

**ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ С
ИНТЕРПОЛЯЦИЕЙ. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОЛИНОМ
ТЕЙЛОРА**

Р. М. Тригуб¹

*Донецкий государственный университет, Украина
E-mail: postmaster@ok.donbass.com*

Аннотация. Рассмотрен вопрос о порядке приближения периодических функций тригонометрическими полиномами с интерполяцией в произвольной системе узлов и указан способ построения эрмитовских интерполяционных полиномов.

MSC2000 numbers: 41A05, 42A15, 41A44

Ключевые слова: лагранжевский и эрмитовский интерполяционные тригонометрические полиномы, наилучшее приближение, критерий Чебышева, прямая теорема Джексона, неравенства Маркова и Бернштейна, эрмитовский сплайн.

1. ВВЕДЕНИЕ, ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Как следует из теоремы П. Л. Чебышева об альтернансе, тригонометрический полином наилучшего приближения порядка n любой вещественной непрерывной периодической функции является интерполяционным (лагранжевским) полиномом по некоторой системе из $(2n + 1)$ узлов на периоде, зависящей от функции. Известно также, что при любой системе узлов интерполяционные полиномы по этой системе не сходятся при $n \rightarrow \infty$ на всём пространстве непрерывных периодических функций, так как нормы таких линейных операторов растут не медленнее $\log n$ (логарифмический рост имеет место при равноотстоящих узлах интерполяции).

Д. Джексон построил полиномы, которые интерполируют функцию в n равноотстоящих узлах на периоде и сходятся равномерно к ней при $n \rightarrow \infty$. Порядок

¹Работа поддержана Фондом фундаментальных исследований Украины (F25)

такого полинома равен n , т.е. примерно в два раза больше порядка лагранжевского интерполяционного полинома. С. Н. Бернштейн при любом $\epsilon > 0$ указал полиномы интерполяционного типа (при тех же равноотстоящих узлах) порядка в $(1 + \epsilon)$ раз больше лагранжевского. См. [1], гл. 10, а также, напр. [2].

В следующей теореме узлы произвольные, а соответствующее неравенство о сравнении с наилучшим приближением - точное в некотором смысле. См. также ниже лемму 4.

Далее $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$, $C(\mathbb{T})$ — пространство непрерывных 2π -периодических комплекснозначных функций, $\|\cdot\|$ — суп-норма в $C(\mathbb{T})$ и

$$\tau_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^n \hat{\tau}_n(k) e^{ikx}$$

(тригонометрический полином порядка не выше n).

Через $\gamma(\cdot, \cdot)$, возможно с разными индексами, будем обозначать некоторые положительные величины, зависящие только от аргументов в круглых скобках.

Теорема 1. *Для любой системы узлов $\Pi = \{x_s\}_1^m \subset [-\pi, \pi]$ и любого $\epsilon > 0$ можно указать число $N = N(\epsilon, \Pi)$ такое, что при $n \geq N$ для любой функции $f \in C(\mathbb{T})$ можно построить полином τ_n порядка не выше n , удовлетворяющий условиям*

$$\|f - \tau_n\| \leq (2 + \epsilon) E_n^T(f), \quad \tau_n(x_s) = f(x_s), \quad 1 \leq s \leq m,$$

где

$$E_n^T(f) = \min_{\{c_k\}} \max_x |f(x) - \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}|$$

наилучшее приближение f тригонометрическими полиномами порядка не выше n . При этом ни при одном n нельзя множитель $(2 + \epsilon)$ заменить на $(2 - \epsilon)$.

Аналогичный результат справедлив для интерполяции алгебраическими полиномами непрерывных на отрезке функций. Этот результат в случае отрезка $[-1, 1]$ сразу следует из теоремы 1 после стандартной замены $t = \cos x$.

Рассмотрим теперь эрмитовскую интерполяцию, когда в данной системе узлов полином интерполирует функцию, а его производные - соответствующие производные функции. Начнём с одного узла и найдём тригонометрический полином наименьшего порядка с условием

$$\tau^{(\nu)}(0) = f^{(\nu)}(0), \quad 0 \leq \nu \leq r$$

(тригонометрический полином Тейлора). Его естественно искать в виде

$$(1.1) \quad \sum_{k=0}^r f^{(k)}(0)h_{k,r}(x), \quad h_{k,r}(x) = \frac{x^k}{k!} + O(x^{r+1}) \quad (x \rightarrow 0)$$

($h_{k,r}$ — полином порядка не выше $\frac{r+1}{2}$).

Явный вид (две формулы) и свойства $h_{k,2n}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) приведены ниже (см. Лемму 1 и $\alpha - \delta$). Эти полиномы при чётном $r = 2n$ в отличие от нечётного r определяются однозначно. А при нечётном r полагаем $h_{0,r} \equiv 1$ и $h_{k,r} = h'_{k+1,r+1}$ при $k \geq 1$.

Теорема 2. а) Для любой функции $f \in C^{2n}(\mathbb{T})$ ($n \in \mathbb{N}$) и $x \in [-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}]$ существует $\theta \in [0, 1]$ такое, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n} f^{(k)}(0)h_{k,2n}(x) + [D_{2n}f(\theta x) - D_{2n}f(0)]h_{2n,n}(x),$$

где $D_{2n}f(x) = q_n(\frac{d^2}{dx^2}f(x))$ при $q_n(x) = \sum_{k=1}^n (x + k^2)$.

