

Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 2, 2010, стр. 3-20.

ЗАДАЧА ТИПА РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО-ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Г. М. АЙРАПЕТЯН, М. С. АЙРАПЕТЯН

Государственный инженерный университет Армении
E-mail: *hhairapet@seua.am*

Аннотация. В статье исследуется задача типа Римана-Гильберта для неправильно-эллиптического уравнения второго порядка в весовых пространствах. Устанавливается, что количество линейно независимых решений однородной задачи и условий на граничные функции зависит не только от порядка особенности весовой функции в особой точке и индексов коэффициентов задачи, а также от поведения этих функций в особых точках.

MSC2000 number: 35J25

Ключевые слова: Уравнение Бицадзе, неправильно-эллиптическое уравнение, задача Римана-Гильберта, граничные условия, весовое пространство.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $D^+ = \{z, |z| < 1\}$ – единичный круг в комплексной плоскости $z = x + iy$, $T = \{z, |z| = 1\}$ – единичная окружность, $C^{1+\delta}$, $\delta > 0$ – класс функций, определенных на T , производные которых принадлежат классу Гельдера с показателем δ . Граничные задачи типа Римана-Гильберта для уравнения Бицадзе

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} = 0, \quad z \in D^+,$$

а также для уравнений неправильно-эллиптического типа с постоянными коэффициентами высших порядков в классах Гельдера исследованы в работах [1–7]. Эта задача для n -голоморфных функций (решений уравнения n -ого порядка типа (1.1)) в классе L^1 исследована в работах [8], [9]. В настоящей работе исследуется граничная задача типа Римана-Гильберта в весовом пространстве $L^1(\rho)$, $\rho(t) = |1 - t|^\alpha$, $\alpha > -1$ для уравнения (1.1) в следующей постановке:

Задача А. Определить функцию $u(z)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) и граничным условиям

$$(1.2) \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} \|\operatorname{Re} a_0(t)u(rt) - f_0(t)\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

$$(1.3) \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| \operatorname{Re} a_1(t) \frac{\partial u(rt)}{\partial r} - f_1(t) \right\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

где $f_0'(t), f_1(t) \in L^1(\rho)$, $\rho(t) = |1-t|^\alpha$, $\alpha > -1$, $a_0(t), a_1(t) \in C^{\delta+1}(T)$, $\delta > 0$, $a_0(t), a_1(t) \neq 0$.

В статье приводится полное исследование этой задачи. Устанавливается, что вообще говоря, количество линейно независимых решений однородной задачи и условий на функции $f_0(t), f_1(t)$ для разрешимости этой задачи зависит не только от α и индексов функций $a_0(t), a_1(t)$, а также от других свойств этих функций.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим задачу Римана–Гильберта в $L^1(\rho)$ в следующей постановке: определить аналитическую в D^+ функцию $\Phi^+(z)$ так, чтобы имело место граничное условие

$$(2.1) \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| \operatorname{Re} a(t) \Phi^+(rt) - f(t) \right\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

где $f(t) \in L^1(\rho)$, $a(t) \in C^\delta(T)$, $\delta > 0$, $a(t) \neq 0$. Условие (2.1) можно представить в виде

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| a(t) \Phi^+(rt) + \overline{a(t) \Phi^+(rt)} - 2f(t) \right\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

Положив $\Phi^-(z) = -\overline{\Phi^+(\bar{z}^{-1})}$, $z \in D^-$, $D^- = \{z, |z| > 1\}$ будем иметь $\overline{\Phi^+(rt)} = -\Phi^-(r^{-1}t)$ и

$$(2.2) \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| a(t) \Phi^+(rt) - \overline{a(t)} \Phi^-(r^{-1}t) - 2f(t) \right\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Следуя монографии [10], если $\Phi(z)$ произвольная аналитическая функция на $D^+ \cup D^-$, то положим $\Phi^*(z) = -\overline{\Phi(\bar{z}^{-1})}$. Так как f — действительнoзначная функция, то если $\Phi(z)$ удовлетворяет граничному условию (2.2), то $\Phi^*(z)$ также удовлетворяет этому условию. Тем самым задача (2.1) эквивалентна граничной задаче Гильберта

$$(2.3) \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| \Phi^+(rt) - \frac{\overline{a(t)}}{a(t)} \Phi^-(r^{-1}t) - \frac{2f(t)}{a(t)} \right\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

где $\Phi^-(z)$ ограничена в окрестности бесконечно удаленной точки, при условии, что решение задачи (2.3) удовлетворяет условию $\Phi^*(z) = \Phi(z)$. Тем самым, если $\Phi(z)$ общее решение задачи Гильберта (2.3), то общее решение задачи (2.1) можно представить в виде $(\Phi(z) + \Phi^*(z))/2$ (см. [10]).

Пусть $\kappa = \text{ind } a(t)$, $t \in T$ и

$$S(z) = \beta \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{d(\tau)}{\tau - z} d\tau \right),$$

где

$$d(t) = \ln \left(t^{2\kappa} \overline{a(t)} a^{-1}(t) \right), \quad t \in T, \quad \beta = \exp \left(-\frac{1}{4\pi i} \int_T \frac{d(\tau)}{\tau} d\tau \right).$$

Далее, положим $n = [\alpha] + 1$, если α нецелое число и $n = \alpha$, если α целое число. Множество полиномов $P(z)$, порядок которых не больше n и коэффициенты a_k удовлетворяют условиям $a_k = (-1)^{n+1} \overline{a_{n-k}}$, обозначим через T_n .

Лемма 1. *а) Если $n - 2\kappa \geq 0$, то общее решение однородной задачи (2.1) можно представить в виде*

$$\Phi_0(z) = \frac{S(z)P(z)}{(1-z)^n},$$

где $P(z) \in T_{n-2\kappa}$ – произвольный многочлен.

б) Если $n - 2\kappa < 0$, то однородная задача имеет только тривиальное решение.

Доказательство. Так как $\text{ind } \overline{a(t)}(a(t))^{-1} = -2\kappa$, то общее решение однородной задачи Гильберта (2.3) можно представить в виде (см. [13])

$$\Phi(z) = \frac{S(z)P(z)}{(1-z)^n},$$

где $P(z) = A_0 + A_1 z + \dots + A_{n-2\kappa} z^{n-2\kappa}$ – многочлен порядка $n - 2\kappa$. Так как $S^*(z) = z^{-2\kappa} \overline{S(z)}$, то

$$\Phi^*(z) = S(z) \frac{(-1)^n z^{n-2\kappa}}{(1-z)^n} \overline{P\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

Далее имеем

$$z^{n-2\kappa} \overline{P\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{A_0} z^{n-2\kappa} + \overline{A_1} z^{n-2\kappa-1} + \dots + \overline{A_{n-2\kappa}}$$

$$\Phi^*(z) + \Phi(z) = S(z) \frac{A_0 + \overline{A_{n-2\kappa}} + (A_1 + \overline{A_{n-2\kappa-1}})z + \dots + (A_{n-2\kappa} + \overline{A_0})z^{n-2\kappa}}{(1-z)^n},$$

и получаем утверждение а), если n – четное число. Аналогично устанавливается утверждение б), если n – нечетное число.

