi_2) Ff(\xi_1,\xi_2)\} \right\|^q_{L_p(\mathbb{R}^2)} \sim$$

$$\sim \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \left\| F^{-1}\{\mu_1^s F_1\varphi_k(\xi_1)\, \mu_2^s F_1\varphi_j(\xi_2) Ff(\xi_1,\xi_2)\} \right\|^q_{L_p(\mathbb{R}^2)} =$$

$$= \left\| F^{-1}\{(\mu_1\,\mu_2)^s Ff(\xi_1,\xi_2)\} \right\|^q_{S^0_{p,q}B}.$$

Таким образом,

$$S^s_{p,q}B(\mathbb{R}^2) = I_{(\mu_1\mu_2)^s} S^0_{p,q}B(\mathbb{R}^2). \tag{1.6}$$

1.6. **Аппроксимационные пространства.**
Рассмотрим множество ($m = 0, 1, 2, \ldots$)

$$H_m = \{(\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2;\ \exists r \in \{0,\ldots,m\};\ |\xi_1| \le 2^r\,\pi,\ |\xi_2| \le 2^{m-r}\,\pi\}.$$

Пусть $f \in L_p(\mathbb{R}^2)$, $p > 1$. Обозначим

$$E_m(f, L_p) = \inf \|f - g\|_{L_p(\mathbb{R}^2)},$$

где нижняя грань берется по всем функциям $g \in L_p(\mathbb{R}^2)$ таким, что $\operatorname{supp} Fg \subset H_m$. Величина $E_m(f, L_p)$ называется *наилучшим гиперболическим приближением* функции $f \in L_p(\mathbb{R}^2)$ порядка m в норме $L_p(\mathbb{R}^2)$.

Определение 8. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $s > 0$. *Положим*

$$A^s_{p,q}(\mathbb{R}^2) = \left\{ f \in L_p(\mathbb{R}^2);\ \|f\|_{A^s_{p,q}} = \|f\|_{L_p} + \left(\sum_{m=0}^{\infty} 2^{msq}\,[E_m(f,L_p)]^q \right)^{1/q} < \infty \right\}$$

(с обычными видоизменениями при $q = \infty$*).*

Аппроксимационные пространства $A^s_{p,q}(\mathbb{R}^2)$ рассмотрены в [14]. Там же доказано следующее интерполяционное утверждение (Утверждение 5).

Теорема 5. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$, $0 \leq s_0 \neq s_1 < \infty$, $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$. *Тогда*

$$A^s_{p,q}(\mathbb{R}^2) = \left(S^{s_0}_{p,2}F(\mathbb{R}^2), S^{s_1}_{p,2}F(\mathbb{R}^2)\right)_{\theta,q}.$$

2. Связи между рассматриваемыми пространствами

В замечании 3 мы отметили, что для функции $\mu \in G^+$, порожденной правильным многоугольником, пространства $B^s_{p,q}(\mu)$ типа Никольского-Бесова из определений 2 и 5 совпадают. В этом отношении функциям μ_1 и μ_2 из (1.5) отвечают отрезки [0, 1] на координатных осях. Ясно, что отрезок [0, 1] не есть правильный многоугольник (даже не полный) в $\mathbb{R}^2$. Докажем, что несмотря на это, пространства $B^s_{p,q}(\mu_1, \mathbb{R}^2)$ и $B^s_{p,q}(\mu_2, \mathbb{R}^2)$ из 1.2 допускают характеризацию в терминах определения 5.

Теорема 6. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $-\infty < s < \infty$, $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty \in \Phi(\mathbb{R}^1)$, *функции* μ_1, μ_2 *определены в* (1.5). *Тогда*

$$B^s_{p,q}(\mu, \mathbb{R}^2) = \Big\{ f \in S'(\mathbb{R}^2);\ \|f\|^{(1)}_{B^s_{p,q}(\mu_i)} =$$
$$= \left(\sum_{k=0}^\infty 2^{ksq} \left\| F^{-1}\{F_1\varphi_k(\xi_i)Ff\} \right\|^q_{L_p(\mathbb{R}^2)} \right)^{1/q} < \infty \Bigg\}, \quad i = 1, 2$$