б) Для любой функции $f \in C^r(\mathbb{T})$ ($r \in \mathbb{N}$) существует тригонометрический полином h_f порядка не выше $[\frac{r+1}{2}]$ (целая часть) такой, что для всех $x \in \mathbb{R}$ и целых $\nu \in [0, r]$ (ω -модуль непрерывности)

$$|f^{(\nu)}(x) - h_f^{(\nu)}(x)| \leq \gamma(r)\omega(f^{(r)}; \pi) \left| \sin \frac{x}{2} \right|^{r-\nu}.$$

Переход от одного узла к эрмитовской интерполяции с любой системой узлов см. ниже перед Леммой 2.

Теоремы 1 и 2 (в несколько более слабой форме) анонсированы в статье [3]. Там же найдена общая оценка сверху приближения функции $f \in C^r(\mathbb{T})$ полиномами с учётом положения точки и эрмитовской интерполяцией. Аналогичная теорема о приближении алгебраическими полиномами есть в [2], 4.8.10.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 И 2

Спектром функции $f \in L(\mathbb{T})$ называют множество номеров ее коэффициентов Фурье $\hat{f}(k)$, которые не равны нулю. Приведем сначала простые свойства полиномов, которые используются далее.

I. Полином $\tau(z) = \sum_{k=p}^n \hat{\tau}(k)e^{ikz}$ с условием $n \geq p$ и $\hat{\tau}(p)\hat{\tau}(n) \neq 0$ имеет в полосе $\Re z \in [a, a + 2\pi)$ ($a \in \mathbb{R}$) ровно $n - p$ нулей (с учётом кратностей).

II. Для любого набора различных точек $\{z_\nu\}, 1 \leq \nu \leq k$ в указанной в утверждении I полосе и натуральных чисел $\{r_\nu\}, 1 \leq \nu \leq k$ с условием $\sum_{\nu=1}^k r_\nu = n - p + 1$, для

любого набора комплексных чисел $\{y(s)\}$, $0 \leq s \leq n-p$ существует единственный полином τ со спектром в $[p, n]$, удовлетворяющий условиям (см., например, [2]):

$$\tau^{(s)}(z_\nu) = y\left(\sum_{q=0}^{\nu-1} r_q + s\right) \quad (1 \leq \nu \leq k, 0 \leq s \leq r_\nu - 1).$$

Начнём с доказательства Теоремы 2. При чётном $r = 2n$ полином $h_{k,2n}$ порядка не выше n условием (1.1), т.е. по производным $h_{k,2n}^{(\nu)}(0)$ ($0 \leq \nu \leq 2n$), определяется однозначно. Поэтому

$$h_{k,2n}(-x) = (-1)^k h_{k,2n}(x), \quad h_{2k-1,2n}(x) = h'_{2k,2n}(x).$$

Кроме того, легко видеть, что

$$h_{0,2n}(x) \equiv 1, \quad h_{2n,2n}(x) = \frac{2^n}{(2n)!} (1 - \cos x)^n$$

и при $k \in \mathbb{N}$

$$h'_{2k-1,2n}(x) = h_{2k-2,2n}(x) - c_{k,n} h_{2n,2n}(x),$$

где числовой множитель $c_{k,n}$ определяется однозначно, если учесть, что интеграл от h' по периоду равен нулю. Это рекуррентные формулы: по $h_{2n,2n}$ можно найти $h_{2n-1,2n}$, $h_{2n-2,2n}$ и т.д.

Приведем явные формулы для $h_{k,2n}$.

Лемма 1. а) Если $q_n(x) = \prod_{\nu=1}^n (x + \nu^2) = \sum_{s=0}^n a_{s,n} x^s$, то

$$h_{k,2n}(x) = \sum_{[\frac{k+1}{2}] \leq s \leq n} a_{s,n} h_{2n,2n}^{(2s-k)}(x).$$

б) $h_{2k-1,2n}(x) = h'_{2k,2n}(x)$, а при $0 \leq k \leq n$

$$h_{2k,2n}(x) = \sum_{s=k}^n b_{s,k} (1 - \cos x)^s, \quad b_{s,k} = \frac{2^{2k-s}}{(2k)!(2s)!} \cdot \frac{d^{2s}}{dx^{2s}} \{(\arcsin x)^{2k}\}_{x=0}.$$

Доказательство. а) Так как $a_{n,n} = 1$, то $h_{2n,2n}$ — тот же полином. Нужно проверить, что $h_{k,2n}$ удовлетворяет условию (1.1). Имеем

$$h'_{k,2n}(x) = \sum_{s=[\frac{k+1}{2}]}^n a_{s,n} h_{2n,2n}^{(2s-k+1)}(x),$$

откуда $h'_{k,2n}(x) = h_{k-1,2n}(x)$ при чётном k ($1 \leq k \leq 2n$), а при нечётном k

$$h'_{k,2n}(x) = \sum_{s=[\frac{k}{2}]}^n a_{s,n} h_{2n,2n}^{(2s-k+1)}(x) - a_{\frac{k-1}{2},n} h_{2n,2n}(x) = h_{k-1,2n}(x) - a_{\frac{k-1}{2},n} h_{2n,2n}(x).$$

Найдём по указанной формуле $h_{0,2n}$.