Для доказательства б) заметим, что если $n - 2\kappa < 0$, то многочлен $P(z)$ в представлении общего решения $\Phi(z)$ тождественно равен нулю, следовательно однородная задача не имеет нетривиальных решений. Лемма доказана. $\square$

Для произвольной функции $f \in L^1(\rho)$ положим

$$(2.4) \quad K(f, z) = \frac{S(z)}{2\pi(1-z)^n} \int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^n \tau |d\tau|}{a(\tau)S(\tau)(\tau-z)} \\ + (-1)^n \frac{z^{n-2\kappa} S(z)}{2\pi(1-z)^n} \int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^n z |d\tau|}{\tau^{n-2\kappa} a(\tau)S(\tau)(\tau-z)}, \quad z \in D.$$

Лемма 2. а) Если $n - 2\kappa \geq -1$, то задача (2.1) имеет решение для любой функции $f(t) \in L^1(\rho)$. Общее решение можно представить в виде

$$(2.5) \quad \Phi^+(z) = K(f, z) + \Phi_0(z)$$

где $\Phi_0(z)$ – общее решение однородной задачи (2.1), а $K(f, z)$ определяется формулой (2.4).

б) Если $n - 2\kappa < -1$, то для разрешимости задачи (2.1) необходимо и достаточно, чтобы функция f удовлетворяла условиям

$$(2.6) \quad \int_T \frac{f(t)(1-t)^n}{a(t)S(t)} t^k dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -(n - 2\kappa) - 2.$$

При выполнении условий (2.6) решение задачи (2.1) единственно и определяется формулой (2.5), где $\Phi_0(z) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $n - 2\kappa \geq -1$. Тогда функция

$$\Phi(z) = \frac{S(z)}{\pi(1-z)^n} \int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^n \tau |d\tau|}{a(\tau)S(\tau)(\tau-z)}, \quad z \in D^+ \cup D^-,$$

является решением задачи Гильберта (2.3) (см. [13]). Так как

$$\Phi^*(z) = (-1)^n \frac{z^{n-2\kappa_j} S(z)}{\pi(1-z)^n} \int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^n z |d\tau|}{\tau^{n-2\kappa_j} a_j(\tau)S_j(\tau)(\tau-z)}, \quad j = 0, 1, z \in D^+ \cup D^-,$$

получаем утверждение а) леммы. Пусть теперь $n - 2\kappa < -1$. Для того, чтобы задача (2.3) имела решение, ограниченное в бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы функция f удовлетворяла условиям (2.6) (см. [13]). Лемма доказана. $\square$

Лемма 3. Пусть $a(t) \in C^\delta(T)$, $a(t) \neq 0$, $\kappa = \text{ind } a(t)$, $t \in T$, $F(z)$ аналитическая функция в D^+ и $F(z) \in C(\bar{D}^+)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

а) Если $n - 2\kappa \geq -1$, то имеет место представление

$$(2.7) \quad F(z) = K(f, z) + \frac{S(z)P(z)}{(1-z)^n},$$

где $f(t) = \text{Re } a(t)F(t)$, $t \in T$, $K(f, z)$ определяется формулой (2.4), а $P(z) \in T_{n-2\kappa}$ однозначно определяется функцией $F(z)$:

$$(2.8) \quad P(z) = (F(z) - K(f, z))(1-z)^n S^{-1}(z).$$

б) Если $n - 2\kappa < -1$, то $F(z) = K(f, z)$ и $f(t) = \operatorname{Re} a(t)F(t)$ удовлетворяет условиям

$$(2.9) \quad \int_T \frac{f(t)(1-t)^n}{a(t)S(t)} t^k dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -(n - 2\kappa) - 2.$$

Доказательство. Пусть $n - 2\kappa \geq -1$. Так как $\alpha > -1$ и $F(z) \in C(\bar{D}^+)$, то

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|\operatorname{Re} (a(t)F(rt)) - \operatorname{Re} (a(t)F(t))\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Применив лемму 2, получим

$$F(z) = K(f, z) + \frac{S(z)P_n(z)}{(1-z)^n},$$

где $f(t) = \operatorname{Re} a(t)F(t)$. Утверждение а) доказано. Для доказательства утверждения б) достаточно установить справедливость равенств (2.9). Действительно, так как $\overline{a(t)}(a(t))^{-1} = S^+(t)(S^-(t))^{-1}$, то

$$\begin{aligned} \int_T \frac{\operatorname{Re} (a(t)F(t))(1-t)^n}{a(t)S(t)} t^k dt &= \int_T \frac{F(t)(1-t)^n}{a(t)S(t)} t^k dt + \\ &+ \int_T \frac{\overline{a(t)F(t)}(1-t)^n}{a(t)S(t)} t^k dt = \int_T \frac{\overline{F(t)}(1-t)^n}{S^-(t)} t^k dt. \end{aligned}$$

$\overline{F(t)}(1-t)^n(S^-(t))^{-1}$ аналитическая функция в D^- и порядок на бесконечности равен $n - 2\kappa$. Так как $n - 2\kappa \leq -2$, последний интеграл равен нулю при $k = 0, 1, \dots, -(n - 2\kappa) - 2$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 4. Пусть $n = [\alpha] + 1$ при нецелом α и $n = \alpha$, если α целое число. Тогда а) имеет место равенство

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| \frac{1-r^2}{(1-rt)^{n+1}} \right\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

б) Если $k > 1$, то

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| \frac{1-r^2}{(1-rt)^{n+k}} \right\|_{L^1(\rho)} > 0.$$

Доказательство. Пусть α нецелое число. Так как $|1-t| < 2|1-rt|$, то

$$\left\| \frac{1}{(1-rt)^{n+1}} \right\|_{L^1(\rho)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|1-t|^\alpha |dt|}{|1-rt|^{n+1}} \leq C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|dt|}{|1-rt|^{2-\{\alpha\}}}.$$

Следовательно

$$\left\| \frac{1-r^2}{(1-rt)^{n+1}} \right\|_{L^1(\rho)} \leq C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r^2) |dt|}{|1-rt|^{2-\{\alpha\}}}.$$

Поскольку $2 - \{\alpha\} < 2$, то утверждение леммы следует из того, что правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $r \rightarrow 0$. Если α целое число, то

$$\left\| \frac{1 - r^2}{(1 - rt)^{n+1}} \right\|_{L^1(\rho)} \leq C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 - r^2) |dt|}{|1 - rt|}.$$

Учитывая, что правая часть стремится к нулю при $r \rightarrow 0$, получим утверждение а) леммы.

