

Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 2, 2010, стр. 21-36.

НЕ φ -ДОПУСТИМЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ СВОБОДНЫХ БЕРНСАЙДОВЫХ ГРУПП

В. С. АТАБЕКЯН

Ереванский государственный университет

E-mail: *avarujan@ysu.am*

Аннотация. В работе для произвольного нечетного $n \geq 1003$ и для произвольного автоморфизма φ свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ найдено достаточное условие для существования не φ -допустимой нормальной подгруппы группы $B(m, n)$. В частности, если автоморфизм φ - нормальный, то для любого базиса $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ группы $B(m, n)$ существует такое целое число k , что каждый базисный элемент a_i сопряжен с $\varphi(a_i)^k$.

MSC2000 number: 20F50, 20F05, 20E36

Ключевые слова: Свободная бернсайдова группа, нормальный автоморфизм, φ -допустимая подгруппа, неабелева простая группа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Обозначим через $B(m, n)$ фактор-группу F_m/F_m^n , где F_m - абсолютно свободная группа произвольного (конечного или бесконечного) ранга m , а F_m^n - подгруппа порожденная всевозможными n -ми степенями (n - натуральное число) элементов из F_m . Группа $B(m, n)$ свободна в многообразии всех n -периодических групп и называется свободной периодической или свободной бернсайдовой группой периода n и ранга m . Хорошо известная теорема С. И. Адяна утверждает, что для всех нечетных $n \geq 665$ и $m \geq 2$ группа $B(m, n)$ бесконечна (решение проблемы Бернсайда).

Доказательство бесконечности групп $B(m, n)$ при нечетных $n \geq 665$ основано на полной классификации периодических и приведенных слов рангов α , которая дана в работах [1], [2]. Известно, что развитая в [1], [2] теория открыла путь к решению многих неподдававшихся долгое время трудных проблем теории групп.

В совместной статье А. Ю. Ольшанского и С. В. Иванова [3] и в статье С. И. Адяна [4] дан обзор дальнейших достижений в теории бернсайдовых групп. Среди последних следует подчеркнуть доказательство бесконечности групп $B(m, n)$ для четных показателей n , полученное С. В. Ивановым в [5] (для всех $n \geq 2^{48}$ делящихся на 2^9) и И. Г. Лысенком в [6] (для всех $n \geq 8000$ делящихся на 16).

Одним из мало изученных задач в этой области есть проблема, поставленная А. Ю. Олышанским в 1980 году: “Пусть n - достаточно большое нечетное число. Описать автоморфизмы свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ ” (см [7], вопрос 8.53.а)). Лишь сравнительно недавно Е. А. Черепановым опубликованы работы [8-9], нацеленные на исследование групп автоморфизмов $Aut(Bm, n)$. А именно:

- в статье [8], доказывается, что при $m \geq 2$ и для всех нечетных $n > 10^{10}$, а также для всех четных $n > 8000$ делящихся на 2^4 , группа $Aut(Bm, n)$ содержит свободную подполугруппу ранга 2,

- в [9] доказывается, что при всех достаточно больших нечетных n ($n > 10^{78}$) каждый нормальный автоморфизм группы $B(m, n)$ - внутренний.

Напоминаем, что автоморфизм φ группы G называется **нормальным**, если $\varphi(N) = N$ для любой нормальной подгруппы N группы G .

Определение 1. Пусть G - произвольная группа и $\varphi \in Aut(G)$ - некий автоморфизм группы G . Подгруппа H группы G называется φ -допустимой, если $\varphi(H) = H$.

При нормальном автоморфизме $\varphi \in Aut(G)$ любая нормальная подгруппа данной группы G φ -допустима и наоборот. Ясно, что если N есть φ -допустимая нормальная подгруппа группы G , то автоморфизм φ индуцирует некий автоморфизм фактор группы G/N . Множество всех нормальных автоморфизмов данной группы G есть подгруппа группы $Aut(G)$, содержащая все внутренние автоморфизмы группы G .

Наша основная цель - доказать следующую теорему.

Теорема 1. Пусть $n \geq 1003$ - произвольное нечетное число и φ - автоморфизм свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ ранга m с базисом $\{a_1, a_2, \dots\}$. Если для некоторого i элемент $\varphi(a_i)$ не сопряжен в $B(m, n)$ со степенями базисного элемента a_i , то существует нормальная подгруппа N группы $B(m, n)$, такая что:

1. подгруппа N не φ -допустима,
2. фактор-группа $B(m, n)/N$ - простая неабелева группа,
3. для любого j элемент a_j имеет порядок n в группе $B(m, n)/N$.

Из пункта 1 теоремы 1 следует, что если φ - произвольный нормальный автоморфизм группы $B(m, n)$, то для любого базиса $\{a_1, a_2, \dots\}$ и для любого i существуют целое число k_i и элемент $b_i \in B(m, n)$ такие, что $\varphi(a_i) = b_i a_i^{k_i} b_i^{-1}$. Поскольку вместе с $\{a_1, a_2, \dots\}$ базисом является и система порождающих $\{a_1 \cdot a_2, a_2, \dots\}$,

то для некоторого числа k и некоторого элемента $b \in B(m, n)$ имеет место $\varphi(a_1 \cdot a_2) = b(a_1 \cdot a_2)^k b^{-1}$. Отсюда следует, что $b_1 a_1^{k_1} b_1^{-1} \cdot b_2 a_2^{k_2} b_2^{-1} = b(a_1 \cdot a_2)^k b^{-1}$. Профакторизуя группу $B(m, n)$ по коммутанту, из последнего равенства немедленно получаем $k_1 = k_2 = k$. Таким образом справедливо

Следствие 1. Пусть $n \geq 1003$ - произвольное нечетное число и φ - нормальный автоморфизм свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$. Тогда для любого базиса $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ группы $B(m, n)$ существует такое целое число k , что $\varphi(a_i)$ сопряжен с a_i^k для любого i .

Отметим также, что теорема 1 усиливает следующий результат А. Ю. Ольшанского: если $B(m, n)$ - свободная бернсайдовая группа достаточно большого нечетного периода n ($n > 10^{78}$) с базисом $\{a_1, a_2, \dots\}$ и слово $v = v(a_1, a_2, \dots, a_m)$ не сопряжено в $B(m, n)$ со степенями порождающих $a_1, a_2, \dots$, то существует неабелева простая фактор-группа $B(m, n)/N$ такая, что канонический образ порождающей a_1 в $B(m, n)/N$ имеет порядок n и образы v и a_1 не сопряжены относительно произвольного автоморфизма группы $B(m, n)/N$ (см. лемму 2.3 работы [10]).

В дальнейшем изложении мы без специальных ссылок будем использовать обозначения и терминологию монографии [2] и статьи [11].