Так как оператор $\frac{d^2}{dx^2} + n^2$ понижает порядок полинома τ_n порядка n и умножает свободный член $\hat{\tau}_n(0)$ на n^2 , то

$$h_{0,2n}(x) = \sum_{s=0}^n a_{s,n} h_{2n,2n}^{(2s)}(x) = \prod_{\nu=1}^n \left(\frac{d^2}{dx^2} + \nu^2 \right) h_{2n,2n}(x) = (n!)^2 \hat{h}_{2n,2n}(0).$$

Но

$$\hat{h}_{2n,2n}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_{2n,2n}(x) dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{4^{n+1}}{(2n)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} u du = \frac{1}{(n!)^2}.$$

Так что $h_{0,2n}(x) \equiv 1$. Теперь индукцией по k (от $k-1$ к k) легко получить

$$h_{k,2n}(x) = \frac{x^k}{k!} + O(x^{2n+1+\frac{1+(-1)^k}{2}}) \quad (x \rightarrow 0, 0 \leq k \leq 2n).$$

б) Любой чётный тригонометрический полином можно представить в указанном виде. Нужно только определить коэффициенты $b_{s,k}$.

После замены $\sin \frac{x}{2} = y$ при $y \rightarrow 0$ $h_{2k,2n}$ должен вести себя так:

$$\sum_{s=k}^n b_{s,k} \cdot 2^s \cdot y^{2s} = \frac{(2 \arcsin y)^{2k}}{(2k)!} + O(y^{2n+2}).$$

А это возможно лишь в случае

$$b_{s,k} \cdot 2^s \cdot (2s)! = \frac{4^k}{(2k)!} \cdot \frac{d^{2s}}{dy^{2s}} \{(\arcsin y)^{2k}\}_{y=0} \quad (k \leq s \leq n),$$

что и требовалось доказать. □

Отметим, что формула а) получена при участии В. П. Заставного. Приведём некоторые свойства полиномов $h_{k,2n}$, которые следуют (см. ниже) из доказанной леммы.

α) Для любого $k \in [1, 2n]$ и $x \in [0, \pi]$

$$h_{k,2n}(x) \leq \frac{x^k}{k!} \leq \frac{\pi^k}{k!} \left(\sin \frac{x}{2} \right)^k, \quad h''_{k+1,2n}(x) \leq h'_{k,2n}(x) \leq h_{k-1,2n}(x).$$

β) Для любого $k \in [1, n]$ и $x \in [0, \pi]$

$$\frac{(2 \sin \frac{x}{2})^{2k}}{(2k)!} \leq h_{2k,2n}(x), \quad \frac{(2 \sin \frac{x}{2})^{2k-1}}{(2k-1)!} \cos \frac{x}{2} \leq h_{2k-1,2n}(x).$$

γ) $h'_{2k,2n}(x) > 0$ ($x \in (0, \pi)$), $h'_{2k-1,2n}(x) > 0$ ($x \in (0, \frac{\pi}{2})$).

δ) $h_{2k,2n}(x + \pi)$ -полином с положительными коэффициентами.

Для доказательства заметим, что $a_{s,n} > 0$ при $0 \leq s \leq n$. Проверим, что и коэффициенты $b_{s,k}$ ($0 \leq k \leq s \leq n$) положительны. Биномиальный степенной ряд

$(1 - y^2)^{-\frac{1}{2}}$ имеет при чётных степенях y положительные коэффициенты. Следовательно, и проинтегрированный ряд для $\arcsin y$ имеет положительные коэффициенты. К тому же в формуле $b)$ при переходе от n к $n + 1$ добавляется лишь одно слагаемое.

Утверждение $\alpha)$ следует теперь из рекуррентной формулы индукцией по k с учётом того, что $h_{2n,2n}(x) > 0$ на $(0, 2\pi)$, а $h'_{2n,2n}(x) > 0$ на $(0, \pi)$.

Для доказательства $\beta)$ и $\gamma)$ нужно в формуле $b)$ леммы 1 оставить только первое слагаемое для $h_{2k,2n}$ и учесть, что $h_{2k-1,2n} = h'_{2k,2n}(x)$, $b_{k,k} = \frac{2^k}{(2k)!}$ и $h''_{2n,2n}(x) > 0$ на $(0, \frac{\pi}{2}]$.

Утверждение $\delta)$ следует из $a)$ или $b)$ в лемме 1 и разложения

$$h_{2n,2n}(x) = \frac{4^n}{(2n)!} \left(\frac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}{2i} \right)^{2n} = \frac{1}{(2n)!} \sum_{\nu=-n}^n (-1)^\nu \frac{(2n)!}{(n+\nu)!(n-\nu)!} e^{i\nu x}.$$

Используя найденную выше формулу Тейлора (эрмитовский полином для одного узла), можно построить эрмитовский полином для функции с любым числом узлов $\{x_s\}$: $\tau_{f,r}^{(\nu)}(x_s) = f^{(\nu)}(x_s) \quad (0 \leq \nu \leq r_s, 1 \leq s \leq m)$.

Пусть t_1 - нетривиальный полином наименьшего порядка, удовлетворяющий условиям: $t_1^{(\nu)}(x_1) = 0 \quad (0 \leq \nu \leq r_1)$. Полагаем

$$f_1(x) = \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{r_1} f^{(k)}(x_1) h_{k,r_1}(x - x_1)}{t_1(x)}.$$

Тогда полином

$$\sum_{k=0}^{r_1} f^{(k)}(x_1) h_{k,r_1}(x - x_1) + t_1(x) \sum_{k=0}^{r_2} f_1^{(k)}(x_2) h_{k,r_2}(x - x_2)$$

является эрмитовским для f в двух узлах x_1 и x_2 . Если f_2 - это разность между f и этим полиномом, делённая на нетривиальный полином наименьшего порядка t_2 с условиями:

$$t_2^{(\nu)}(x_1) = 0 \quad (0 \leq \nu \leq r_1), \quad t_2^{(\nu)}(x_2) = 0 \quad (0 \leq \nu \leq r_2),$$

то полином

$$\sum_{k=0}^{r_1} f^{(k)}(x_1) h_{k,r_1}(x - x_1) + t_1(x) \sum_{k=0}^{r_2} f_1^{(k)}(x_2) h_{k,r_2}(x - x_2) + t_2(x) \sum_{k=0}^{r_3} f_2^{(k)}(x_3) h_{k,r_3}(x - x_3)$$

является эрмитовским для функции f в трёх узлах x_1, x_2 и x_3 . И так далее.