Далее положим $T_k = \{t; |1 - t| < (n + k)^{-1}(1 - r)\}$ и пусть $t \in T_k$. Тогда $|\arg(1 - rt)^{-(n+k)}| < c_0 < 2^{-1}\pi$, $c_0 > 0$, и $\operatorname{Re}(1 - rt)^{-(n+k)} > d_0|1 - rt|^{-(n+k)}$, $d_0 > 0$. Поэтому

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \frac{1 - r^2}{(1 - rt)^{(n+k)}} |\rho(t)| |dt| > d_0 \int_{T_k} \frac{(1 - r^2) |1 - t|^\alpha |dt|}{|1 - rt|^{(n+k)}}.$$

Учитывая, что $|1 - rt| < C(1 - r)$, $C > 0$, при $t \in T_k$ получаем

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \frac{1 - r^2}{(1 - rt)^{(n+k)}} |\rho(t)| |dt| > \\ & > \frac{d_0}{C(1 - r)^{n+k-1}} \int_{T_k} |1 - t|^\alpha |dt| > \frac{d'_0}{(1 - r)^{n+k-1}} \int_0^{\alpha(r)} \theta^\alpha d\theta, \end{aligned}$$

где $d'_0 > 0$, $\alpha(r) = (n + k)^{-1}(1 - r)$. Окончательно получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \frac{1 - r^2}{(1 - rt)^{(n+k)}} |\rho(t)| |dt| > \frac{C_1}{(1 - r)^{k-2}}, \quad C_1 > 0.$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 5. Пусть $a(t) \in C^{1+\delta}(T)$, $a(t) \neq 0$, $f \in L^1(\rho)$. Тогда

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} (1 - r) \left\| (K(f, rt))'_z \right\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Доказательство. Пусть сначала $f \in C^{1+\delta}(T)$, $\delta > 0$. Так как $|S(z)| < \text{const}$, то используя свойства интеграла типа Коши [10] будем иметь

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{S(z)}{2\pi} \int_T \frac{f(\tau)(1 - \tau)^n \tau |d\tau|}{a(\tau)S(\tau)(\tau - z)} \right)'_z \right| \leq C, \\ & \left| \left(\frac{z^{n-2\kappa} S(z)}{2\pi} \int_T \frac{f(\tau)(1 - \tau)^n z |d\tau|}{\tau^{n-2\kappa} a(\tau)S(\tau)(\tau - z)} \right)'_z \right| \leq C, \end{aligned}$$

где C – постоянная, зависящая от f . Поэтому

$$\left| (K(f; z))'_z \right| < \frac{C_1}{|1 - rt|^{n+1}}.$$

Применив лемму 2, получим утверждение леммы, когда $f \in C^{\delta+1}(T)$. Так как $C^{1+\delta}$ всюду плотно в $L^1(\rho)$, то для доказательства леммы следует установить, что

$$(2.10) \quad (1-r) \left\| (K(f, z))'_z \right\|_{L^1(\rho)} \leq C \|f\|_{L^1(\rho)},$$

где C – постоянная, не зависящая от f . Функцию $K(f; z)$ в (2.10) можно заменить на

$$\tilde{K}(f, z) = \frac{S(z)}{2\pi(1-z)^n} \int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^n \tau |d\tau|}{a_j(\tau)S(\tau)(\tau-z)}.$$

Тогда

$$\left(\tilde{K}(f, rt) \right)'_z = I_1(r, t) + I_2(r, t),$$

где

$$I_1(r, t) = \frac{1}{(1-rt)^{n+1}} \frac{S(z)}{2\pi} \int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^n \tau |d\tau|}{a(\tau)S(\tau)(\tau-rt)},$$

$$I_2(r, t) = \frac{1}{(1-rt)^n} \left(\frac{S(z)}{2\pi} \int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^n \tau |d\tau|}{a(\tau)S(\tau)(\tau-rt)} \right)'_z.$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} & (1-r^2) \int_T |I_1(r, t)| |\rho(t)| |dt| \leq \\ & \leq C(1-r^2) \int_T \frac{|1-t|^\alpha}{|1-rt|^{n+1}} \int_T \frac{|f(\tau)| |1-\tau|^n}{|\tau-rt|} |d\tau| |dt| \leq \\ & \leq C \int_T |f(\tau)| |1-\tau|^\alpha |1-\tau|^{n-\alpha} \int_T \frac{(1-r^2) |1-t|}{|1-rt|^2 |1-t|^{n-\alpha} |\tau-rt|} |dt| |d\tau|. \end{aligned}$$

Так как (см. [12])

$$\sup_{0 < r < 1} |1-\tau|^{n-\alpha} \int_T \frac{(1-r^2) |1-t|}{|1-rt|^2 |1-t|^{n-\alpha} |\tau-rt|} |dt| < \infty,$$

то получим

$$(1-r^2) \int_T |I_1(r, t)| |\rho(t)| |dt| \leq C \|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Учитывая, что $(S(z))'_z$ ограниченная функция, получим

$$|I_2(r, t)| \leq \frac{C}{|1-rt|^n} \int_T \frac{|f(\tau)| |1-\tau|^n}{|\tau-rt|^2} |d\tau|.$$

Поэтому

$$(1-r^2) \int_T |I_2(r, t)| |\rho(t)| |dt| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq C(1-r^2) \int_T \frac{|1-t|^\alpha}{|1-rt|^\alpha} \int_T \frac{|f(\tau)||1-\tau|^n}{|\tau-rt|^2} |d\tau| |dt| \leq \\
&\leq C \int_T |f(\tau)| |1-\tau|^\alpha |1-\tau|^{n-\alpha} \int_T \frac{(1-r^2) |dt|}{|\tau-rt|^2 |1-t|^{n-\alpha}} |d\tau|.
\end{aligned}$$

Поскольку (см. [12])

$$\sup_{0 < r < 1} |1-\tau|^{n-\alpha} \int_T \frac{(1-r^2)}{|\tau-rt|^2 |1-t|^{n-\alpha}} |dt| < \infty,$$

то имеем

$$(1-r^2) \int_T |I_2(r, t)| |\rho(t)| |dt| \leq C \|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Тем самым (2.10) доказано. Лемма доказана. $\square$

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ A

Хорошо известно [1], что общее решение уравнения (1.1) можно представить в виде

$$(3.1) \quad u(z) = \Phi_0(z) + (1-|z|^2)\Phi_1(z) + A_0\bar{z},$$

где $\Phi_0(z), \Phi_1(z)$ – произвольные аналитические функции в D^+ , а A_0 – произвольное комплексное число, причем функции $\Phi_0(z), \Phi_1(z)$ и A_0 однозначно определяются функцией $u(z)$. Учитывая представление (3.1), условия (1.2), (1.3) можно представить в виде

$$(3.2) \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} \|Re(a_0(t)(\Phi_0(rt) + (1-r^2)\Phi_1(rt) + A_0r\bar{t})) - f_0(t)\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

$$(3.3) \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} \|Re(a_1(t)(t\Phi_0'(rt) - 2r\Phi_1(rt) + (1-r^2)t\Phi_1'(rt) + A_0r\bar{t})) - f_1(t)\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Тем самым задача A эквивалентна следующей задаче в классе аналитических функций:

Задача A* Найти аналитические в D^+ функции $\Phi_0(z), \Phi_1(z)$ и постоянную A_0 так, чтобы выполнялись граничные условия (3.2), (3.3).