2. ПОСТРОЕНИЕ НЕАБЕЛЕВОЙ ПРОСТОЙ ГРУППЫ.

Пусть $n \geq 1003$ - произвольное нечетное число и φ - автоморфизм свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ с базисом $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ и для некоторого i элемент $\varphi(a_i)$ не сопряжен в $B(m, n)$ со степенями a_i . Не умоляя общности можно предположить, что $i = 1$. Допустим, что $v(a_1, a_2, \dots, a_m)$ такое слово в алфавите $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, что $\varphi(a_1) = v(a_1, a_2, \dots, a_m)$ в группе $B(m, n)$

Модифицируем конструкцию бесконечной группы с циклическими подгруппами из работы С. И. Адяна и И. Г. Лысенка [11] для получения нормальной подгруппы N группы $B(m, n)$ с указанными в теореме 1 свойствами.

Пусть $B(m, n, 0)$ свободная группа с порождающими $a_1, a_2, \dots, a_m$. Для всякого натурального $\beta > 0$ через $B(m, n, \beta)$ обозначим группу с теми же образующими и с системой определяющих соотношений $\{A^n = 1, \text{ где } A \in \bigcup_{i \leq \beta} \mathcal{E}_i\}$ (см. [2], VI.2.2). Положим $a \equiv a_1$, $b \equiv a_2$. В дальнейшем запись $X \equiv Y$ означает графическое равенство слов X и Y .

Согласно VI.2.4 и VI.1.2 из [2], для слова $v = v(a_1, a_2, \dots, a_m)$ можно указать такое слово S и такой элементарный период E некоторого ранга $\gamma_0 \leq \beta + 1$, что слово E^q входит в некоторое слово из класса $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma_0-1}$ и при некотором

$$0 < r \leq \frac{n+1}{2} + 46$$

выполнено соотношение

$$(2.1) \quad v(a_1, a_2, \dots, a_m) \stackrel{B(m,n,\beta)}{=} S E^r S^{-1}.$$

По условию теоремы 1, $E \neq a^{\pm 1}$ в группе $B(m, n)$. Фиксируем указанный элементарный период E ранга γ_0 . При $\alpha = 0, 1, 2, \dots, \gamma_0$ полагаем $\Gamma_\alpha \equiv B(m, n, \alpha)$.

Предположим, что $\alpha > \gamma_0$ и группы Γ_δ при $\delta < \alpha$ уже определены. Пусть Ψ_α есть множество всех элементарных периодов C ранга $\alpha - 1$, удовлетворяющих соотношению

$$C \stackrel{\alpha-2}{=} A^{-d} Z^{-1} B^{-d} Z A^d Z^{-1} A^d Z$$

где A и B - минимизированные элементарные периоды некоторых рангов γ и β , $Z \in \mathcal{M}_{\alpha-2}$, $\gamma \leq \beta \leq \alpha - 2$, $d = 191$ (см. §1 в [11]). Через Π_α обозначим множество всех тех приведенных форм коммутаторов (см. определение 3.1 работы [11])

$$[E^d, Z^{-1} E^d Z] \equiv E^{-d} Z^{-1} E^{-d} Z E^d Z^{-1} E^d Z,$$

которые принадлежат множеству Ψ_α , где E - указанный выше элементарный период ранга γ_0 , а Z - произвольное слово из множества $\mathcal{M}_{\alpha-2}$ (вообще говоря, множество Π_α для данного α может быть и пустым). Пусть $\overline{\Pi}_\alpha$ такое подмножество множества Π_α , что каждый элемент $C \in \Pi_\alpha$ сопряжен в группе $\Gamma_{\alpha-2}$ одному и только одному слову D такому, что $D \in \overline{\Pi}_\alpha$ или $D^{-1} \in \overline{\Pi}_\alpha$. Подмножество $\overline{\Psi}_\alpha \subset \Psi_\alpha$ выберем так, чтобы выполнялись следующие два условия:

1. $\overline{\Pi}_\alpha \subset \overline{\Psi}_\alpha$,
2. каждый элемент $C \in \Psi_\alpha$ сопряжен в группе $\Gamma_{\alpha-2}$ одному и только одному слову D такому, что $D \in \overline{\Psi}_\alpha$ или $D^{-1} \in \overline{\Psi}_\alpha$.

Через Φ_α обозначим множество слов, содержащее для каждого периода $C \in \overline{\Psi}_\alpha$ ровно два слова

$$(2.2) \quad C^{200} A C^{200} A^2 \dots A^{n-1} C^{200} a,$$

$$(2.3) \quad C^{270} A C^{270} A^2 \dots A^{n-1} C^{270} b,$$

а для каждого периода $C \in \overline{\Pi}_\alpha$ еще одно слово

$$(2.4) \quad C^{340} A C^{340} A^2 \dots A^{n-3} C^{340} A^{n-1} C^{340} A,$$

где A - какой-нибудь фиксированный для данного $C \in \overline{\Psi}_\alpha$ элементарный период, участвующий в соотношении $C \stackrel{\alpha=2}{=} A^{-d} Z^{-1} B^{-d} Z A^d Z^{-1} A^d Z$.

В качестве группы Γ_α возьмем группу

$$(2.5) \quad \Gamma_\alpha = \left\langle a_1, a_2, \dots, a_m \mid R = 1, F = 1, R \in \bigcup_{\beta \leq \alpha} \mathcal{E}_\beta, F \in \bigcup_{\beta \leq \alpha} \Phi_\beta \right\rangle,$$

а в качестве Γ возьмем группу

$$(2.6) \quad \Gamma = \left\langle a_1, a_2, \dots, a_m \mid R = 1, F = 1, R \in \bigcup_{\beta > 0} \mathcal{E}_\beta, F \in \bigcup_{\beta \geq \gamma_0 + 1} \Phi_\beta \right\rangle.$$

Для группы Γ повторим все формальные определения из §1 в [11]. Все леммы работы [11], предложения и их доказательства для построенной нами группы Γ остаются в силе. Дополнительно возникают изменения в формулировке и доказательстве леммы 4.1 из [11] в связи с новыми определяющими соотношениями вида (2.4). А именно, в формулировке леммы 4.1 необходимо:

1. в первом предложении отрывок “... $k = 200$ и $x = a$ для F вида (2.2), $k = 300$ и $x = b$ для F вида (2.3)” заменить на “... $k = 200$ и $x = a$ для F вида (2.2), $k = 270$ и $x = b$ для F вида (2.3) и $k = 340$ и $x = A$ для F вида (2.4)”;

2. последнее предложение заменить на предложение “Кроме того, для каждой пары слов (2.2) и (2.3) и для каждой тройки слов (2.2), (2.3) и (2.4), соответствующих данному периоду $C \in \overline{\Psi}_\alpha$, два указанных слова H и, соответственно, три указанных слова H можно выбрать так, чтобы соответствующие им периоды D и слова u_i при $1 \leq i \leq n - 1$ были одинаковы”.