Считаем для простоты, что $r_1 = r_2 = \dots = r$. Если ещё учесть, что при любом $q \in \mathbb{Z}_+$ и $k \in [0, \frac{r+1}{2}]$

$$|h_{k,r}^{(q)}(x)| \leq \gamma(r, q) \left| \sin \frac{x}{2} \right|^{(k-q)_+} \quad (a_+ = \max\{a, 0\}),$$

(при $k \leq q$ неравенство очевидно, а при $k > q$ нужно проинтегрировать $(k - q)$ раз по $[0, x]$ это неравенство при $k = q$), то из предыдущего рассуждения сразу получаем следующее утверждение.

Лемма 2. Для любого набора узлов $\Pi = \{x_s\}$ и чисел $\{y_{s,\nu}\} (1 \leq s \leq m, 0 \leq \nu \leq r)$ существует единственный тригонометрический полином τ со спектром в $[p, n]$, где $n - p = m(r + 1) - 1$, удовлетворяющий условиям: $\tau^{(\nu)}(x_s) = y_{s,\nu} (1 \leq s \leq m, 0 \leq \nu \leq r)$. При этом для всех $x \in \mathbb{R}$ и $q \in \mathbb{Z}_+$

$$|\tau^{(q)}(x)| \leq \gamma(r, q, \Pi) \sum_{\nu=0}^r \sum_{s=1}^m |y_{s,\nu}|.$$

Подобное утверждение справедливо и в случае алгебраических полиномов. Уточним его в случае двух узлов ($m = 2$).

Лемма 3. При любом $r \in \mathbb{Z}_+$ и любом $k \in [0, r]$ алгебраический полином $p_{k,r}$ степени $2r + 1$, определяемый условиями

$$p_{k,r}^{(\nu)}(0) = 0 (\nu \neq k), \quad p_{k,r}^{(k)}(0) = 1, \quad p_{k,r}^{(\nu)}(1) = 0, \quad (0 \leq \nu \leq r)$$

обладает следующими свойствами на $[0, 1]$:

$$\frac{x^k}{k!} (1 - x)^{r+1} \leq p_{k,r}(x) \leq \frac{x^k}{k!} (1 - x^{r+1-k}), \quad |p_{k,r}^{(\nu)}(x)| \leq \gamma(r, \nu) x^{(k-\nu)_+}.$$

Доказательство. При $r = 0$, $p_{0,0}(x) = 1 - x$. Считаем далее $r \in \mathbb{N}$. При $k = 0$, $p_{0,r}(0) = 1$, $p_{0,r}^{(\nu)}(0) = 0$ ($1 \leq \nu \leq r$), $p_{0,r}^{(\nu)}(1) = 0$ ($0 \leq \nu \leq r$). Проверим, что $p'_{0,r}(x) < 0$ на $(0, 1)$.

Если бы полином $p'_{0,r}$ степени $2r$ и уже имеющий $2r$ нулей в концах отрезка $[0, 1]$ имел бы ещё один ноль, то $p_{0,r} = \text{const}$, чего быть не может. Поэтому $p'_{0,r}(x) < 0$ и $0 < p_{0,r}(x) < 1$ на $(0, 1)$.

Пусть теперь $k \in [1, r]$ ($p_{k,r}^{(k)}(0) = 1$). Проверим, что $p_{k,r}(x) \leq \frac{x^k}{k!}$ на $[0, 1]$. Для этого полином представим в виде

$$p_{k,r}(x) = \frac{x^k}{k!} + x^{r+1} \sum_{\nu=0}^r a_\nu (x - 1)^\nu$$

и вычислим коэффициенты $\{a_\nu\}$. $a_0 = p_{k,r}(1) - \frac{1}{k!} = -\frac{1}{k!}$. А при $\nu \geq 1$

$$a_\nu = \frac{1}{\nu!} \frac{d^\nu}{dx^\nu} \left\{ \frac{p_{k,r}(x) - \frac{x^k}{k!}}{x^{r+1}} \right\}_{x=1} = \frac{-1}{\nu!k!} \frac{d^\nu}{dx^\nu} \{x^{k-r-1}\}_{x=1} = \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!k!} (r-k+\nu) \cdots (r-k+1).$$

Следовательно, $a_\nu(x-1)^\nu < 0$ при $\nu \in [0, r]$ и $x \in (0, 1)$. Поэтому $p_{k,r}(x) < \frac{x^k}{k!} + a_0 x^{r+1} = \frac{x^k}{k!} (1 - x^{r+1-k})$.