(с обычными видоизменениями при $q = \infty$*), где пространства* $B^s_{p,q}(\mu_i, \mathbb{R}^2)$ *понимаются в смысле определения 2.*

Доказательство. Согласно теореме 1 достаточно доказать, что при $-\infty < s_0 \neq s_1 < \infty$, $0 < \theta < 1$, $s = (1-\theta)s_0 + \theta\, s_1$ имеет место представление

$$(H^{s_0}_p(\mu_i, \mathbb{R}^2), H^{s_1}_p(\mu_i, \mathbb{R}^2))_{\theta,q} = \tag{2.1}$$
$$= \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^2);\ \|f\|^{(1)}_{B^s_{p,q}(\mu_i)} = \left(\sum_{k=0}^\infty 2^{ksq} \left\| F^{-1}\{F_1\varphi_k(\xi_i)Ff\} \right\|^q_{L_p(\mathbb{R}^2)} \right)^{1/q} < \infty \right\}.$$

Пусть $f \in (H^{s_0}_p(\mu_i), H^{s_1}_p(\mu_i))_{\theta,q}$. Тогда $f = f_0 + f_1$, где $f_0 \in H^{s_0}_p(\mu_i)$, $f_1 \in H^{s_1}_p(\mu_i)$. На основании теоремы П. И. Лизоркина о мультипликаторах Фурье из [15], используя свойства системы $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$, имеем

$$\left\| F^{-1}\{F_1\varphi_k(\xi_i)Ff\} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} \leq \left\| F^{-1}\{F_1\varphi_k(\xi_i)Ff_0\} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} +$$
$$+ \left\| F^{-1}\{F_1\varphi_k(\xi_i)Ff_1\} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} = \left\| F^{-1}\left\{ \frac{2^{ks_0}F_1\varphi_k}{(1+\mu_i^2)^{s_0/2}} F(2^{-ks_0} I^{-s_0}_{\mu_i} f_0) \right\} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} +$$

$$+\left\|F^{-1}\left\{\frac{2^{ks_1}F_1\varphi_k}{(1+\mu_i^2)^{s_1/2}}F(2^{-ks_1}I_{\mu_i}^{-s_1}f_1)\right\}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}\le c(2^{-ks_0}\|I_{\mu_i}^{-s_0}f_0\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}+$$

$$+2^{-ks_1}\|I_{\mu_i}^{-s_1}f_1\|_{L_p(\mathbb{R}^2)})=c2^{-ks_0}(\|f_0\|_{H_p^{s_0}(\mu_i)}+2^{k(s_0-s_1)}\|f_1\|_{H_p^{s_1}(\mu_i)}).$$

Тогда

$$\left\|F^{-1}\{F_1\varphi_k(\xi_i)Ff\}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}\le c2^{-ks_0}\,K(2^{k(s_0-s_1)},f;H_p^{s_0}(\mu_i),H_p^{s_1}(\mu_i)),$$

где $K(t,f)$ есть K-функционал Пеетре (см. [18], [19]). Используя дискретный K-метод (теорема 1.7а из [18]), получаем

$$\|f\|^{(1)}_{B^s_{p,q}(\mu_i)}\le c_1\,\|f\|_{(H_p^{s_0}(\mu_i),H_p^{s_1}(\mu_i))_{\theta,q}}.$$

Для доказательства обратной оценки воспользуемся дискретным J-методом (теорема 1.7б из [18]). Пусть $f\in B^s_{p,q}(\mu_i)$. Используя свойства системы $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$, получаем

$$2^{k(s-s_0)}\,J(2^{k(s_0-s_1)},F^{-1}\{F_1\varphi_k(\xi_i)Ff\};H_p^{s_0}(\mu_i),H_p^{s_1}(\mu_i))=2^{k(s-s_0)}\times$$

$$\times\max\left\{\|F^{-1}\{F_1\varphi_k(\xi_i)Ff\}\|_{H_p^{s_0}(\mu_i)},\,2^{k(s_0-s_1)}\,\|F^{-1}\{F_1\varphi_k(\xi_i)Ff\}\|_{H_p^{s_1}(\mu_i)}\right\}\le$$

$$\le c\,2^{k(s-s_0)}\,\max\left\{2^{ks_0}\|F^{-1}\{F_1\varphi_k(\xi_i)Ff\}\|_{L_p(\mathbb{R}^2)},\,2^{ks_0}\,\|F^{-1}\{F_1\varphi_k(\xi_i)Ff\}\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}\right\}=$$

$$=c\,2^{ks}\,\|F^{-1}\{F_1\varphi_k(\xi_i)Ff\}\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}.$$