Доказательство указанной версии леммы 4.1 для слов F вида (2.2) или вида (2.3) проводится так, как раньше. Для слов F вида (2.4) все нужно повторить, заменив лишь слово v_n , определенное соотношением (4.5) из [11] словом $v_n = G^{29}[G, A_1, G]_0 G^{29}$, а ссылки на лемму 3.6 из [11] заменить ссылками на лемму 3.5 из [11].

В соответствии с изменениями в лемме 4.1 работы [11], естественным образом меняются и множества $\overline{\mathcal{H}}_\alpha$. Указанные изменения влекут за собой очевидные изменения там, где используется лемма 4.1 из [11] и там, где рассматриваются элементы множества $\overline{\mathcal{H}}_\alpha$.

Итак, для групп Γ и Γ_α , определенных соотношениями (2.5) и (2.6), справедливы все леммы из §2 – §7 работы [11], в том числе - лемма 4.1 с указанными выше поправками, а также леммы 1, 4 и 5 работы [12]. Поэтому справедлива

Лемма 1. *Группа Γ является бесконечной простой группой, все максимальные подгруппы которой циклические группы порядка n .*

3. КОММУТАТОРЫ

В этом параграфе собраны те леммы, которые носят общий характер и справедливы не только для групп Γ_α и Γ , построенных выше, но и для любой группы Γ_α и Γ , построенной в работах [11-13]. В частности, на протяжении этого параграфа под словом “ранг” можно подразумевать ранг в смысле любой из указанной группы.

Следующая лемма доказывается точно также, как лемма 4 работы [13].

Лемма 2. *Если A – элементарный период некоторого ранга, $[A^d, Z^{-1} A^d Z] \neq 1$ в Γ и коммутаторы $[A^d, Z^{-1} A^d Z]$ и $[A^d, Z'^{-1} A^d Z']$ сопряжены в группе Γ , то для некоторых целых чисел u и v или $Z'^{-1} A^{-d} Z' \stackrel{\Gamma}{=} A^u Z^{-1} A^{-d} Z A^v$, или $Z' A^{-d} Z'^{-1} \stackrel{\Gamma}{=} A^u Z^{-1} A^d Z A^v$.*

Лемма 3. *При $1 \leq |k| \leq \frac{n-1}{2}$ и $\delta = \pm 1$ каждый из коммутаторов*

$$[a^k, b^{-9\delta} a^k b^{9\delta}] \equiv a^{-k} b^{-9\delta} a^{-k} b^{9\delta} a^k b^{-9\delta} a^k b^{9\delta},$$

является минимизированным элементарным периодом ранга 2.

Доказательство. Пусть $\delta = 1$. Очевидно, $\text{Пер}(2, [a^k, b^{-9} a^k b^9])$ непусто. При $1 \leq |k| \leq q-1$ в слова $a^{-k} b^{-9} a^{-k} b^9 a^k b^{-9} a^k b^9$ не входят активные вхождения, а при $q \leq |k| \leq \frac{n-1}{2}$ активными являются все ядра ранга 1 с основами $a^{\pm k}$. Отсюда и из вида слов $[a^k, b^{-9} a^k b^9]$ следует, что для произвольного периода B ранга 2 и любых порождающих вхождений V и W в целые слова $Y \in \text{Цел}(X, 2, [a^k, b^{-9} a^k b^9])$ и $Y_1 \in \text{Цел}(X_1, 2, B)$ из $\text{ВзНорм}_1(V, W)$ и $l_2(W) \geq 9$ следует $\rho_{2, B}(X_1) = \rho_{2, [a^k, b^{-9} a^k b^9]}(X) = 4$ при $1 \leq |k| \leq 8$ и $\rho_{2, [a^k, b^{-9} a^k b^9]}(X) = 8 = \rho_{2, B}(X_1)$ при $9 \leq |k| \leq \frac{n-1}{2}$. Поэтому, согласно I.4.10 [2], слова $[a^k, b^{-9} a^k b^9]$ являются элементарными периодами ранга 2. Поскольку, очевидно, $[a^k, b^{-9} a^k b^9]^q \in \mathcal{M}_2$ при $1 \leq |k| \leq \frac{n-1}{2}$, то каждый из периодов $[a^k, b^{-9} a^k b^9]$ ранга 2 минимизирован (см. определение 2.2 [11]). Случай $\delta = -1$ рассматривается аналогично. $\square$

Лемма 4. *Пусть A и B – минимизированные элементарные периоды рангов γ и β ($\gamma \leq \beta$) и $Z \in \mathcal{M}_{\beta-1}$. Тогда если коммутатор $[a^k, b^{-9\delta} a^k b^{9\delta}]$ сопряжен в группе $B(m, n)$ с коммутатором $[A^d, Z^{-1} B^d Z]$, где $\delta = \pm 1$ и $1 \leq |k| \leq$*

$\frac{n-1}{2}$, то $k = \pm d$, $A \equiv a^\varepsilon$, $B \equiv a^\mu$, где $\varepsilon, \mu = \pm 1$ и слова $[a^k, b^{-9\delta} a^k b^{9\delta}]$ и $[A^d, Z^{-1} B^d Z]$ сопряжены в группе $B(m, n, 1)$. Аналогичное заключение верно и при сопряженности коммутаторов $[a^k, b^{-9\delta} a^k b^{9\delta}]^{-1}$ и $[A^d, Z^{-1} B^d Z]$.

Доказательство. Сначала заметим, что леммы 3.2, 7.2 и 6.6 из [11] остаются справедливыми, если в их формулировках и доказательствах эквивалентность в ранге α заменить на эквивалентность в смысле монографии [2], а равенство слов в группе Γ_α заменить на равенство в группе $B(m, n, \alpha)$. По лемме 3 достаточно рассматривать случай $[A^d, Z^{-1} B^d Z] \neq 1$ в группе $B(m, n)$. В силу VI.2.4 и IV.3.12 из [2] можно считать, что $Z \in \mathcal{M}_\alpha \cap \mathcal{A}_{\alpha+1}$ для некоторого $\alpha \geq \beta$. По лемме 3.2 из [11] найдем приведенную форму G коммутатора $[A^d, Z^{-1} B^d Z]$. Согласно лемме 7.2 из [11], G - элементарный период некоторого ранга $\lambda \geq \gamma + 1$.

Пусть $\delta = 1$ (случай $\delta = -1$ рассматривается совершенно аналогично). Если $[a^k, b^{-9} a^k b^9]$ и $[A^d, Z^{-1} B^d Z]$ сопряжены в группе $B(m, n, \alpha)$, то, как следует из определения 3.1 работы [11], в $B(m, n, \alpha)$ сопряжены также $[a^k, b^{-9} a^k b^9]$ и G . В силу лемм 3 и 6.6 из [11], $\lambda = 2$, $\gamma = \beta = 1$ и периоды $[a^k, b^{-9} a^k b^9]$ и G сопряжены в ранге 1.