Аналогично оцениваем $p_{k,r}$ снизу.

$$p_{k,r}(x) = (1-x)^{r+1} \sum_{\nu=k}^r b_\nu x^\nu$$

и

$$b_\nu = \frac{1}{\nu!} \frac{d^\nu}{dx^\nu} \{p_{k,r}(x)(1-x)^{-r-1}\}_{x=0} =$$

$$\frac{1}{k!(\nu-k)!} p_{k,r}^{(k)}(0) \frac{d^{\nu-k}}{dx^{\nu-k}} \{(1-x)^{-r-1}\}_{x=0} = \frac{1}{k!(\nu-k)!} (r+1)(r+2) \cdots (r+\nu-k) > 0.$$

Так что на $(0, 1)$

$$p_{k,r}(x) > b_k(1-x)^{r+1}x^k = \frac{x^k}{k!}(1-x)^{r+1}.$$

Осталось применить неравенство А. А. Маркова для производных алгебраических полиномов степени n (см., напр., [2], 5.4.6)

$$\max_{0 \leq t \leq b} |p^{(\nu)}(t)| \leq \left(\frac{2}{b}n^2\right)^\nu \max_{0 \leq t \leq b} |p(t)|.$$

В рассматриваемом случае $n = 2r+1$, а $b = x$ при $\nu \leq k$ и $b = 1$ при $\nu > k$. $\square$

Вернёмся к периодическому случаю.

Лемма 4. Для любого $r \in \mathbb{Z}_+$, для любых наборов $\Pi = \{x_s\}$ и $\{y_{s,\nu}\}$ ($1 \leq s \leq m, 0 \leq \nu \leq r$) и для любого $\epsilon > 0$ можно построить тригонометрический полином высокого порядка, зависящего от r , $\delta = \min_s |x_s - x_{s+1}|$ и ϵ , который удовлетворяет условиям:

$$\tau^{(\nu)}(x_s) = y_{s,\nu} \quad (1 \leq s \leq m, 0 \leq \nu \leq r), \quad \|\tau\| \leq (\gamma_0(r, \Pi) + \epsilon) \max_{s,\nu} |y_{s,\nu}|,$$

$$\text{где } \gamma_0(r, \Pi) = \sum_{\nu=0}^r \frac{1}{\nu!} (\max_s \Delta x_s)^\nu.$$

Доказательство. По предположению $x_1 < x_2 < \cdots < x_m < x_{m+1} = x_1 + 2\pi$. Считаем, что $y_{m+1,\nu} = y_{1,\nu}$ ($0 \leq \nu \leq r$). Построим 2π -периодический (эрмитовский) сплайн h степени $2r+1$ из класса $C^r(\mathbb{T})$. Он определяется условиями:

$h^{(\nu)}(x_s) = y_{s,\nu}$ ($1 \leq s \leq m+1, 0 \leq \nu \leq r$). На $[x_s, x_{s+1}]$ ($x_{s+1} - x_s = \Delta x_s, p_{\nu,r} -$ полином из леммы 3)

$$h(x) = \sum_{\nu=0}^r \{y_{s,\nu} p_{\nu,r}(\frac{x-x_s}{\Delta x_s})(\Delta x_s)^\nu + y_{s+1,\nu} p_{\nu,r}(\frac{x_{s+1}-x}{\Delta x_s})(\Delta x_s)^\nu (-1)^\nu\},$$

так как, например, при $q \leq r$

$$h^{(q)}(x_{s+1}) = \sum_{\nu=0}^r \{y_{s,\nu} p_{\nu,r}^{(q)}(1)(\Delta x_s)^{\nu-q} + y_{s+1,\nu} p_{\nu,r}^{(q)}(0)(\Delta x_s)^{\nu-q} (-1)^{q+\nu}\} = y_{s+1,q}.$$

В силу Леммы 3 при $x \in [x_s, x_{s+1}]$

$$\begin{aligned} |h(x)| &\leq \sum_{\nu=0}^r \{|y_{s,\nu}| \frac{(x-x_s)^\nu}{\nu!} + |y_{s+1,\nu}| \frac{(x_{s+1}-x)^\nu}{\nu!}\} \leq \\ &\leq \max_{\nu} \{|y_{s,\nu}|, |y_{s+1,\nu}|\} \sum_{\nu=0}^r \frac{1}{\nu!} \{(x-x_s)^\nu + (x_{s+1}-x)^\nu\} \leq \\ (2.1) \quad &\leq \max_{\nu} \{|y_{s,\nu}|, |y_{s+1,\nu}|\} \sum_{\nu=0}^r \frac{1}{\nu!} (\Delta x_s)^\nu \leq e^{2\pi} \max_{\nu} \{|y_{s,\nu}|, |y_{s+1,\nu}|\} \end{aligned}$$

При $r = 0$ вместо $e^{2\pi}$ можно поставить 1.

При $q \geq 1$ на $[x_s, x_{s+1}]$ в силу той же леммы 3

$$\begin{aligned} |h^{(q)}(x)| &\leq \gamma(r, q) \sum_{\nu=0}^r \{|y_{s,\nu}| (\frac{x-x_s}{\Delta x_s})^{(\nu-q)+} (\Delta x_s)^{\nu-q} + |y_{s+1,\nu}| (\frac{x_{s+1}-x}{\Delta x_s})^{(\nu-q)+} (\Delta x_s)^{\nu-q}\} \leq \\ &\gamma(r, q) \sum_{\nu=0}^r \{|y_{s,\nu}| + |y_{s+1,\nu}|\} (\Delta x_s)^{\nu-q}. \end{aligned}$$

Поэтому при $q \geq 1$ и $\Delta x_s \geq \delta > 0$

$$(2.2) \quad \|h^{(q)}\| \leq \gamma_1(r, q) \max\{1, \frac{1}{\delta^q}\} \max_{1 \leq s \leq m, 0 \leq \nu \leq r} |y_{s,\nu}|.$$