Таким образом, неравенство

$$\|f\|_{(H_p^{s_0}(\mu_i),H_p^{s_1}(\mu_i))_{\theta,q}}\le c_2\,\|f\|^{(1)}_{B^s_{p,q}(\mu_i)}$$

будет доказано, если убедиться, что $f=\sum\limits_{k=0}^{\infty}F^{-1}\{F_1\varphi_k(\xi_i)Ff\}$ в $H_p^{s_0}(\mu_i)+H_p^{s_1}(\mu_i)$. Пусть $s_0<s_1$. Тогда $H_p^{s_0}(\mu_i)+H_p^{s_1}(\mu_i)=H_p^{s_0}(\mu_i)$ (см. [16], [20]). Используя свойства системы $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$ и неравенство Гёльдера, получаем

$$\left\|\sum_{k=0}^{N}F^{-1}\{F_1\varphi_k(\xi_i)Ff\}-f\right\|_{H_p^{s_0}(\mu_i)}\le\sum_{k=N+1}^{\infty}\left\|F^{-1}\{F_1\varphi_k(\xi_i)Ff\}\right\|_{H_p^{s_0}(\mu_i)}\le$$

$$\le c\sum_{k=N+1}^{\infty}2^{ks_0}\,\left\|F^{-1}\{F_1\varphi_k(\xi_i)Ff\}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}\le c\,\|f\|_{B^s_{p,q}(\mu_i)}\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}2^{kq'(s_0-s)}\right)^{1/q'},$$

где $1/q+1/q'=1$. Теперь ясно, что $f=\sum\limits_{k=0}^{\infty}F^{-1}\{F_1\varphi_k(\xi_i)Ff\}$ в $H_p^{s_0}(\mu_i)+H_p^{s_1}(\mu_i)$. Таким образом, представление (2.1) доказано. Теперь утверждение теоремы 6 следует из теоремы 1. Теорема доказана. □

Если s - натуральное число, то пространство $S^s_{p,2}F(\mathbb{R}^2)$ из 1.5 есть пространство типа Соболева, с доминирующей смешанной производной (см. [13], [14]). В наших обозначениях это означает, что имеет место следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть s - натуральное число, $1 < p < \infty$, функции μ_1, μ_2 определены в* (1.5). *Тогда*

$$S^s_{p,2}F(\mathbb{R}^2) = H^s_p(\mu_1\,\mu_2).$$

Убедимся, что аппроксимационные пространства $A^s_{p,q}(\mathbb{R}^2)$ из 1.6 совпадают с соответствующими пространствами типа Никольского-Бесова из 1.2.

Теорема 8. *Пусть $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $s > 0$, функции μ_1, μ_2 определены в* (1.5). *Тогда*

$$A^s_{p,q}(\mathbb{R}^2) = B^s_{p,q}(\mu_1\,\mu_2).$$

Доказательство следует из теорем 5, 7 и 1. Имеем

$$A^s_{p,q}(\mathbb{R}^2) = (S^{s_0}_{p,2}F(\mathbb{R}^2), S^{s_1}_{p,2}F(\mathbb{R}^2))_{\theta,q} = (H^{s_0}_p(\mu_1\,\mu_2), H^{s_1}_p(\mu_1\,\mu_2))_{\theta,q} = B^s_{p,q}(\mu_1\,\mu_2).$$

□

Замечание 6. *В терминах правильных многогранников из 1.3, функции*

$$\mu_1\,\mu_2 = (1+\xi_1^2)^{1/2}\cdot(1+\xi_2^2)^{1/2} = (1+\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_1^2\,\xi_2^2)^{1/2}$$

соответствует квадрат с вершинами (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1). С этой точки зрения, согласно замечанию 3, классическим изотропным пространствам с функцией

$$\mu_1+\mu_2 = (1+\xi_1^2)^{1/2}+(1+\xi_2^2)^{1/2} \sim (1+\xi_1^2+\xi_2^2)^{1/2}, \tag{2.2}$$

соответствует прямоугольный треугольник с вершинами (0, 0), (0, 1), (1, 0).