Согласно IV.1.4 из [2], для произвольного вхождения V с основой A_1^d в целое слово G^{30} ранга 2, где A_1 - циклический сдвиг элементарного периода A ранга 1, выбранный согласно определению 3.1 работы [11], можно найти $U \in \mathcal{Y}(1, G^{30})$, что $\text{Согл}(V, U)$. Пусть вхождение V выбрано так, что U - опорное ядро слова G^{30} . В силу IV.1.7 из [2] для некоторого натурального $r \geq d - 44$ имеем $\text{Осн}(U) \equiv A_2 A_1^r A_3$, где A_3 - начало, а A_2 - конец слова A_1 . Применим лемму 2.7 работы [11]. Поскольку $r > 9$ и в $X_1 \in \text{Пер}(2, [a^k, b^{-9} a^k b^9])$ активными в ранге 1 могут быть лишь вхождения с основами a^t (при $|k| \geq q$ и $|t| \geq q$) и в X_1 не могут входить элементарные 10-степени ранга 1, кроме a^t (при $|k| \geq 9$ и $|t| \geq 10$), то получаем, что $A_2 A_1^r A_3 \equiv a^{\pm k \pm n t}$, где $1 \leq |k| \leq \frac{n-1}{2}$. Тем самым, $A_1 \equiv a^{\pm 1}$, и поэтому $A \equiv a^{\pm 1}$. Аналогичным образом показывается, что $B \equiv a^{\pm 1}$.

Предположим, что слово G имеет вид (3.2) из [11] и рассмотрим нормальное порождающее вхождение ранга 2 вида $G^{10} G_1 * a^{r_1} S_2 a^d S_2^{-1} a^{r_2} * G_2 G^{19}$ в слово G^{30} , где $G \equiv G_1 a^{r_1} S_2 a^d S_2^{-1} a^{r_2} G_2$. По лемме 2.7 из [11], можно указать такое порождающее вхождение $R * a^{r_1} S_2 a^d S_2^{-1} a^{r_2} * S$ в слово $Y_1 \in \text{Цел}(X_1, 2, [a^k, b^{-9} a^k b^9])$, что $\text{ВзНорм}_1(G^{10} G_1 * a^{r_1} S_2 a^d S_2^{-1} a^{r_2} * G_2 G^{19}, R * a^{r_1} S_2 a^d S_2^{-1} a^{r_2} * S)$. И опять, поскольку активными вхождениями ранга 1 в слово $X_1 \in \text{Пер}(2, [a^k, b^{-9} a^k b^9])$ могут быть лишь вхождения с основами a^t (при $|k| \geq q$ и $|t| \geq q$), получаем,

что $k = \pm d$. Случай, когда слово G имеет вид (3.1) работы [11], рассматривается аналогичным образом.

Наконец, случай когда сопряжены слова $[a^k, b^{-9\delta} a^k b^{9\delta}]^{-1}$ и $[A^d, Z^{-1} B^d Z]$ доказывается тем же путем. Лемма доказана. $\square$

Лемма 5. (Ср. с леммами 3.5 и 3.6 из [11]) Пусть $D \equiv [a^k, b^{-9\delta} a^k b^{9\delta}]$, где $1 \leq |k| \leq \frac{n-1}{2}$ и $\delta = \pm 1$. Для любого t , где $1 \leq t \leq n-1$, определим

$$u_t' \equiv [D, a^t, D]_0 \equiv \begin{cases} a^{-k} b^{-9\delta} a^{-k} b^{9\delta} a^{2k} b^{-9\delta} a^k b^{9\delta}, & t = k \\ D a^{t-k} b^{-9\delta} a^{-k} b^{9\delta} a^k b^{-9\delta} a^k b^{9\delta}, & t \neq k \end{cases}$$

и предположим, что слово u_t получается от слова u_t' , если в последнем показатели $t-k$ и $2k$ заменить своими абсолютно наименьшими вычетами по модулю n . Тогда верны утверждения:

- (a) $D^q u_t D^q \in \mathcal{M}_1$;
- (b) $\neg \text{Согл}(*D^q * u_t D^q, D^q u_t * D^q *)$; всякое вхождение элементарной q -степени ранга 2 в слово $D^q u_t D^q$ согласовано с $*D^q * u_t D^q$ или $D^q u_t * D^q *$;
- (c) в слово $D^q u_t D^q$ не входят элементарные 9-степени ранга 3;
- (d) вхождение $*D^q * u_t D^q$ ($*D^q * u_t D^q$) продолжаемо нормированно вправо (соответственно влево) не более чем на 2 участка ранга 2.

Доказательство. Пусть $\delta = 1$. Пункт (a) немедленно следует из определения слов u_t и D . Пункты (b) и (c) доказываются так, как соответствующие пункты леммы 3.5 работы [11], если заменить слово G на слово D и принимать, что $\gamma = \beta = \alpha - 2 = 1$, $A_1 \equiv a^{\pm 1}$.

Чтобы обосновать пункт (d), сначала предположим, что $t \neq k$. Тогда $a^{-k} * b^{-9} a^{-k} b^9 a^k b^{-9} a^k b^9 D^q * a^{t-k} b^{-9} a^{-k} b^9 a^k b^{-9} a^k b^9 D^q \in \text{Норм}(2, D^q u_t' D^q, q+1)$ и, очевидно, любое его продолжение содержится во вхождении

$$*D^{q+1} a^{t-k} * b^{-9} a^{-k} b^9 a^k b^{-9} a^k b^9 D^q,$$

откуда следует утверждение (d) в случае $t \neq k$.

В случае $t = k$ имеем

$$\begin{aligned} & a^{-k} * b^{-9} a^{-k} b^9 a^k b^{-9} a^k b^9 D^{q-1} a^{-k} b^{-9} a^{-k} b^9 a^k * a^k b^{-9} a^k b^9 D^q \in \\ & \in \text{Норм}(2, D^q u_t' D^q, q+1) \end{aligned}$$

и любое его продолжение содержится во вхождении

$$*D^q a^{-k} b^{-9} a^{-k} b^9 a^k * a^k b^{-9} a^k b^9 D^q.$$

Аналогично рассматривается случай $\delta = -1$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 6. (Ср. с леммой 4.1 из [11]) Пусть

$$F \equiv [a^k, b^{-9\delta} a^k b^{9\delta}]^s a^t [a^k, b^{-9\delta} a^k b^{9\delta}]^s a^{2t} \cdots a^{(n-1)t} [a^k, b^{-9\delta} a^k b^{9\delta}]^s a^t,$$