По теореме Джексона для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ существует полином порядка не выше n такой, что

$$\|h^{(\nu)} - \tau_n^{(\nu)}\| \leq c \frac{\|h^{(r+1)}\|}{(n+1)^{r+1-\nu}} \quad (0 \leq \nu \leq r+1).$$

Возьмём теперь эрмитовский полином τ , определяемый условиями:

$$\tau^{(\nu)}(x_s) = (h - \tau_n)^{(\nu)}(x_s) \quad (1 \leq s \leq m, 0 \leq \nu \leq r).$$

В силу Леммы 3 и неравенства Джексона

$$\|\tau^{(q)}\| \leq \gamma(r, \Pi) \max_{s,\nu} |(h - \tau_n)^{(\nu)}(x_s)| \leq c\gamma(r, \Pi) \frac{\|h^{(r+1)}\|}{n+1}.$$

Положим теперь $\tilde{\tau} = \tau_n + \tau$ (его порядок равен $\max\{n, m(r+1) - 1\}$). Тогда при $1 \leq s \leq m$ и $0 \leq \nu \leq r$

$$\tilde{\tau}^{(\nu)}(x_s) = \tau_n^{(\nu)}(x_s) + (h - \tau_n)^{(\nu)}(x_s) = h^{(\nu)}(x_s) = y_{s,\nu}.$$

При этом при $q \in [0, r]$

$$\begin{aligned} \|\tilde{\tau}^{(q)}\| &\leq \|\tau_n^{(q)}\| + \|\tau^{(q)}\| \leq \|h^{(q)} - \tau_n^{(q)}\| + \|h^{(q)}\| + \|\tau^{(q)}\| \leq \\ &c \frac{\|h^{(r+1)}\|}{(n+1)^{r+1-q}} + \|h^{(q)}\| + c\gamma(r, \Pi) \frac{\|h^{(r+1)}\|}{n+1}. \end{aligned}$$

Учитывая неравенство (2.2) при $q = r+1$, получаем

$$\|\tilde{\tau}^{(q)}\| \leq \gamma_1(r, \Pi) \frac{1}{(n+1)\delta^{r+1}} \max |y_{s,\nu}| + \|h^{(q)}\|.$$

А при $q = 0$, как это следует из (2.1),

$$\|\tilde{\tau}\| \leq \left\{ \sum_{\nu=0}^r \frac{1}{\nu!} (\max_s \Delta x_s)^\nu + \gamma_1(r, \Pi) \frac{1}{(n+1)\delta^{r+1}} \right\} \max_{s,\nu} |y_{s,\nu}|$$

и при достаточно большом n полином $\tilde{\tau}$ -искомый. $\square$

Лемма 5. Пусть $f \in C^r(\mathbb{T})$ ($r \in \mathbb{Z}_+$) и $\tau_{f,r}$ -эрмитовский интерполяционный тригонометрический полином, определяемый условиями: $\tau_{f,r}^{(\nu)}(x_s) = f^{(\nu)}(x_s)$ ($1 \leq s \leq m, 0 \leq \nu \leq r$) (его порядок не больше $\lceil \frac{m(r+1)+1}{2} \rceil$). Тогда для $x \in \mathbb{R}$ и $\nu \in [0, r]$

$$|f^{(\nu)}(x) - \tau_{f,r}^{(\nu)}(x)| \leq \gamma(r, \Pi) \min_s \left| \sin \frac{x - x_s}{2} \right|^{r-\nu} \omega(f^{(r)}; \min_s \left| \sin \frac{x - x_s}{2} \right|),$$

$$\|\tau_{f,r}^{(r+1)}\| \leq \gamma(r, \Pi) \omega(f^{(r)}; \pi).$$

Доказательство. Главное - это неравенство для $(r+1)$ -й производной. Сначала из него выведем неравенство о приближении. Пусть для определённости $x \in [\frac{x_s + x_{s+1}}{2}]$. Тогда

$$f^{(r)}(x) - \tau_{f,r}^{(r)}(x) = [f^{(r)}(x) - f^{(r)}(x_s)] + [\tau_{f,r}^{(r)}(x_s) - \tau_{f,r}^{(r)}(x)].$$

и в силу очевидного неравенства и монотонности ω

$$|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(x_s)| \leq \omega(f^{(r)}; |x - x_s|) \leq \omega(f^{(r)}; \frac{2}{\pi} |\sin(x - x_s)|),$$

$$|\tau_{f,r}^{(r)}(x_s) - \tau_{f,r}^{(r)}(x)| \leq \int_{x_s}^x |\tau_{f,r}^{(r+1)}(t)| dt \leq \gamma(r, \Pi) \omega(f^{(r)}; \pi) (x - x_s)$$

и нужно воспользоваться известным неравенством $\omega(f; \lambda h) \leq (\lambda + 1)\omega(f; h)$, откуда следует, что $\omega(f; c)h \leq 2c\omega(f; h)$. Так что искомое неравенство при $\nu = r$ доказано. А далее можно либо интегрировать это неравенство r раз по $[x_s, x]$, либо сразу воспользоваться формулой Тейлора для $f^{(\nu)} - \tau_{f,r}^{(\nu)}$ в окрестности точки x_s .