С помощью теоремы 8 можно убедиться, что пространства $S^s_{p,q}B(\mathbb{R}^2)$ из 1.5, вообще говоря, не характеризуются в терминах пространств типа Никольского-Бесова. Из (1.6) ясно, что наиболее существенно сравнение пространств $S^s_{p,q}B(\mathbb{R}^2)$ и $B^s_{p,q}(\mu_1\,\mu_2)$, где функции μ_1, μ_2 определены в (1.5). Точнее имеет место следующее утверждение.

Теорема 9. *Пусть $1 < p_0, p_1 < \infty$, $1 \le q_0, q_1 \le \infty$, $s_0, s_1 > 0$ и функции μ_1, μ_2 определены в* (1.5). *Тогда равенство*

$$S^{s_0}_{p_0,q_0}B(\mathbb{R}^2) = B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mu_1\,\mu_2)$$

имеет место в том и только в том случае, когда $s_0 = s_1$, $p_0 = p_1 = 2$, $q_0 = q_1 = 2$.

Доказательство. непосредственно следует из теоремы 8 и следствия 3 из [14].

□

Оказывается, что характеризация пространств $S^s_{p,q}B(\mathbb{R}^2)$ функций с доминирующими смешанными свойствами гладкости возможна в терминах "B-произведений" пространств типа Никольского-Бесова из 1.4. Следующий параграф посвящен рассмотрению этого вопроса.

3. Пространства $S^s_{p,q}B(\mathbb{R}^2)$ как "B-произведения"

Теорема 10. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $-\infty < s < \infty$, *функции* μ_1, μ_2 *определены в* (1.5). *Тогда*

$$S^s_{p,q}B(\mathbb{R}^2) = B^s_{p,q}(\mu_1) \cdot B^s_{p,q}(\mu_2),$$

то есть

$$S^s_{p,q}B(\mathbb{R}^2) = \Big\{ f \in S'(\mathbb{R}^2);\ \|f\|^{(1)}_{S^s_{p,q}B} =$$

$$= \left(\int_0^\infty \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2}\mu_1^{1+s}}{\mu_1^2 + t} \cdot \frac{u^{1/2}\mu_2^{1+s}}{\mu_2^2 + u} Ff \right\|^q_{L_p(\mathbb{R}^2)} \frac{dt}{t}\frac{du}{u} \right)^{1/q} < \infty \Big\}$$

(с обычными видоизменениями при $q = \infty$*).*

Доказательство. проведем в два шага.

Шаг 1. Пусть сначала $s = 0$. На основании определения 7а и теоремы 6 (см. также замечание 4) имеем

$$\|f\|_{S^0_{p,q}B} = \left(\sum_{k=0}^\infty \sum_{j=0}^\infty \left\| F^{-1}\{F\varphi_k(\xi_1)\, F\varphi_j(\xi_2) Ff(\xi_1,\xi_2)\} \right\|^q_{L_p(\mathbb{R}^2)} \right)^{1/q} \sim$$

$$\sim \left(\sum_{j=0}^\infty \left\| F^{-1}\{F_1\varphi_j(\xi_2) Ff\} \right\|^q_{B^0_{p,q}(\mu_1)} \right)^{1/q}.$$

Тогда, из теоремы 2 и определения 6, еще раз применяя теорему 6, имеем

$$\|f\|_{S^0_{p,q}B} \sim \left(\sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2}\mu_1}{\mu_1^2 + t} F_1\varphi_j(\xi_2) Ff \right\|^q_{L_p(\mathbb{R}^2)} \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \sim$$

$$\sim \left(\int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2}\mu_1}{\mu_1^2 + t} Ff \right\|^q_{B^0_{p,q}(\mu_2)} \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \sim$$

$$\sim \left(\int_0^\infty \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2}\mu_1}{\mu_1^2 + t} \cdot \frac{u^{1/2}\mu_2}{\mu_2^2 + u} Ff \right\|^q_{L_p(\mathbb{R}^2)} \frac{dt}{t}\frac{du}{u} \right)^{1/q} = \|f\|_{B^0_{p,q}(\mu_1)\cdot B^0_{p,q}(\mu_2)}.$$

Таким образом, теорема доказана при $s = 0$.