Пусть $\kappa_j = \text{ind } a_0(t), t \in T$,

$$S_j(z) = \beta_j \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{d_j(\tau)}{\tau - z} d\tau \right), \quad j = 0, 1,$$

где

$$d_j(t) = \ln \left(t^{2\kappa_j} \overline{a_j(t)} a_j^{-1}(t) \right), \quad t \in T, \quad \beta_j = \exp \left(-\frac{1}{4\pi i} \int_T \frac{d_j(\tau)}{\tau} d\tau \right).$$

$$(3.4) \quad K_j(f, z) = \frac{S_j(z)}{2\pi(1-z)^n} \int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^n \tau |d\tau|}{a_j(\tau)S_j(\tau)(\tau-z)} + \\ + (-1)^n \frac{z^{n-2\kappa_j} S_j(z)}{2\pi(1-z)^n} \int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^n z |d\tau|}{\tau^{n-2\kappa_j} a_j(\tau)S_j(\tau)(\tau-z)}, \quad j = 0, 1, \quad z \in D.$$

Теорема 1. Пусть для заданных функций $f_0(t), f_1(t)$ задача А имеет решение $u(z)$.

а) Если $n - 2\kappa_0 \geq -1$, $n - 2\kappa_1 \geq -1$, то $u(z)$ представляется в виде (3.1), где

$$(3.5) \quad \Phi_0(z) = K_0(f_0, z) - K_0(\operatorname{Re}(A_0 \bar{t} a_0(t)), z) + \frac{S_0(z)P_0(z)}{(1-z)^n},$$

$$(3.6) \quad \Phi_1(z) = \frac{z}{2} \Phi_0'(z) - \frac{1}{2} (K_1(f_1, z) - K_1(\operatorname{Re}(A_0 \bar{t} a_1(t)), z)) + \frac{S_1(z)P_1(z)}{(1-z)^n},$$

$P_j(z) \in T_{n-2\kappa_j}$, $j = 0, 1$, A_0 - постоянная.

б) Если хотя бы одно из чисел $n - 2\kappa_0$, $n - 2\kappa_1$ меньше -1 , то в случае $n - 2\kappa_0 < -1$ имеем

$$(3.7) \quad \int_T \frac{(f_0(t) - \operatorname{Re}(A_0 \bar{t} a_0(t)))(1-t)^n}{a_0(t)S_0(t)} t^k dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -(n - 2\kappa_0) - 2.$$

$u(z)$ представляется в виде (3.1), где Φ_0, Φ_1 определяются формулами (3.5),

(3.6), причем в (3.5) следует полагать $P_0(z) \equiv 0$. Соответственно, если $n - 2\kappa_1 < -1$, то

$$(3.8) \quad \int_T \frac{(f_1(t) - \operatorname{Re}(A_0 \bar{t} a_1(t)))(1-t)^n}{a_1(t)S_1(t)} t^k dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -(n - 2\kappa_1) - 2$$

и в (3.6) следует полагать $P_1(z) \equiv 0$.

Доказательство. Так как функции $\Phi_0(z)$, $\Phi_1(z)$ и постоянная A_0 удовлетворяют условиям (3.2), (3.3), то положив

$$\operatorname{Re}(a_0(t)(\Phi_0(rt) + (1-r^2)\Phi_1(rt) + A_0 r \bar{t})) = f_{0r}(t),$$

$$\operatorname{Re}(a_1(t)(t\Phi_0'(rt) - 2r\Phi_1(rt) + (1-r^2)t\Phi_1'(rt) + A_0 r \bar{t})) = f_{1r}(t),$$

будем иметь

$$\operatorname{Re}(a_0(t)(\Phi_0(rt) + (1-r^2)\Phi_1(rt))) = f_{0r}(t) - \operatorname{Re}(A_0 r \bar{t} a_0(t)),$$

$$\operatorname{Re}(a_1(t)(t\Phi_0'(rt) - 2r\Phi_1(rt) + (1-r^2)t\Phi_1'(rt))) = f_{1r}(t) - \operatorname{Re}(A_0 r \bar{t} a_1(t)).$$

Предположим, что $n - 2\kappa_0 \geq 0$, $n - 2\kappa_1 \geq 0$. Применив лемму 3 относительно функции $\Phi_0(rz) + (1-r^2)\Phi_1(rz)$ получим

$$\Phi_0(rz) + (1-r^2)\Phi_1(rz) =$$

$$= K_0(f_{0r}, z) - K_0(Re(A_0 r \bar{t} a_0(t)), z) + \frac{S_0(z)P_{0r}(z)}{(1-z)^n},$$

где $P_{0r}(z) \in T_{n-2\kappa_0}$. Так как $f_{0r} \rightarrow f_0$ в $L^1(\rho)$, то $(1-t)^n f_{0r} \rightarrow (1-t)^n f_0$ в $L^1(T)$. Переходя к пределу при $r \rightarrow 1-0$ в последней формуле, получим (3.5). Аналогично, применив лемму 3 относительно функции $z\Phi'_0(rz) - 2r\Phi_1(rz) + (1-r^2)z\Phi'_1(rz)$, получим (3.6). Утверждение а) теоремы доказано. Пусть теперь $n - 2\kappa_0 < -1$. Снова применяя лемму 3, получим $\Phi_0(rz) + (1-r^2)\Phi_1(rz) = K_0(f_{0r}, z) - K_0(Re(A_0 r \bar{t} a_0(t)), z)$, причем,

$$\int_T \frac{(f_{0r}(t) - Re(A_0 r \bar{t} a_0(t)))(1-t)^n}{a_0(t)S_0(t)} t^k dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -(n - 2\kappa_0) - 2.$$

Переходя к пределу при $r \rightarrow 1-0$ и учитывая, что $(1-t)^n f_{0r} \rightarrow (1-t)^n f_0$ по норме $L^1(T)$, получаем (3.7). Аналогично получаем условия (3.8) при $n - 2\kappa_1 < 0$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 1. Условия (3.8) при $n - 2\kappa_0 \leq -2$ можно представить в виде

$$\int_T \frac{f_0(t)(1-t)^n}{a_0(t)S_0(t)} t^k dt = \int_T \frac{Re(A_0 \bar{t} a_0(t))(1-t)^n}{a_0(t)S_0(t)} t^k dt, \quad k = 0, 1, \dots, -(n - 2\kappa_0) - 2.$$

Пусть $n - 2\kappa_0 = -2$. Тогда $k = 0$ и

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{Re(A_0 \bar{t} a_0(t))(1-t)^n}{a_0(t)S_0(t)} dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{A_0}{2\pi i} \int_T \frac{(1-t)^n}{S_0(t)} \frac{dt}{t} + \frac{\overline{A_0}}{2\pi i} \int_T \frac{t a_0(t)(1-t)^n}{a_0(t)S_0(t)} dt \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{A_0}{S_0(0)} + \frac{\overline{A_0}}{2\pi i} \int_T \frac{t(1-t)^n}{S_0^-(t)} dt \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{A_0}{\beta_0} + \frac{\overline{A_0}}{\beta_0} \right). \end{aligned}$$