Неравенство для $(r+1)$ -ой производной $\tau_{f,r}$ можно доказать индукцией по m (вместо $\tau_{f,r}$ будем писать $\tau_{f,r,m}$). При $m=1$ нужно лишь учесть, что при $k \in [1, r]$ существует число ξ_k такое, что $f^{(k)}(\xi_k) = 0$. Но тогда при $k \leq r-1$

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \|f^{(k)}\| &= \max_x \left| \int_{\xi_k}^x f^{(k+1)}(t) dt \right| \leq \pi \|f^{(k+1)}\| \leq \pi^{r-k} \|f^{(r)}\| = \\ &= \pi^{r-k} \|f^{(r)}(\cdot) - f^{(r)}(\xi_r)\| \leq \pi^{r-k} \omega(f^{(r)}; \pi). \end{aligned}$$

Производная периодического полинома Тейлора при $r = 2n$ (см. лемму 1), а также и при $r = 2n-1$, когда $h_{0,r} \equiv 1$, $h_{k,r} = h'_{k+1,r+1}$, по норме не превосходит

$$\left\| \sum_{k=1}^r f^{(k)}(x_1) h_{k,r}^{(r)}(\cdot - x_1) \right\| \leq \gamma(r) \sum_{k=1}^r \|f^{(k)}\| \leq \gamma_1(r) \|f^{(r)}\| \leq \gamma_1(r) \omega(f^{(r)}; \pi).$$

Например, при $r = 2n$

$$\tau_{f,r,m}(x) = \tau_{f,r,m-1} + e^{-i[\frac{1}{2}(m-1)(r+1)]x} \prod_{s=1}^{m-1} (e^{ix} - e^{ix_s})^{r+1} \sum_{k=0}^{2n} a_k h_{k,2n}(x - x_m).$$

Теперь легко доказать такие же оценки для $|a_k|$, из которых и следует искомая оценка для $|\tau_{f,r,m}^{(r+1)}|$. $\square$

Доказательство Теоремы 2. Утверждение б) является частным случаем ($m=1$) леммы 5. Для доказательства а) используем факторизацию дифференциальных операторов по Фробениусу и обобщённую теорему Ролля, доказанную Пойа (см. [4], гл. IV и [5], V, гл. 1). Частный случай - в следующей лемме.

Лемма 6. Пусть при $\lambda > 0$ и $n \geq 2$ функция $f \in C^n[0, \frac{\pi}{\lambda})$ и имеет на $[0, \frac{\pi}{\lambda})$ $m \geq 3$ нулей с учётом кратностей. Тогда функция $f'' + \lambda^2 f$ имеет там же не менее $m-2$ нулей.

Доказательство. Не умаляя общности, считаем $\lambda = 1$ (преобразование подобия). Легко видеть, что

$$f''(x) + f(x) = \frac{1}{\sin x} \frac{d}{dx} \left\{ \sin^2 x \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{\sin x} \right) \right\}.$$

Если на $(0, \pi)$ $f(x) \neq 0$ и значит, $f^{(\nu)}(0) = 0$ при $0 \leq \nu \leq m-1$, то по известной лемме Адамара частное $\frac{f(x)}{\sin x} \in C^{n-1}[0, \pi)$ и имеет в точке 0 нуль кратности $m-1$. Но тогда функция в фигурных скобках имеет в точке 0 нуль кратности m . Следовательно, функция $f'' + f$ имеет в нуле $m-2$ нуля (не менее).

Если же у f есть нули лежат на $(0, \pi)$, то рассуждение аналогичное с применением теоремы Ролля. $\square$

Как видно из доказательства, если нули f лежат на $[0, \delta\pi]$ при $\delta < 1$, то и нули $f'' + f$ лежат на $[0, \delta\pi]$. Положим

$$\Delta_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{2n} f^{(k)}(0)h_{k,2n}(x),$$

а при $x \in (0, 2\pi)$

$$H(x) = \frac{\Delta_n(x)}{h_{2n,2n}(x)}, \quad F(y) = \Delta_n(y) - H(x)h_{2n,2n}(y).$$

Очевидно, что $\Delta_n^{(\nu)}(0) = 0$ при $0 \leq \nu \leq 2n$, $F^{(\nu)}(0) = 0$ при $0 \leq \nu \leq 2n-1$ и $F(x) = 0$. Если ещё $F^{(2n)}(0) = 0$, то $\Delta_n^{(2n)}(0) - H(x)h_{2n,2n}^{(2n)}(0) = 0$ и $H(x) = 0$, т.е.

$$\Delta_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{2n} f^{(k)}(0)h_{k,2n}(x) = 0$$

и доказывать нечего ($\theta = 1$). Считаем далее, что $F^{(2n)}(0) \neq 0$ и $x \in (0, \frac{\pi}{n})$. К функции F , имеющей на $[0, x]$ $2n+1$ нуль, применяем лемму 6 при $\lambda = n$. Тогда функция $F'' + n^2F$ имеет на $[0, \frac{\pi}{n})$ не менее $(2n-1)$ нуля. При этом в нуле ровно $(2n-2)$ нуля, так как

$$(F'' + n^2F)_{x=0}^{(2n-2)} = F^{(2n)}(0) \neq 0,$$

и значит, хотя бы один нуль лежит на $(0, x)$.