Шаг 2. Пусть $-\infty < s < \infty$. На основании (1.6) и определения 2, из Шага 1 имеем

$$S^s_{p,q}B(\mathbb{R}^2) = I_{(\mu_1\,\mu_2)^s}\, S^0_{p,q}B(\mathbb{R}^2) = I_{(\mu_1\,\mu_2)^s}\, \left[B^0_{p,q}(\mu_1) \cdot B^0_{p,q}(\mu_2)\right] =$$

$$= \left[I_{(\mu_1)^s}\, B^0_{p,q}(\mu_1)\right] \cdot \left[I_{(\mu_2)^s}\, B^0_{p,q}(\mu_2)\right] = B^s_{p,q}(\mu_1) \cdot B^s_{p,q}(\mu_2).$$

Теорема доказана. □

На основании части б) теоремы 3 (см. (1.6)) приходим к следующему следствию.

Следствие 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $-\infty < s < \infty$, *функции* μ_1, μ_2 *определены в* (1.5). *Тогда имеем*

a) $S^0_{p,q}B(\mathbb{R}^2) = B^0_{p,q}(\mu_1\,\mu_2)\cdot B^0_{p,q}(\mu_1+\mu_2)$,
b) $S^s_{p,q}B(\mathbb{R}^2) = B^s_{p,q}(\mu_1\,\mu_2)\cdot B^0_{p,q}(\mu_1+\mu_2)$.

Заметим, что согласно (2.2)

$$H^s_p(\mu_1+\mu_2) = H^s_p(\mathbb{R}^2), \quad B^s_{p,q}(\mu_1+\mu_2) = B^s_{p,q}(\mathbb{R}^2), \tag{3.1}$$

где $H^s_p(\mathbb{R}^2)$ и $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^2)$ – классические изотропные пространства Соболева-Лиувилля и Никольского-Бесова (см. [1], [18], [19]).

Из теоремы 8 и следствия 1 вытекает

Следствие 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $s > 0$. *Тогда*

$$S^s_{p,q}B(\mathbb{R}^2) = B^0_{p,q}(\mathbb{R}^2)\cdot A^s_{p,q}(\mathbb{R}^2).$$

“B-произведение” $B^0_{p,q}(\mathbb{R}^2)\cdot A^s_{p,q}(\mathbb{R}^2)$ *понимается в смысле замечания 4.*

Следующее утверждение показывает, что “B-произведения”, вообще говоря, не укладываются в рамки рассматриваемых пространств типа Никольского-Бесова.

Следствие 3. *Пусть* $1 < p_0, p_1 < \infty$, $1 \le q_0, q_1 \le \infty$, $s_0, s_1 > 0$ *и функции* μ_1, μ_2 *определены в* (1.5). *Тогда равенство*

$$B^{s_0}_{p_0,q_0}(\mu_1)\cdot B^{s_0}_{p_0,q_0}(\mu_2) = B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mu_1\,\mu_2)$$

имеет место в том и только в том случае, когда $s_0 = s_1$, $p_0 = p_1 = 2$, $q_0 = q_1 = 2$.

Доказательство непосредственно следует из теорем 9 и 10. □

Используя представления пространств $B^0_{p,q}(\mu_1\,\mu_2)$ и $B^0_{p,q}(\mu_1+\mu_2)$ методом покрытий (см. 1.3) приходим к следующему представлению для пространств $S^s_{p,q}B(\mathbb{R}^2)$.