где $1 \leq |k|$, $|t| \leq \frac{n-1}{2}$, $\delta = \pm 1$ и $(t, n) = 1$, $q + 2 \leq s \leq \frac{n-1}{2} - 2$. Тогда F сопряжено в группе Γ_1 некоторому слову H вида

$$(3.1) \quad H \equiv D^r u_1 D^r u_2 \cdots u_{n-1} D^r u_n,$$

где $D \equiv [a^k, b^{-9\delta} a^k b^{9\delta}]$ - элементарный период ранга 2, $r = s - 2$ и для указанного H выполнены следующие условия:

(А) если $V \in Я(2, H) \cap Акт(2, H)$ или $V \in МаксНорм(2, H, 9)$, то V согласовано с одним из вхождений слов D^r в слово H и удовлетворяет неравенствам

$$r + 1 \leq l_2(V) < r + 5,$$

(В) все указанные в (3.1) вхождения слова D^r в слово H^t при $t > 0$ попарно не согласованы,

(С) слово $D^r u_i D^r$ при любом $1 \leq i \leq n$ не содержит нормированных вхождений элементарных 9-степеней ранга 3

(D) при $1 \leq i, l \leq n - 1$ и любых s, t из $u_l \stackrel{1}{=} D^s u_i D^t$ следует $i = l$,

(Е) $H \in \mathcal{M}_2$.

Доказательство. Как и в предыдущих леммах, достаточно рассматривать случай $\delta = 1$. По лемме 3, $D \equiv [a^k, b^{-9} a^k b^9]$ - элементарный период ранга 2. Рассмотрим слова $v_i \equiv D a^{it} D \stackrel{0}{=} D a^{it-k} b^{-9} a^{-k} b^9 a^k b^{-9} a^k b^9$ при $1 \leq i \leq n - 1$, и $v_n \equiv D a^t D \equiv v_1$. Заменяя в словах $D a^{it-k} b^{-9} a^{-k} b^9 a^k b^{-9} a^k b^9$ показатели $i \cdot t - k$ своими абсолютно наименьшими вычетами t_i по модулю n и произведя всевозможные сокращения в ранге 0, вместо каждого слова v_i получим новое слово u_i . Поскольку $(t, n) = 1$, существует единственное целое число $j \in [1, n - 1]$, для которого $j \cdot t - k \equiv 0 \pmod{n}$. Тогда $u_j \equiv a^{-k} b^{-9} a^{-k} b^9 a^{t_j} b^{-9} a^k b^9$. При $i \neq j$ получим $u_i \equiv D a^{t_i} b^{-9} a^{-k} b^9 a^k b^{-9} a^k b^9$. Окончательно получим, что $1 \leq |t_i| \leq \frac{n-1}{2}$ и $v_i \stackrel{1}{=} u_i$ при $1 \leq i \leq n$ (по определению $t_n = t_1$). Положим

$$H \equiv D^r u_1 D^r u_2 \cdots u_{n-1} D^r u_n.$$

Из определения слова H следует, что $H \stackrel{1}{=} D^{-1} F D$.

Заметим, что в слове $H \equiv D^r u_1 D^r u_2 \cdots u_{n-1} D^r u_n$ активными в ранге 1 могут быть лишь вхождения, согласованные с вхождениями с основами $a^{\pm k}$ или a^{t_i}

(если $|k| \geq q$ или $|t_i| \geq q$). Поэтому, в силу неравенств $1 \leq |k|, |t_i| \leq \frac{n-1}{2}$, для любого $t > 0$ имеем $H^t \in \overline{\mathcal{M}}_1$ и $D^r u_i D^r \in \overline{\mathcal{M}}_1$ при $1 \leq i \leq n$. Из леммы 5 и из II.6.6 и II.6.7 работы [2] получаем, что слово H не содержит элементарных $r+5$ -степеней ранга 2, и, следовательно, $H \in \mathcal{M}_2$. Тем самым справедливо утверждение (E).

Докажем (A). Из той же леммы 5 (b), (d) и из II.6.6 и II.6.7 работы [2] следует, что любое активное ядро $V \in \mathcal{Y}(2, H)$ согласовано с одним из вхождений с основой D^r . Согласно определению, слово H можно представить в виде

$$H \equiv D^r D_1 a^{t_1} D_2 D^r D_3 a^{t_2} \dots a^{t_{n-2}} D_{2n-4} D^r D_{2n-3} a^{t_{n-1}} D_{2n-2} D^r D_{2n-1} a^{t_n} D_{2n},$$

где для любого натурального $s \in [1, n]$ слово D_{2s-1} есть начало слова D кончающиеся на b^9 , а D_{2s} - конец слова D , начинающиеся на b^{-9} . Поскольку при $1 \leq s \leq n$ имеем $t_s \not\equiv -k \pmod{n}$, то каждое из вхождений

$$U_s \equiv D^r D_1 a^{t_1} \dots a^{t_s} * D_{2s} D^r D_{2s+1} * a^{t_{s+1}} \dots a^{t_{n-1}} D_{2n-2} D^r D_{2n-1} a^{t_n} D_{2n}$$

устойчиво при повороте произвольного активного вхождения согласованного с некоторым U_t , где $t \neq s$, или с $*D^r D_1 * a^{t_1} \dots a^{t_s} D_{2s} D^r D_{2s+1} a^{t_{s+1}} \dots D_{2n-1} a^{t_n} D_{2n}$. Более того, согласно I.4.13 из [2] при $1 \leq s \leq n-1$ имеем $U_s \in \text{Норм}(2, H, r+1)$. Отсюда следует, что если ядро V слова H согласовано с одним из вхождений U_s или если $V \in \text{МаксНорм}(2, H, 9)$, то оно содержит U_s . В силу леммы 5.(d) получаем $r-2 \leq l_2(U_s) \leq l_2(V) \leq r+2$, что доказывает условие (A).

Докажем (D). При $1 \leq i, l \leq n-1$ предположение $u_l \stackrel{1}{=} D^s u_i D^t$ немедленно приводит к эквивалентности $u_l \stackrel{1}{\sim} D^s u_i D^t$. Так как каждый поворот ранга 1 в словах u_l и $D^s u_i D^t$ не меняет количество ядер ранга 1, то $s = t = 0$. По той же причине, с учетом того, что при $i \neq l$ выполнено $t_i \not\equiv t_l \pmod{n}$ (ибо $(t, n) \neq 1$), эквивалентность $u_l \stackrel{1}{\sim} u_i$ возможно только при $i = l$, что доказывает (D).