Тем самым, если $n - 2\kappa_0 = -2$, то условие (3.7) можно представить в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_0(t)(1-t)^n}{a_0(t)S_0(t)} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{A_0}{\beta_0} + \frac{\overline{A_0}}{\beta_0} \right).$$

Если $n - 2\kappa_0 < -2$, то при $k = 0$ будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_0(t)(1-t)^n}{a_0(t)S_0(t)} dt = \frac{A_0}{2\beta_0},$$

при $k = -(n - 2\kappa_0) - 2$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_0(t)(1-t)^n}{a_0(t)S_0(t)} t^{-(n-2\kappa_0)-2} dt = \frac{\overline{A_0}}{2\beta_0},$$

а при остальных $k = 1, 2, \dots, -(n - 2\kappa_0) - 3$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_0(t)(1-t)^n}{a_0(t)S_0(t)} t^k dt = 0.$$

Аналогично, если $n - 2\kappa_1 = -2$, то условие (3.8) можно представить в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_1(t)(1-t)^n}{a_1(t)S_1(t)} t^k dt = \frac{1}{2} \left(\frac{A_0}{\beta_1} + \frac{\overline{A_0}}{\beta_1} \right).$$

Если $n - 2\kappa_1 < -2$, то при $k = 0$ будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_1(t)(1-t)^n}{a_1(t)S_1(t)} dt = \frac{A_0}{2\beta_1},$$

при $k = -(n - 2\kappa_1) - 2$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_1(t)(1-t)^n}{a_1(t)S_1(t)} t^{-(n-2\kappa_1)-2} dt = \frac{\overline{A_0}}{2\beta_1},$$

а при остальных $k = 1, 2, \dots, -(n - 2\kappa_0) - 3$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_1(t)(1-t)^n}{a_1(t)S_1(t)} t^k dt = 0.$$

Полученные соотношения нам понадобятся в дальнейшем.

Из теоремы 1 следует, что если однородная задача A имеет решение, то при $n - 2\kappa_0 \geq -1$, $n - 2\kappa_1 \geq -1$ ее можно представить в виде

$$(3.9) \quad u_0(z) = \Psi_0(z) + (1 - |z|^2)\Psi_1(z) + A_0\bar{z},$$

где

$$(3.10) \quad \Psi_0(z) = -K_0(\operatorname{Re}(A_0\bar{t}a_0(t)), z) + \frac{S_0(z)P_0(z)}{(1-z)^n},$$

$$(3.11) \quad \Psi_1(z) = \frac{z}{2}\Psi'_0(z) + \frac{1}{2}K_1(\operatorname{Re}(A_0\bar{t}a_1(t)), z) + \frac{S_1(z)P_1(z)}{(1-z)^n},$$

$P_j(z) \in T_{n-2\kappa_j}$, $j = 0, 1$, A_0 -произвольная постоянная. Введем следующее обозначение

$$\frac{\hat{d}}{dz} = z \frac{d}{dz}$$

и представим функцию $u_0(z)$ в виде $u_0(z) = u_{01}(z) + u_{02}(z)$, где

$$\begin{aligned} u_{01}(z) &= A_0\bar{z} - K_0(\operatorname{Re}(A_0\bar{t}a_0(t)), z) + \\ &+ \frac{(1 - |z|^2)}{2} \left(K_1(\operatorname{Re}(A_0\bar{t}a_1(t)), z) - \frac{\hat{d}}{dz} K_0(\operatorname{Re}(A_0\bar{t}a_0(t)), z) \right), \\ u_{02}(z) &= \frac{S_0(z)P_0(z)}{(1-z)^n} + (1 - |z|^2) \left(\frac{1}{2} \frac{\hat{d}}{dz} \left(\frac{S_0(z)P_0(z)}{(1-z)^n} \right) + \frac{S_1(z)P_1(z)}{(1-z)^n} \right). \end{aligned}$$

Лемма 6. *Функция $u_{01}(z)$ является решением однородной задачи A.*

Доказательство. По лемме 5

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|(1-r^2) \left(K_1(\operatorname{Re}(A_0 \bar{t} a_1(t)), rt) - \frac{\hat{d}}{dz} K_0(\operatorname{Re}(A_0 \bar{t} a_0(t)), rt) \right)\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

а по лемме 2

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|\operatorname{Re} a_0(t) K_0(\operatorname{Re} A_0 \bar{t} a_0(t)), rt) - \operatorname{Re} A_0 \bar{t} a_0(t)\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Так как

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|\operatorname{Re}(A_0 r \bar{t} a_0(t)) - \operatorname{Re} A_0 \bar{t} a_0(t)\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

то получаем

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|\operatorname{Re}(a_0(t) K_0(\operatorname{Re} A_0 \bar{t} a_0(t)), rt) - A_0 r \bar{t}\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Тем самым функция $u_{01}(z)$ удовлетворяет условию (1.2). Далее имеем

$$\frac{\partial u_{01}(rt)}{\partial r} = u'_{01}(r, t) + u''_{01}(r, t),$$

где

$$\begin{aligned} u'_{01}(r, t) &= A_0 \bar{t} - r K_1(\operatorname{Re} A_0 \bar{t} a_1(t), rt), \\ u''_{01}(r, t) &= \frac{(1-r^2)}{2} t((K_1(\operatorname{Re} A_0 \bar{t} a_1(t), rt))' \\ &\quad - 3(K_0(\operatorname{Re} A_0 \bar{t} a_1(t), rt))' - rt(K_0(\operatorname{Re} A_0 \bar{t} a_1(t), rt))''). \end{aligned}$$

Учитывая лемму 2, получаем

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|u''_{01}(r, t)\|_{L^1(\rho)} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} \|u'_{01}(r, t)\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 7. *Для того, чтобы функция $u_{02}(z)$ удовлетворяла условиям (1.2), (1.3), необходимо и достаточно, чтобы функция $P_0(z)(1-z)^{-n}$ была представима в виде $\tilde{P}_0(z)(1-z)^{-(n-1)}$, где $\tilde{P}_0(z) \in T_{n-2\kappa_0-1}$.*

Доказательство. Согласно лемме 2 получаем

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} (1-r^2) \left\| \frac{\hat{d}}{dz} \frac{S_0(rt)P_0(rt)}{(1-rt)^n} + \frac{\hat{d}}{dz} \frac{S_1(rt)P_1(rt)}{(1-rt)^n} \right\|_{L^1(\rho)} = 0$$