Теорема 11. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $-\infty < s < \infty$, *функции* μ_1, μ_2 *определены в* (1.5), $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty \in \Phi(\mu_1+\mu_2,\mathbb{R}^2) \equiv \Phi(\mathbb{R}^2)$, $\{\psi_j\}_{j=0}^\infty \in \Phi(\mu_1\,\mu_2,\mathbb{R}^2)$. *Тогда*

$$S^s_{p,q}B(\mathbb{R}^2) = \Big\{ f \in S'(\mathbb{R}^2);\ \|f\|^{(2)}_{S^s_{p,q}B} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^\infty\sum_{j=0}^\infty 2^{jsq}\left\|F^{-1}\{F\varphi_k\,F\psi_j Ff\}\right\|^q_{L_p(\mathbb{R}^2)}\right)^{1/q} < \infty \Big\}.$$

(с обычными видоизменениями при $q = \infty$*).*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $s = 0$. Из определения 5 и теоремы 1, учитывая (3.1), имеем

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left\|F^{-1}\{F\varphi_k\,F\psi_j Ff\}\right\|^q_{L_p(\mathbb{R}^2)} \sim \sum_{j=0}^{\infty}\left\|F^{-1}\{F\psi_j Ff\}\right\|^q_{B^0_{p,q}(\mathbb{R}^2)} \sim$$

$$\sim \sum_{j=0}^{\infty}\left\|F^{-1}\{F\psi_j Ff\}\right\|^q_{(H^1_p(\mathbb{R}^2),H^{-1}_p(\mathbb{R}^2))_{1/2,q}}.$$

Используя теоремы 1, 2, получаем

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left\|F^{-1}\{F\varphi_k\,F\psi_j Ff\}\right\|^q_{L_p(\mathbb{R}^2)} \sim \int_0^\infty \sum_{j=0}^{\infty}\left\|F^{-1}\frac{t^{1/2}(\mu_1+\mu_2)}{(\mu_1+\mu_2)^2+t}\,F\psi_j\,Ff\right\|^q_{L_p(\mathbb{R}^2)}\frac{dt}{t}.$$

Повторяя предыдущие рассуждения относительно ряда под знаком интеграла, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left\|F^{-1}\{F\varphi_k\,F\psi_j Ff\}\right\|^q_{L_p(\mathbb{R}^2)} \sim$$

$$\sim \int_0^\infty\int_0^\infty\left\|F^{-1}\frac{t^{1/2}(\mu_1+\mu_2)}{(\mu_1+\mu_2)^2+t}\cdot\frac{u^{1/2}\mu_1\,\mu_2}{(\mu_1\,\mu_2)^2+u}Ff\right\|^q_{L_p(\mathbb{R}^2)}\frac{dt}{t}\frac{du}{u} =$$

$$= \|f\|^q_{B^0_{p,q}(\mu_1+\mu_2)\cdot B^0_{p,q}(\mu_1\,\mu_2)} \sim \|f\|^q_{B^0_{p,q}(\mu_1)\cdot B^0_{p,q}(\mu_2)} \sim \|f\|^q_{S^0_{p,q}B(\mathbb{R}^2)}.$$

Последние два шага цепочки оценок написаны на основании теорем 3 и 10. Таким образом, утверждение теоремы доказано при $s = 0$.

Общий случай, как и в Шаге 2 доказательства теоремы 10, получается при помощи оператора “поднятия” $I_{(\mu_1\mu_2)^s}$. Теорема доказана. □

Следующее утверждение дает характеризацию пространства $S^s_{p,q}B(\mathbb{R}^2)$ посредством “вещественной” интерполяции пар соответствующих пространств типа Бесова.

Теорема 12. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $s \ne 0$, $0 < \theta < 1$, *функции* μ_1, μ_2 *определены в* (1.5). *Тогда*

$$S^s_{p,q}B(\mathbb{R}^2) = \left(B^{\frac{s}{1-\theta}}_{p,q}B(\mu_1), B^{\frac{s}{\theta}}_{p,q}B(\mu_2)\right)_{\theta,q}. \tag{3.2}$$

Доказательство. Из теорем 4 и 10 имеем

$$\left(B^{\frac{s}{1-\theta}}_{p,q}B(\mu_1), B^{\frac{s}{\theta}}_{p,q}B(\mu_2)\right)_{\theta,q} = B^s_{p,q}B(\mu_1)\cdot B^s_{p,q}B(\mu_2) = S^s_{p,q}B(\mathbb{R}^2).$$

Теорема доказана. □

Теорема 12 имеет многочисленные применения. В частности, с помощью формулы (3.2) можно доказать теоремы вложения и интерполяционные утверждения для пространства функций с доминирующими смешанными свойствами гладкости.