Условия (B) и (C) непосредственно следуют из пунктов (b) и (c) леммы 5. Лемма 6 доказана. $\square$

Лемма 7. (Ср. с леммой 4.4 из [11]) а) Пусть $P * E * Q$ - вхождение в слово

$$H \equiv D^r u_1 D^r u_2 \dots u_{n-1} D^r u_n,$$

определенное равенством (3.1) леммы 6, $R * E * S$ - нормальная квазиэлементарная 9-степень ранга 3 в слово $Y \stackrel{2}{\sim} H_1^s$ и $\text{ВзНорм}_2(P * E * Q, R * E * S)$, где $H_1 \in \overline{\mathcal{H}}_3$ и имеет вид

$$H_1 \equiv D_1^{r'} u_1' D_1^{r'} u_2' \dots u_{n-1}' D_1^{r'} u_n'$$

согласно равенству (4.1) леммы 4.1 работы [11]. Тогда элементарный период D сопряжен или с элементарным периодом D_1 , или с его обратным.

b) Пусть $P * E * Q$ и $R * E * S$ - вхождения в слова H^t и $Y \stackrel{2}{\sim} H^s$ соответственно, где H - слово, определенное соотношением (3.1) леммы 6. Тогда если вхождение $P * E * Q$ содержит не менее трех идущих подряд слева направо активных ядер ранга 2 и $P * E * Q \in \text{Прав}(2, H^t)$, то

$$\text{Соот}_{H^{\pm 1}}(P * E * Q, f_2(R * E * S; Y, H^s)) \text{ и } \text{ВзНорм}_2(P * E * Q, R * E * S).$$

Доказательство. а) Для слов H и H_1 выполнены условия (А) - (D) леммы 6 и леммы 4.1 из [11] соответственно. В силу этого можем буквально повторить начало доказательства леммы 4.4 из [11] и убедиться, что в группе Γ_1 сопряжены D^ε и D_1 .

Пункт b) доказывается точно так, как вторая часть леммы 4.4 (см. страницу 963 работы [11]). $\square$

Лемма 8. (Ср. с леммой 4.5 (а) из [11]) В слово H , определенное соотношением (3.1) леммы 6, не входят нормированные элементарные 9-степени ранга 3.

Доказывается точно так, как пункт (а) леммы 4.5 из [11], только ссылку на лемму 4.4 надо заменить ссылкой на лемму 7b.

4. АБСОЛЮТНО ПРИВЕДЕННЫЕ СЛОВА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Леммы 9-11 касаются только групп, построенных в параграфе 2.

Лемма 9. При $s = 340$ в слово H , определенное соотношением (3.1) леммы 6, не входят нормированные квазиэлементарные 9-степени ранга 3.

Доказательство. Пусть $P * E * Q$ - вхождение в слово

$$H \equiv D^r u_1 D^r u_2 \cdots u_{n-1} D^r u_n,$$

где $r = s - 2 = 338$, $R * E * S$ - нормальная квазиэлементарная 9-степень ранга 3 в слово $Y \stackrel{2}{\sim} H_1^s$ и $\text{ВзНорм}_2(P * E * Q, R * E * S)$. В силу леммы 4.3 из [11], можно считать, что $H_1 \in \overline{\mathcal{H}}_3$ и $H_1 \equiv D_1^{r'} u'_1 D_1^{r'} u'_2 \cdots u'_{n-1} D_1^{r'} u'_n$. Пусть V_i ($1 \leq i \leq 9$) - идущие подряд слева направо соседние опорные ядра ранга 2 вхождения $R * E * S$. В силу условий (А) и (В) леммы 4.1 из [11], ядра $W_i \equiv f_2(V_i; Y, H_1^s)$ согласованы с девятью последовательными D_1 -вхождениями в слово H_1^s , между которыми лежат прослойки u'_{k+i} . Очевидно, $1 < k + 1, k + 2, k + 3 < n$.

Из $\text{ВзНорм}_2(P * E * Q, R * E * S)$ в силу IV.3.3 работы [2] следует, что

$$U_i \equiv \varphi(V_i; R * E * S, P * E * Q) \in \mathcal{Y}(2, H) \cap \text{Акт}(2, H).$$

По условию (А) леммы 7 имеем $339 \leq l_2(U_{k+2}) \leq 343$, а по II.5.1 [2], $l_2(U_{k+2}) = l_2(V_{k+2})$. Согласно (4.7) из [11], $q+42 < l_2(W_{k+2}) \leq r'-2+29+14+67+4 < \frac{n-1}{2}-43$. Поэтому, в силу IV.2.12 из [2], $\text{Род}(V_{k+2}, W_{k+2})$ и $l_2(W_{k+2}) = l_2(V_{k+2})$. Значит $l_2(V_{k+2}) \leq r' - 2 + 29 + 14 + 67 + 4$. Поскольку при $r' = 200 - 60$ или $r' = 270 - 60$ имеем $r' - 2 + 29 + 14 + 67 + 4 < 339$, то неравенства $339 < l_2(V_{k+2}) \leq r' - 2 + 29 + 14 + 67 + 4$ возможны только при $r' = 340 - 60$.

Отсюда, опираясь на лемму 4.1 из [5] и на определения множеств $\overline{\mathcal{H}}_3$ и Φ_3 , немедленно получаем, что период D_1 сопряжен с приведенной формой одного из коммутаторов $[E^d, Z'^{-1} E^d Z'] \in \text{П}_3$. С другой стороны, по лемме 7 а), в Γ_1 сопряжены $D^\varepsilon \equiv [a^k, b^{-9} a^k b^9]^\varepsilon$ и период $D_1 \in \overline{\Psi}_3$. В силу леммы 4, тогда $E \equiv a^\varepsilon$. Получается противоречие с условием $E \neq a^{\pm 1}$ в $B(m, n)$ (см. (2.1)). Лемма доказана. $\square$

Лемма 10. Для слова H , определенного равенством (3.1) леммы 6, имеет место соотношение $H \in \mathcal{A}_3$.

Доказательство. Согласно лемме 6 (Е), $H \in \mathcal{M}_2$, а по леммам 9 и 7 а) имеем $\text{Норм}(3, H, 9) = \emptyset$, что, согласно I.4.34 из [2], означает $H \in \mathcal{A}_3$. $\square$

Лемма 11. Пусть $\delta = \pm 1$, k и t такие целые числа, что $k \not\equiv 0 \pmod{n}$ и $(t, n) = 1$. Тогда

$$[a^k, b^{-\delta 9} a^k b^{\delta 9}]^{340} a^t [a^k, b^{-\delta 9} a^k b^{\delta 9}]^{340} a^{2t} \dots a^{(n-1)t} [a^k, b^{-\delta 9} a^k b^{\delta 9}]^{340} a^t \neq 1$$

в группе Γ .