и

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| \operatorname{Re} a_0(t) \frac{S_0(rt)P_0(rt)}{(1-rt)^n} \right\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Следовательно функция $u_{02}(z)$ удовлетворяет однородному условию (1.2) для любых $P_0 \in T_{n-2\kappa_0}$, $P_1 \in T_{n-2\kappa_1}$. Далее имеем

$$\frac{\partial u_{02}(rt)}{\partial r} = \frac{1-r^2}{2r} \frac{\hat{d}^2}{dz^2} \frac{S_0(rt)P_0(rt)}{(1-rt)^n} + \frac{1-r^2}{2r} \frac{\hat{d}}{dz} \frac{S_1(rt)P_1(rt)}{(1-rt)^n} +$$

$$+ \frac{1-r^2}{2r} \frac{\hat{d}}{dz} \frac{S_0(rt)P_0(rt)}{(1-rt)^n} - 2r \frac{S_1(rt)P_1(rt)}{(1-rt)^n}.$$

Учитывая леммы 2 и 4, заключаем, что функция $u_{02}(z)$ удовлетворяет однородному условию (1.3) тогда и только тогда, когда

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} (1-r^2) \left\| \frac{\hat{d}^2}{dz^2} \frac{S_0(rt)P_0(rt)}{(1-rt)^n} \right\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Последнее соотношение эквивалентно соотношению

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} (1-r^2) \left\| S_0(rt) \frac{\hat{d}^2}{dz^2} \frac{P_0(rt)}{(1-rt)^n} \right\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Заметим, что

$$\frac{\hat{d}^2}{dz^2} \frac{P_0(rt)}{(1-rt)^n} = \frac{Q(rt)}{(1-rt)^{n+2}},$$

где $Q(z)$ – полином порядка $n-2\kappa_0+2$. Пусть $P_0(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{n-2\kappa_0}z^{n-2\kappa_0}$. Сумма коэффициентов многочлена $Q(z)$ равна $n(n+1)(a_0 + a_1 + \dots + a_{n-2\kappa_0})$. Следовательно, если $Q(z)$ представим в виде $Q(z) = A_0 + A_1(1-z) + \dots$, то получаем $A_0 = Q(1) = n(n+1)(a_0 + a_1 + \dots + a_{n-2\kappa_0})$ и

$$\frac{Q(rt)}{(1-rt)^{n+2}} = \frac{A_0}{(1-rt)^{n+2}} + \frac{A_1}{(1-rt)^{n+1}} + \dots$$

Применяя лемму 4 заключаем, что $A_0 = 0$. Поэтому $P_0(z)$ делится на $1-z$. Положив $\tilde{P}_0(z) = P_0(z)(1-z)^{-1}$ получаем утверждение леммы. $\square$

Из теоремы 1 и лемм 6,7 следует:

Теорема 2. а) Пусть $\alpha \in (-1, 0]$, $n-2\kappa_0 \geq -1$, $n-2\kappa_1 \geq -1$. Тогда общее решение однородной задачи А можно представить в виде

$$(3.12) \quad u_0(z) = \Phi_0(z) + (1-|z|^2)\Phi_1(z) + A_0\bar{z},$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= -K_0(Re(A_0\bar{t}a_0(t)), z) + S_0(z)P_0(z), \\ \Phi_1(z) &= \frac{z}{2}\Phi'_0(z) + \frac{1}{2}K_1(Re(A_0\bar{t}a_1(t)), z) + S_1(z)P_1(z), \end{aligned}$$

причем $P_0(z) \in T_{-2\kappa_0}$, $P_1(z) \in T_{-2\kappa_1}$, а A_0 – произвольная постоянная.

б) Пусть $\alpha > 0$, $n-2\kappa_0 \geq -1$, $n-2\kappa_1 \geq -1$. Тогда общее решение однородной задачи А можно представить в виде (3.12), где

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= -\tilde{K}_0(Re(A_0\bar{t}a_0(t)), z) + \frac{S_0(z)P_0(z)}{(1-z)^{n-1}}, \\ \Phi_1(z) &= \frac{z}{2}\Phi'_0(z) + \frac{1}{2}\tilde{K}_1(Re(A_0\bar{t}a_1(t)), z) + \frac{S_1(z)P_1(z)}{(1-z)^n}, \end{aligned}$$

причем $P_0(z) \in T_{n-2\kappa_0-1}$, $P_1(z) \in T_{n-2\kappa_1}$, а A_0 – произвольная постоянная.

Теорема 3. а) Если $\min\{n - 2\kappa_0, n - 2\kappa_1\} > -2$ или $\min\{n - 2\kappa_0, n - 2\kappa_1\} = -2$ и $\kappa_0 \neq \kappa_1$, то однородная задача A имеет $4 + 2n - 2(\kappa_0 + \kappa_1)$ линейно независимых решений.

б) Если $\min\{n - 2\kappa_0, n - 2\kappa_1\} < -2$, то однородная задача A имеет $4 + \tilde{\kappa}_0 + \tilde{\kappa}_1$ линейно независимых решений, где $\tilde{\kappa}_j = \max\{n - 2\kappa_j - 1; -2\}$.

в) Если $n - 2\kappa_0 = n - 2\kappa_1 = -2$ и $\beta_0^2 = \beta_1^2$, то однородная задача A имеет одно нетривиальное решение.

г) Если $n - 2\kappa_0 = n - 2\kappa_1 = -2$ и $\beta_0^2 \neq \beta_1^2$, то однородная задача A не имеет нетривиальных решений.

Доказательство. В силу теоремы 1, если однородная задача A имеет решение, то ее можно представить в виде (3.12). Нам следует установить, что функция (3.12) удовлетворяет однородным условиям (3.2), (3.3) для любых $P_0(z) \in T_{n-2\kappa_0-1}$, $P_1(z) \in T_{n-2\kappa_1}$. Так как по лемме 5

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} (1 - r^2) \|\Phi_1(rt)\|_{L^1(\rho)} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} (1 - r^2) \|\Phi_1'(rt)\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

то получаем

$$(3.13) \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} \|\operatorname{Re}(a_0(t)\Phi_0(rt)) + \operatorname{Re}(A_0 \bar{t}a_0(t))\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

$$(3.14) \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} \|\operatorname{Re}(a_1(t)(t\Phi_0'(rt) - 2r\Phi_1(rt))) + \operatorname{Re}(A_0 \bar{t}a_1(t))\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Решив эту систему относительно Φ_0 , Φ_1 , получим $u_0(z) = u_{01}(z) + u_{02}(z)$, где функция $u_{02}(z)$ содержит $2 + 2n - 2(\kappa_0 + \kappa_1)$ произвольных действительных постоянных, а функция $u_{01}(z)$ - комплексную постоянную A_0 , то есть две действительные постоянные. Пусть теперь одно из чисел $n - 2\kappa_0$, $n - 2\kappa_1$ равно -2 . Предположим, что $n - 2\kappa_0 = -2$. Тогда

$$\int_T \frac{\operatorname{Re}(A_0 \bar{t}a_0(t))(1-t)^n}{a_0(t)S_0(t)} dt = 0$$

или

$$\frac{A_0}{\beta_0} + \frac{\overline{A_0}}{\beta_0} = 0.$$

То есть

$$(3.15) \quad \operatorname{Re} A_0 \beta_0 = 0.$$

Если $A_0 \neq 0$ удовлетворяет условию (3.15), то функция $\Phi_0(z)$ определяется однозначно по формуле $\Phi_0(z) = -K_0(\operatorname{Re}(A_0 \bar{t}a_0(t)), z)$. В формуле (3.6) определения функции $\Phi_1(z)$ ($f_1(t) \equiv 0$) содержатся $2 + n - 2\kappa_1$ произвольных действительных постоянных. Следовательно, однородная задача B имеет $\kappa_1 + 2$ линейно независимых решений. Аналогично можно рассматривать случай, когда $\kappa_1 = -2, \kappa_0 \geq 0$.