Abstract. It is proved, that certain known function spaces (such as $S^s_{p,q}B$, $S^s_{p,q}F$ spaces of functions of mixed smoothness and approximation spaces $A^s_{p,q}$) can be characterized in terms of spaces of Sobolev-Liouville and Nikolskii-Besov types and so called "B-products". The representation theorems of $S^s_{p,q}B$ spaces are proved using B-products and decomposition method. It is proved that space $S^s_{p,q}B$ is a "real" method interpolation space for the pair of corresponding spaces of Nikolskii-Besov type.

Список литературы

[1] Х. Трибель, Теория Функциональных Пространств, Мир, Москва (1986).
[2] О. В. Бесов, "О некотором семействе функциональных пространств", ДАН СССР, **126**, 1163 – 1165 (1956).
[3] О. В. Бесов, "Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения", Труды МИАН СССР, **60**, 42 – 81 (1961).
[4] H. Triebel, "General function spaces III (spaces $B^{g(x)}_{p,q}$ and $F^{g(x)}_{p,q}$, $1 < p < \infty$: basic properties)", Analysis Math., **3**, 221 – 249 (1977).
[5] М. Л. Гольдман, "Метод покрытий для описания общих пространств типа Бесова", Труды МИАН СССР, **156**, 47 – 81 (1980).
[6] B. Stockert, H. Triebel, "Decomposition methods for function spaces of $B^s_{p,q}$ type and $F^s_{p,q}$ type", Math. Nach., **89**, 247 – 267 (1979).
[7] А. Г. Багдасарян, "Об интерполяции и следах функций из некоторых анизотропных функциональных пространств", Изв. АН Арм. ССР, **23** (4), 353 – 365 (1988).
[8] А. Г. Багдасарян, "Интерполяции и вложения обобщенных пространств типа Бесова", Изв. АН Арм. ССР, серия Математика, **38** (6), 49 – 62 (2003).
[9] А. Г. Багдасарян, "О -произведениях пространств типа Бесова", Изв. НАН Армении, серия Математика, **41** (1), 15 – 26 (2006).
[10] А. Г. Багдасарян, "B-произведения пространств типа Бесова и некоторые их применения", Изв. НАН Армении, серия Математика, **62** (6), 55 – 71 (2007).
[11] П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, "Классификация дифференцируемых функций на основе пространств с доминирующей производной", Труды МИАН, **77**, 143 – 167 (1965).
[12] Т. И. Аманов, Пространства Дифференцируемых Функций с Доминирующей Смешанной Производной, Алма-Ата, Наука (1976).
[13] H.-J. Schmeisser, H. Triebel, Topic in Fourier Analysis and Function Spaces, Chichester, Wiley (1987).
[14] H.-J. Schmeisser, W. Sickel, "Spaces of functions of mixed smoothness and approximation from hyperbolic crosses", Jenaer Schriften zur Math. und Inform. (2002).
[15] П. И. Лизоркин, "(L_p, L_q)-мультипликаторы интегралов Фурье", ДАН СССР, **152**, 808 – 811 (1963).
[16] Л. Р. Волевич, Б. П. Панеях, "Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения", УМН, **20** (1), 3 – 74 (1965).
[17] А. Г. Багдасарян, "Интерполяции и следы функций из некоторых пространств типа Соболева-Лиувилля", Изв. НАН Армении, серия Математика, **36** (5), 14 – 22 (2001).
[18] Х. Трибель, Теория Интерполяции. Функциональные Пространства, Мир, Москва (1980).
[19] Й. Берг, Й. Лёфстрём, Интерполяционные Пространства. Введение, Мир, Москва (1980).
[20] A. G. Baghdasaryan, "On the intermediate spaces and quasi-linearizibility of a pair of spaces of Sobolev–Liouville type", Analysis Mathematica, **24**, 3 – 14 (1998).

Поступила 14 января 2009