Если $n \geq 2$, то применяем лемму 6 при $\lambda = n-1$ к функции $F'' + n^2F$. Продолжая таким же образом, получим, что существует число $\xi \in (0, x)$ такое, что $D_{2n}F(\xi) = 0$. Следовательно,

$$\Delta_n(x) = H(x)h_{2n,2n}(x) = \frac{D_{2n}\Delta_n(\xi)}{D_{2n}h_{2n,2n}(\xi)}h_{2n,2n}(x).$$

Очевидно, что для любого полинома τ порядка не выше n

$$D_{2n}\tau(x) \equiv (n!)^2 \hat{\tau}(0) = (n!)^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau(t) dt.$$

Для любой функции $f \in C^{2n}$

$$D_{2n}f(x) = q_n\left(\frac{d^2}{dx^2}f(x)\right) = \sum_{s=0}^n a_{s,n}f^{(2s)}(x).$$

А так как (см. лемму 1)

$$h_{k,2n}(x) = \sum_{s=\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}^n a_{s,n}h_{2n,2n}^{(2s-k)}(x),$$

то при чётном k

$$\hat{h}_{k,2n}(0) = \sum_{s=\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^n a_{s,n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_{2n,2n}^{(2s-k)}(x) = a_{\frac{k}{2},n} \hat{h}_{2n,2n}(0) = \frac{1}{(n!)^2} a_{\frac{k}{2},n},$$

а при нечётном k $\hat{h}_{k,2n}(0) = 0$. $D_{2n}h_{2n,2n} \equiv a_{n,n} = 1$, поэтому

$$\begin{aligned} D_{2n}\Delta_n(\xi) &= D_{2n}f(\xi) - \sum_{k=0}^{2n} f^{(k)}(0) D_{2n}h_{k,2n}(\xi) = D_{2n}f(\xi) - \sum_{k=0}^{2n} f^{(k)}(0)(n!)^2 \hat{h}_{k,2n}(0) = \\ &= D_{2n}f(\xi) - \sum_{s=0}^n a_{s,n} f^{(2s)}(0) = D_{2n}f(\xi) - D_{2n}f(0). \end{aligned}$$

Таким образом, для любой функции $f \in C^{2n}(\mathbb{T})$ и $x \in (0, \frac{\pi}{n})$ существует $\xi \in (0, x)$ такое, что

$$f(x) - \sum_{k=0}^{2n} f^{(k)}(0) h_{k,2n}(x) = (D_{2n}f(\xi) - D_{2n}f(0)) h_{2n,2n}(x).$$

Подобное равенство имеет место, конечно, и при $x \in (-\frac{\pi}{n}, 0)$. $\square$

Доказательство Теоремы 1. Если $\|f - \tau_n\| = E_n^{\mathbb{T}}(f)$, то в силу леммы 4 при $r = 0$ и любом $\varepsilon > 0$ можно построить полином $\tau_{f,n}$ такой, что

$$\tau_{f,n}(x_s) = f(x_s) - \tau_n(x_s) \quad (1 \leq s \leq m), \quad \|\tau_{f,n}\| \leq (1 + \varepsilon) E_n^{\mathbb{T}}(f).$$

Полагаем $\tau_{1,n} := \tau_n + \tau_{f,n}$. Тогда $\tau_{1,n}(x_s) = f(x_s) \quad (1 \leq s \leq m)$ и

$$\|f - \tau_{1,n}\| \leq \|f - \tau_n\| + \|\tau_{f,n}\| \leq (2 + \varepsilon) E_n^{\mathbb{T}}(f).$$

Предположим, что множитель $(2 + \varepsilon)$ можно заменить (хотя бы при одном n и одном узле x_1) на $(2 - \varepsilon)$ при некотором $\varepsilon > 0$.

Возьмём какую-либо функцию f_δ , имеющую на периоде $(2n + 2)$ точки чебышевского альтернанса, из которых x_1 и $x_1 + \delta$ - две соседние, а $\|f_\delta\|$ не зависит от δ . Можно взять просто кусочно линейную непрерывную и периодическую функцию. Тогда существует полином $\tau_{\delta,n}$ такой, что $\tau_{\delta,n}(x_1) = f_\delta(x_1)$ и

$$|f_\delta(x) - \tau_{\delta,n}(x)| \leq (2 - \varepsilon) E_n^{\mathbb{T}}(f_\delta) = (2 - \varepsilon) \|f_\delta\|.$$

Отсюда $\|\tau_{\delta,n}\| \leq (3 - \varepsilon) \|f_\delta\|$ и в силу неравенства Бернштейна

$$|\tau_{\delta,n}(x_1) - \tau_{\delta,n}(x_1 + \delta)| \leq \|\tau'_{\delta,n}\| \delta \leq n \|\tau_{\delta,n}\| \delta \leq n(3 - \varepsilon) \|f_\delta\| \delta.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 2\|f_\delta\| &= |f_\delta(x_1) - f_\delta(x_1 + \delta)| \leq |\tau_{\delta,n}(x_1) - \tau_{\delta,n}(x_1 + \delta)| + |\tau_{\delta,n}(x_1 + \delta) - f_\delta(x_1 + \delta)| \leq \\ &= n(3 - \varepsilon) \|f_\delta\| \delta + (2 - \varepsilon) \|f_\delta\|. \end{aligned}$$

При достаточно малом δ имеем противоречие. □

Abstract. Order of approximation of periodic functions by trigonometric polynomials with interpolation in an arbitrary system of nodes have been considered and a method of construction Hermitian interpolation polynomials has pointed out.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, т. II, М. Мир, 1965.
- [2] R. M. Trigub, E. S. Belinsky, Fourier Analysis and Approximation of Functions, Kluwer Acad. Publ., Springer. 585 p. (2004).
- [3] Р. М. Тригуб, “Приближение периодических функций тригонометрическими полиномами с эрмитовской интерполяцией и учетом положения точки. Кусочно односторонняя аппроксимация”, Доповіді НАН Укр., **5**, 19-22 (2006).
- [4] Ф. Хартман, Обыкновенные дифференциальные уравнения, М. Мир (1970).
- [5] Г. Поля, Г. Сегё, Задачи и теоремы из анализа, т. II, М. (1956).

Поступила 21 ноября 2008