Утверждение а) теоремы доказано. Пусть теперь $\min\{n - 2\kappa_0, n - 2\kappa_1\} < -2$. Предположим, что $n - 2\kappa_0 < -2$. Тогда для разрешимости задачи (3.13), (3.14) необходимы условия

$$\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{\operatorname{Re}(A_0 \bar{t} a_0(t))(1-t)^n}{a_0(t) S_0(t)} t^k dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -(n - 2\kappa_0) - 2.$$

При $k = 0$ имеем

$$\frac{A_0}{2\pi i} \int_T \frac{(1-t)^n}{t S_0(t)} dt + \frac{\bar{A}_0}{2\pi i} \int_T \frac{\overline{t a_0(t)} (1-t)^n}{a_0(t) S_0(t)} dt = 0.$$

Так как $a_0(t) S_0^+(t) = \overline{a_0(t)} S_0^-(t)$, $t \in T$ и $S_0^-(z)$ на бесконечности имеет порядок $2\kappa_0$, то

$$\int_T \frac{(1-t)^n}{t S_0^-(t)} dt = \int_T \frac{\overline{t a_0(t)} (1-t)^n}{a_0(t) S_0^+(t)} dt = 0.$$

Следовательно

$$\frac{A_0}{2\pi i} \int_T \frac{(1-t)^n}{t S_0(t)} dt = 0.$$

Так как

$$\frac{A}{2\pi i} \int_T \frac{(1-t)^n}{t S_0(t)} dt = \frac{1}{S_0(0)} \neq 0,$$

то $A_0 = 0$. Поэтому $\Phi_0(z) \equiv 0$. Теперь, если $n - 2\kappa_1 > -2$, то

$$\Phi_1(z) = \frac{S_1(z) P_1(z)}{(1-z)^n},$$

где $P_1(z) \in T_{n-2\kappa_1}$ и общее решение однородной задачи (3.13), (3.14) можно представить в виде

$$u(z) = (1 - z\bar{z}) \frac{S_1(z) P_1(z)}{(1-z)^n}.$$

Если $n - 2\kappa_1 \leq -2$, то имеем $u(z) \equiv 0$. Если же $n - 2\kappa_1 < -2$, то как и прежде $A_0 = 0$. Предположим, что $n - 2\kappa_0 \geq 0$. Тогда $\Phi_0(z) = S_0(z) P_0(z) (1-z)^{-n}$, где $P_0(z) \in T_{n-2\kappa_0}$. Подставляя $\Phi_0(z)$ в выражение $\Phi_1(z)$, получаем $\Phi_1(z) = 2^{-1} z (S_0(z) P_0(z) (1-z)^{-n})'$. Если $n > 0$, то $P_0(z)$ делится на $1-z$ и получаем

$$\Phi_1(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{S_0(z) P_0(z)}{(1-z)^{n-1}} \right)',$$

$P_0(z) \in T_{n-2\kappa_0-1}$. Общее решение можно представить в виде

$$u(z) = \frac{S_0(z) P_0(z)}{(1-z)^{n-1}} + (1 - |z|^2) \frac{z}{2} \left(\frac{S_0(z) P_0(z)}{(1-z)^n} \right)'.$$

Утверждение б) теоремы доказано. Пусть теперь $n - 2\kappa_0 = n - 2\kappa_1 = -2$. Если $A_0 = 0$, то $\Phi_0(z) \equiv \Phi_1(z) \equiv 0$ и $u(z) \equiv 0$. Поэтому будем предполагать, что

$A_0 \neq 0$. Так как $f_0(t) \equiv f_1(t) \equiv 0$, то согласно замечанию к теореме 1, число A_0 удовлетворяет условиям

$$\frac{A_0}{\beta_0} + \frac{\overline{A_0}}{\beta_0} = 0, \quad \frac{A_0}{\beta_1} + \frac{\overline{A_0}}{\beta_1} = 0.$$

Эти условия эквивалентны условию $\beta_0^2 = \beta_1^2$. Общее решение однородной задачи (3.13), (3.14) можно представить в виде

$$u(z) = \Phi_0(z) + (1 - z\bar{z})\Phi_1(z),$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= -\tilde{K}_0(\operatorname{Re}(A_0 \bar{t} a_0(t)), z), \\ \Phi_1(z) &= \frac{z}{2} \Phi'_0(z) + \frac{1}{2} \tilde{K}_1(\operatorname{Re}(A_0 \bar{t} a_1(t)), z), \end{aligned}$$

A_0 удовлетворяет условию (3.15) (либо $\operatorname{Re} A_0 \beta_1 = 0$). Если $\beta_0^2 \neq \beta_1^2$, тогда $A_0 = 0$, следовательно $\Phi_0(z) \equiv \Phi_1(z) \equiv 0$ и $u(z) \equiv 0$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 4. а) Если $\min\{n - 2\kappa_0, n - 2\kappa_1\} > -2$ или $\min\{n - 2\kappa_0, n - 2\kappa_1\} = -2$ лишь при $\kappa_0 \neq \kappa_1$, то задача A имеет решение для любых функций $f'_0, f_1 \in L^1(\rho)$.

б) Если $\min\{n - 2\kappa_0, n - 2\kappa_1\} < -2$, то для разрешимости задачи A необходимо и достаточно, чтобы функции f_0 и f_1 удовлетворяли $-4 + \kappa'_0 + \kappa'_1$ линейно независимым условиям, где $\kappa'_j = \max\{n - 2\kappa_j; 2\}$, $j = 0, 1$.

в) Если $n - 2\kappa_0 = n - 2\kappa_1 = -2$ и $\beta_0^2 \neq \beta_1^2$, то задача A разрешима для любых функций $f'_0, f_1 \in L^1(\rho)$.

г) Если $n - 2\kappa_0 = n - 2\kappa_1 = -2$ и $\beta_0^2 = \beta_1^2$, то для разрешимости задачи A необходимо, чтобы функции f_0 и f_1 удовлетворяли одному линейно независимому условию.