Доказательство. Можно считать, что $1 \leq |k|, |t| \leq \frac{n-1}{2}$. Согласно лемме 7, слово

$$F \equiv [a^k, b^{-\delta 9} a^k b^{\delta 9}]^{340} a^t [a^k, b^{-\delta 9} a^k b^{\delta 9}]^{340} a^{2t} \dots a^{(n-1)t} [a^k, b^{-\delta 9} a^k b^{\delta 9}]^{340} a^t$$

сопряжено в группе Γ_1 некоторому слову H вида $H \equiv D^r u_1 D^r u_2 \dots u_{n-1} D^r u_n$, а по лемме 10, $H \in \mathcal{A}_3 \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{R}_i$. Поэтому, в силу IV.2.16 из [2], $H \neq 1$ в Γ . Тем самым $F \neq 1$ в группе Γ . Лемма 11 доказана. $\square$

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Пусть $n \geq 1003$ - произвольное нечетное число и φ - такой автоморфизм свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ с базисом $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, что для некоторого i элемент $\varphi(a_i)$ не сопряжен в $B(m, n)$ со степенями a_i . Для данного автоморфизма φ построим группу Γ , определенную равенством (2.6) параграфа 2. Обозначим через N_1 нормальное замыкание в абсолютно свободной группе F_m со свободными порождающими $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ всех тех слов R , для которых или $R \in \bigcup_{\beta > 0} \mathcal{E}_\beta$ или $R \in \bigcup_{\beta \geq \gamma_0 + 1} \Phi_\beta$, где множества $\mathcal{E}_\beta$ и Φ_β определены в параграфе 2. Пусть N - гомоморфный образ подгруппы N_1 при естественном гомоморфизме из абсолютно свободной группы F_m на группу $B(m, n)$. Согласно определению (2.6), имеем

$$\Gamma \cong F_m/N_1 = B(m, n)/N.$$

Покажем, что в роли нормальной подгруппы N , о существовании которой утверждается в формулировке Теоремы 1, можно выбрать указанную нормальную подгруппу $N \triangleleft B(m, n)$.

В силу леммы 1, группа $\Gamma = B(m, n)/N$ - простая группа, поэтому пункт 2 теоремы 1 выполнен. Далее, согласно IV.2.16 работы [2] элементы a_j имеют порядок n в группе Γ , что доказывает пункт 3 теоремы 1. Чтобы доказать пункт 1, предположим обратное, что указанная нормальная подгруппа N является φ -допустимой подгруппой группы $B(m, n)$. Тогда автоморфизм φ индуцирует некий автоморфизм $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma$, при котором имеет место равенство $\phi(a_1) \stackrel{\Gamma}{=} v(a_1, a_2, \dots, a_m)$, так как $\varphi(a_1) \stackrel{B(m, n)}{=} v(a_1, a_2, \dots, a_m)$. По выбору элементарного периода E ранга γ_0 в группе $B(m, n, \beta)$ ($\gamma_0 \leq \beta + 1$) выполнено соотношение (2.1). Группа Γ есть гомоморфный образ группы $B(m, n, \beta)$, поэтому $v(a_1, a_2, \dots, a_m) \stackrel{\Gamma}{=} S E^r S^{-1}$. Умножив ϕ на внутренний автоморфизм $i_s : \Gamma \rightarrow \Gamma$ ($i_s(X) = S^{-1}XS$), получим автоморфизм $\psi : \Gamma \rightarrow \Gamma$, при котором $\psi(a_1) = \psi(a) = E^r$, где $(r, n) = 1$. Значит, для некоторого целого t имеет место $\psi(a^t) = E$, где $(t, n) = 1$ и $1 \leq |t| \leq \frac{n-1}{2}$. Найдем такое $1 \leq |k| \leq \frac{n-1}{2}$, что $k \equiv d \cdot t \pmod{n}$. Пусть $\psi(b^9) = Z$. Тогда $\psi(a^k) = \psi(a^{t \cdot d}) = E^d$ и $\psi([a^k, b^{-9} a^k b^9]) \stackrel{\Gamma}{=} [E^d, Z^{-1} E^d Z]$. В силу VI.2.4 и IV.3.12 из [2] можно считать, что $Z \in \mathcal{M}_\alpha \cap \mathcal{A}_{\alpha+1}$ для некоторого $\alpha \geq \gamma$.

Согласно леммам 3.2 и 7.2 работы [11] одна из приведенных форм коммутатора $C \cong [E^d, Z^{-1} E^d Z]$ есть некий элементарный период G ранга δ , где

$\gamma + 1 \leq \delta \leq \alpha + 9$. Тогда $G \in \Pi_\delta$. По определению множества $\overline{\Pi}_\delta$, можно найти такую приведенную форму D некоторого коммутатора $[E^d, Z'^{-1} E^d Z']$, что $D \in \overline{\Pi}_\delta$ и период G сопряжен в группе $\Gamma_{\delta-2}$ или слову D , или слову D^{-1} . Тогда $D \stackrel{\delta-2}{=} [E_1^d, w Z'^{-1} E^d Z' w^{-1}] \stackrel{0}{=} w [E^d, Z'^{-1} E^d Z'] w^{-1}$, где $w \in \Theta(E, E_1)$.

Поскольку

$$[E^d, Z E^d Z^{-1}] \stackrel{0}{=} Z [E^d, Z^{-1} E^d Z]^{-1} Z^{-1}$$

и так как коммутатор и его приведенная форма сопряжены, то сопряжены или $[E^d, Z'^{-1} E^d Z']$ и $[E^d, Z^{-1} E^d Z]$, или $[E^d, Z'^{-1} E^d Z']$ и $[E^d, Z E^d Z^{-1}]$. Рассмотрим первый случай. Согласно лемме 2, для некоторых целых чисел u и v или $Z'^{-1} E^{-d} Z' \stackrel{\Gamma}{=} E^u Z^{-1} E^{-d} Z E^v$, или $Z' E^{-d} Z'^{-1} \stackrel{\Gamma}{=} E^u Z^{-1} E^d Z E^v$.

Случай 1. Предположим, что $Z' E^{-d} Z'^{-1} \stackrel{\Gamma}{=} E^u Z^{-1} E^d Z E^v$. К обеим частям этого равенства применив автоморфизм ψ^{-1} получим

$$\psi^{-1}(Z') a^{-k} \psi^{-1}(Z'^{-1}) \stackrel{\Gamma}{=} \psi^{-1}(E^u) b^{-9} a^k b^9 \psi^{-1}(E^v).$$

Пусть $\psi^{-1}(E^u) \stackrel{\Gamma}{=} a^x$ и $\psi^{-1}(E^v) \stackrel{\Gamma}{=} a^y$ и $\psi^{-1}(Z') \stackrel{\Gamma}{=} T$. Тогда $T a^{-k} T^{-1} \stackrel{\Gamma}{=} a^x b^{-9} a^k b^9 a^y$ и $a^y T a^{-k} T^{-1} a^{-y} \stackrel{\Gamma}{=} a^{x+y} b^{-9} a^k b^9$. Очевидно, можно считать, что $|x + y| \leq \frac{n-1}{2}$. Если $x + y \not\equiv 0 \pmod{n}$, то слово $a^{x+y} b^{-9} a^k b^9$ является элементарным периодом ранга 2. Получается, что элементарный период $a^{x+y} b^9 a^k b^{-9}$ ранга 2 сопряжен со степенью элементарного периода a ранга 1, что противоречит лемме 6.6 из [11]. Если же $x + y \equiv 0 \pmod{n}$, то получается, что сопряжены a^{-k} и a^k , что противоречит лемме 1. Значит рассматриваемый $Z' E^{-d} Z'^{-1} \stackrel{\Gamma}{=} E^u Z^{-1} E^d Z E^v$ случай невозможен.