Доказательство. Пусть $\min\{n - 2\kappa_0, n - 2\kappa_1\} > -2$. Рассмотрим функцию

$$(3.16) \quad u(z) = \Phi_0(z) + (1 - |z|^2)\Phi_1(z),$$

где

$$(3.17) \quad \Phi_0(z) = K_0(f_0, z),$$

$$(3.18) \quad \Phi_1(z) = 2^{-1}(z\Phi'_0(z) - K_1(f_1, z)).$$

Так как в силу леммы 2

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|\operatorname{Re} a_0(t) K_0(f_0; rt) - f_0(t)\|_{L^1(\rho_r)} = 0,$$

то $u(z)$ из (3.16) удовлетворяет условию (1.2). Далее имеем

$$\frac{\partial u(rt)}{\partial r} = (1 - r^2)t(K_0(f_0; rt))' + rK_1(f_1; rt) +$$

$$+\frac{1}{2}(1-r^2)t\left((K_0(f_0;rt))'+rt\left(\tilde{K}_0(f_0;rt)\right)''-(K_1(f_1;rt))'\right).$$

Применив снова лемму 2 будем иметь

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|\operatorname{Re} a_1(t)K_1(f_1;rt) - f_1(t)\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

а остальные слагаемые функции $\frac{\partial u(rt)}{\partial r}$, в силу леммы 5, стремятся к нулю в $L^1(\rho)$. Тем самым $u(z)$ удовлетворяет (1.3). Следовательно теорема при $\min\{n - 2\kappa_0, n - 2\kappa_1\} > -2$ доказана. Пусть теперь $n - 2\kappa_0 = -2, n - 2\kappa_1 > -2$. Согласно замечанию к теореме 1, для разрешимости задачи A необходимо условие

$$(3.19) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_0(t)(1-t)^n}{a_0(t)S_0(t)} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{A_0}{\beta_0} + \frac{\overline{A_0}}{\beta_0} \right).$$

Поэтому, если $f_0'(t) \in L^1(\rho)$ - произвольная функция, то число A_0 выберем так, чтобы имело место (3.19). Решением задачи A будет

$$u(z) = \Phi_0(z) + (1 - |z|^2)\Phi_1(z) + A_0\bar{z},$$

где Φ_0 и Φ_1 определяются соответственно формулами (3.5) и (3.6), а A_0 - из (3.19). Аналогично рассматривается случай $n - 2\kappa_0 > -2, n - 2\kappa_1 = -2$. Утверждение а) теоремы доказано.

Пусть теперь $\min\{n - 2\kappa_0, n - 2\kappa_1\} < -2$ и пусть $n - 2\kappa_0 < -2, n - 2\kappa_1 < -2$. Согласно замечанию к теореме 1 постоянную A_0 следует выбрать так, чтобы

$$(3.20) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_0(t)(1-t)^n}{a_0(t)S_0(t)} dt = \frac{A_0}{\beta_0}.$$

Из этого равенства следует, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_0(t)(1-t)^n t^{-(n-2\kappa_0)-2}}{a_0(t)S_0(t)} dt = (-1)^n \frac{\overline{A_0}}{\beta_0}.$$

Следовательно, учитывая замечание к теореме 1, получаем, что для разрешимости задачи A необходимо, чтобы функция f_0 удовлетворяла $-(n - 2\kappa_0) - 3$ линейно независимым условиям. Так как A_0 уже выбрано, то учитывая опять замечание к теореме 1, для разрешимости задачи A необходимо, чтобы функция f_1 удовлетворяла $-(n - 2\kappa_1) - 1$ линейно независимым условиям. Всего получаем $-4 - 2n + 2(\kappa_0 + \kappa_1)$ линейно независимых условий на функции f_0 и f_1 . Далее, как при доказательстве утверждения а), установим, что функция $u(z) = \Phi_0(z) + (1 - |z|^2)\Phi_1(z) + A_0\bar{z}$, где Φ_0 и Φ_1 определяются формулами (3.5) и (3.6) соответственно, A_0 - по формуле (3.20), удовлетворяет условиям (1.2), (1.3). Теперь предположим, что $n - 2\kappa_0 = n - 2\kappa_1 = -2$. Тогда получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_0(t)(1-t)^n}{a_0(t)S_0(t)} dt = \operatorname{Re}(A_0\beta_0)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_1(t)(1-t)^n}{a_1(t)S_1(t)} dt = \operatorname{Re}(A_0\beta_1).$$

Если $\beta_0^2 \neq \beta_1^2$, то A_0 можно выбирать так, чтобы выполнялись оба условия. Поэтому в этом случае, задача A разрешима для любых функций $f_0(t), f_1(t)$. Если $\beta_0^2 = \beta_1^2$, то A_0 определяется по одному из равенств (3.15), при этом второе равенство представляет собой единственное линейно независимое условие на f_0 или f_1 . Теорема доказана. $\square$

Abstract. The paper investigates a Riemann-Hilbert type problem for second order nonregular elliptic equation in weighted spaces. It is established that the number of linearly independent solutions of the homogeneous problem and the number of conditions on the boundary functions depend not only on the order of singularity of the weight function and coefficient indices of the considered problem, but also on the behavior of these functions at singular points.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А.В. Бицадзе, Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М. Наука (1966).
- [2] И.А. Бикчантаев, "Некоторые краевые задачи для одного эллиптического уравнения", ДАН СССР, **209**, 5 (1973).
- [3] Н.Е. Товмасян, "Задача типа Дирихле для одного класса неправильно-эллиптических уравнений высокого порядка", Известия НАН Армении, серия Математика, **27**, 1, 99 - 108 (1992).
- [4] N. E. Tovmasyan, Non-regular Differential Equations and Calculations of Electrodynamical Fields, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong-Kong, 1998.
- [5] А.П. Солдатов, "Обобщенная задача Дирихле - Неймана", Линейные операторы в функциональных пространствах. Грозный, 153 - 154 (1989).
- [6] Begehr H. Kumar A, "Boundary Value Problem For The Inhomogeneous Polyanalytic Equation I", Analysis 25, 55 - 71 (2005).
- [7] А. О. Бабалян, "О краевой задаче для несобственно эллиптических уравнений в многосвязной области", Известия НАН Армении, серия Математика, **29**, 2, р. 11-21 (1994).
- [8] Г.М. Айрапетян, "Граничная задача типа Римана-Гильберта для n -голоморфных функций", Известия АН Армении, серия Математика, **31**, 3, 24 - 41 (1996).
- [9] Г. М. Айрапетян, И. В. Оганисян, "Задача типа Римана-Гильберта для уравнения Бицадзе в пространствах с весом", Ереван, Математика в высшей школе, **1**, 1, 5 - 11 (2005).
- [10] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения. М., Наука (1968).
- [11] Г. М. Айрапетян, "Задача Дирихле для бигармонических функций в пространствах с весом", Известия НАН Армении, серия Математика, **39** 3, 3 - 12 (2004).
- [12] Г. М. Айрапетян, "Задача Дирихле в пространствах с весом", Известия НАН Армении, серия Математика, **36**, 3, 12 - 35 (2001).
- [13] Г. М. Айрапетян, М.С. Айрапетян, "Граничная задача Гильберта в весовых пространствах $L^1(\rho)$ ", Известия НАН Армении, серия Математика, **43**, 2, 85-99 (2008).

Поступила 18 декабря 2008