Случай 2. Предположим, что $Z'^{-1} E^{-d} Z' \stackrel{\Gamma}{=} E^u Z^{-1} E^{-d} Z E^v$. Прямые вычисления показывают, что $[E^d, Z'^{-1} E^d Z'] \stackrel{\Gamma}{=} E^u [E^d, Z^{-1} E^d Z] E^{-u}$. Согласно определению множества Φ_δ имеем

$$D^{340} E_1 D^{340} E_1^2 \dots E_1^{n-3} D^{340} E_1^{n-1} D^{340} E_1 \in \Phi_\delta,$$

и поэтому

$$D^{340} E_1 D^{340} E_1^2 \dots E_1^{n-3} D^{340} E_1^{n-1} D^{340} E_1 \stackrel{\Gamma}{=} 1.$$

Следовательно,

$$(w^{-1} D w)^{340} (w^{-1} E_1 w) (w^{-1} D w)^{340} (w^{-1} E_1 w)^2 \dots \\ \dots (w^{-1} E_1 w)^{n-1} (w^{-1} D w)^{340} (w^{-1} E_1 w) \stackrel{\Gamma}{=} 1.$$

Таким образом, $C'^{340} E C'^{340} E^2 \dots C'^{340} E^{n-1} C'^{340} E \stackrel{\Gamma}{=} 1$, где $C' \stackrel{\Gamma}{=} [E^d, Z'^{-1} E^d Z']$.

Сопрягая последнее равенство словом E^u и учитывая равенство $C' \stackrel{\Gamma}{=} E^u C E^{-u}$,

окончательно получим

$$C^{340} E C^{340} E^2 \dots E^{n-2} C^{340} E^{n-1} C^{340} E \stackrel{\Gamma}{=} 1.$$

Поэтому, в силу равенств $\psi([a^k, b^{-9} a^k b^9]) \stackrel{\Gamma}{=} [E^d, Z^{-1} E^d Z] \Leftarrow C$ и $\psi(a^t) = E$, получим

$$\begin{aligned} & \psi^{-1}(C^{340} E C^{340} E^2 \dots E^{n-2} C^{340} E^{n-1} C^{340} E) \stackrel{\Gamma}{=} \\ & \stackrel{\Gamma}{=} [a^k, b^{-9} a^k b^9]^{340} a^t [a^k, b^{-9} a^k b^9]^{340} a^{2t} \dots a^{(n-1)t} [a^k, b^{-9} a^k b^9]^{340} a^t \stackrel{\Gamma}{=} 1. \end{aligned}$$

Последнее равенство противоречит лемме 11. Аналогичным образом, рассматривая сопряженность коммутаторов

$$[E^d, Z'^{-1} E^d Z'] \quad \text{и} \quad [E^d, Z E^d Z^{-1}] \stackrel{0}{=} Z [E^d, Z^{-1} E^d Z]^{-1} Z^{-1},$$

и заменив в предыдущих рассуждениях слово Z^{-1} на Z , мы получим

$$[a^k, b^9 a^k b^{-9}]^{340} a^t [a^k, b^9 a^k b^{-9}]^{340} a^{2t} \dots a^{(n-1)t} [a^k, b^9 a^k b^{-9}]^{340} a^t \stackrel{\Gamma}{=} 1.$$

И опять, это равенство противоречит лемме 11. Полученные противоречия опровергают существование указанного автоморфизма ψ . Следовательно, нормальная подгруппа N не является φ -допустимой. Теорема 1 доказана. $\square$

Abstract. In the present paper for arbitrary automorphism φ of the free Burnside group $B(m, n)$ and for any odd number $n \geq 1003$ a sufficient condition for existence of non- φ -admissible normal subgroup of $B(m, n)$ was found. In particular, if automorphism φ is normal, then for any basis $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ of the group $B(m, n)$ there is an integer k such that for each i the elements a_i and $\varphi(a_i)^k$ are conjugates.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] П. С. Новиков, С. И. Адян, “О бесконечных периодических группах. I, II, III”, Изв. АН СССР. Сер. матем., **32**:1, **32**:2, **32**:3, (1968), 212-244, 251-524, 709-731.
- [2] С. И. Адян, Проблема Бернсайда и тождества в группах, Наука, М., 1975.
- [3] A. Yu. Olshanskii, S.V.Ivanov, Some applications of graded diagrams in combinatorial group theory. Groups St. Andrews 1989, Vol. 2, 258-308, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 160, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [4] С. И. Адян, “Проблема Бернсайда о периодических группах и смежные вопросы”, Совр. пробл. матем., **1**, 5 – 28 (2003).
- [5] S. V. Ivanov, The free Burnside groups of sufficiently large exponents. Internat. J. Algebra Comput., **4** (1-2) 1 – 308 (1994).
- [6] И. Г. Лысенко, Бесконечные бернсайдовы группы четного периода, Изв. РАН. Сер. матем., **60** (3) 3 – 224 (1996).
- [7] Коуровская тетрадь, Нерешенные вопросы теории групп, Новосибирск. 1980.
- [8] E. A. Cherepanov, Free semigroup in the group of automorphisms of the free Burnside group. Comm. Algebra, **33** (2) 539 – 547 (2005).
- [9] E. A. Cherepanov, “Normal automorphisms of free Burnside groups of large odd exponents”, Internat. J. Algebra Comput., **16** (5) 839 – 847 (2006).

- [10] A. Yu. Olshanskii, “Self-normalization of free subgroups in the free Burnside groups”, Groups, rings, Lie and Hopf algebras (St. John’s, NF, 2001), Math. Appl., **555**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 179 – 187 (2003).
- [11] С. И. Адян, И. Г. Лысенко, “О группах, все собственные подгруппы которых конечные циклические”, Изв. АН СССР. серия Математика, **55** (5) 933 – 990 (1991).
- [12] В. С. Атабекян, “О периодических группах нечетного периода $n \geq 1003$ ”, Матем. заметки, **82** (4), 495 – 500, (2007).
- [13] V. S. Atabekyan, “Adian-Lysenok groups and (U)-property”, , Изв. АН Арм. ССР, серия Математика, **43** (5), 257 – 264 (2008).

Поступила 1 февраля 2009